Einleitende Betrachtungen.

§ 1.

Coordinaten der geraden Linie im Raume. Strahl und Axe.

1. Eine gerade Linie können wir unter zwei verschiedenen, gleich allgemeinen Gesichtspuncten auffassen.

2. Wir können erstens die gerade Linie als einen geometrischen Ort von Puncten, als von einem Puncte beschrieben, als einen Strahl betrachten. In dieser Auffassung können wir uns der Punct-Coordinaten x, y, z bedienen und, in gewohnter Weise, eine gerade Linie durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei der drei Coordinaten-Ebenen: XZ und YZ, darstellen:

$$\begin{aligned} x &= rz + \varrho, \\ y &= sz + \sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

aus welchen dann die Gleichung der Projection auf die dritte Coordinaten-Ebene XY:

$$ry - sx = (r\sigma - s\varrho), \tag{2}$$

unmittelbar folgt. Wir können, indem wir der Kürze wegen

$$r\sigma - s\varrho \equiv \eta \tag{3}$$

setzen,

$$r, \; s, \; \varrho, \; \sigma, \; \eta \tag{4}$$

als die fünf Coordinaten der geraden Linie, die wir als Strahl betrachten, bezeichnen. Diese fünf Coordinaten lassen sich in Folge der zwischen ihnen bestehenden Relation (3) auf die zur Bestimmung der geraden Linie erforderlichen vier Constanten zurückführen.

Für einen Strahl, der durch einen gegebenen Punkt (x', y', z') geht, ist

$$\begin{aligned} x' &= rz' + \varrho, \\ y' &= sz' + \sigma. \end{aligned}$$

Mithin kommt:

$$r = \frac{x - x'}{z - z'}, \qquad s = \frac{y - y'}{z - z'},$$

$$\varrho = \frac{x'z - xz'}{z - z'}, \qquad \sigma = -\frac{yz' - y'z}{z - z'},$$

$$\eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'}.$$

Statt der obigen fünf Coordinaten (4) der geraden Linie können wir hiernach die folgenden *sechs* nehmen, denen wir einstweilen noch ein beliebiges Vorzeichen geben:

$$\left.\begin{array}{lll} \pm (x - x'), & \pm (y - y'), & \pm (z - z'), \\ \pm (yz' - y'z), & \pm (x'z - xz'), & \pm (xy' - x'y). \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Erst wenn wir irgend fünf der sechs Coordinaten durch die sechste dividiren, erhalten wir Werthe, welche eine bestimmte Beziehung zu der dargestellten geraden Linie haben, und durch deren Vermittelung wir diese construiren können. — Auf diese Weise wird die Coordinaten-Bestimmung in Beziehung auf die drei Coordinaten-Axen eine symmetrische. Zwischen den sechs neuen Coordinaten besteht die Bedingungs-Gleichung:

$$(x - x')(yz' - y'z) + (y - y')(x'z - xz') + (z - z')(xy' - x'y) = 0, \qquad (6)$$

welche in Beziehung auf x, y, z, x', y', z' eine identische ist.

Indem wir x', y', z' sowohl als x, y, z als veränderlich betrachten, wird ein Strahl durch zwei Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), die beide willkürlich auf demselben angenommen werden können, bestimmt. In Folge der Willkürlichkeit dieser Annahme reduciren sich die sechs Coordinaten, von welchen die Lage zweier Puncte abhängig ist, auf vier, die zur Bestimmung einer geraden Linie gehören.

3. Wir können zweitens eine gerade Linie als von einer sich drehenden Ebene umhüllt, als eine *Axe* betrachten, in der sich alle umhüllenden Ebenen schneiden. Um eine gerade Linie in dieser zweiten Bedeutung durch zwei Gleichungen darzustellen, müssen wir von Plan-Coordinaten Gebrauch machen. Nehmen wir die drei Constanten der folgenden Gleichung, welche eine Ebene in Punct-Coordinaten darstellt:

$$tx + uy + vz + 1 = 0, \qquad (7)$$

als die Coordinaten der Ebene, so bedeuten diese die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen reciproken Werthe derjenigen Segmente, welche die Ebene von den drei Coordinaten-Axen abschneidet. Die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} t = pv + \pi, \\ u = qv + \varkappa, \end{array} \qquad (8)$$

stellen, einzeln genommen, zwei Punkte in den beiden Coordinaten-Ebenen XZ und YZ dar; wir können sagen, dass das System beider Gleichungen die gerade Linie darstellt, welche die beiden Puncte verbindet: eine *Axe*. Die Gleichung:

$$pu - qt = (p\varkappa - q\pi), \tag{9}$$

welche aus den Gleichungen (8) sich ergibt, wenn wir die Veränderliche v eliminiren, stellt denjenigen Punct dar, in welchem die dritte Coordinaten-Ebene XY von derselben geraden Linie geschnitten wird. In ganz analoger Weise, wie wir früher r, s, σ, ϱ, η als die fünf Coordinaten eines Strahles betrachtet haben, nehmen wir nun, indem wir der Kürze halber:

$$p\varkappa - q\pi = \omega \tag{10}$$

setzen,

$$p, \; q, \; \pi, \; \varkappa, \; \omega \tag{11}$$

als die fünf Coordinaten der als Axe betrachteten geraden Linie.

Wenn wir die Coordinaten einer gegebenen durch die Axe gehenden Ebene durch t', u', v' bezeichnen, so kommt:

$$t' = pv' + \pi,$$
$$u' = qv' + \varkappa,$$

und hieraus ergibt sich:

$$p = \frac{t - t'}{v - v'}, \qquad q = \frac{u - u'}{v - v'},$$

$$\pi = \frac{t'v - tv'}{v - v'}, \qquad \varkappa = -\frac{uv' - u'v}{v - v'},$$

$$\omega = \frac{tu' - t'u}{v - v'}.$$

Hiernach können wir zur Bestimmung von Axen statt der früheren fünf Coordinaten (11) auch die folgenden *sechs* nehmen:

$$\begin{array}{lll} \pm (t - t'), & \pm (u - u'), & \pm (v - v'), \\ \pm (uv' - u'v), & \pm (t'v - tv'), & \pm (tu' - t'u), \end{array} \tag{12}$$

indem wir einstweilen die Vorzeichen noch unbestimmt lassen. Erst wenn wir irgend fünf dieser sechs Coordinaten durch die sechste dividiren, erhalten wir Ausdrücke, die zur Construction der geraden Linie dienen können. Zwischen den sechs neuen Coordinaten einer Axe besteht die folgende, in Beziehung auf t, u, v, t', u', v' identische Gleichung:

$$(t - t')(uv' - u'v) + (u - u')(t'v - tv') + (v - v')(tu' - t'u) = 0. \tag{13}$$

Indem wir t', u', v' sowohl als t, u, v als veränderlich betrachten, wird eine gerade Linie, in der Bedeutung einer Axe, durch irgend zwei Ebenen (t, u, v) und (t', u', v'), welche in ihr sich schneiden, bestimmt.

4. Wenn dieselbe gerade Linie einmal als Strahl, das andere Mal als *Axe* bestimmt werden soll, so muss jeder der beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche der Strahl bestimmt ist, in jeder der beiden Ebenen (t, u, v) und (t', u', v') liegen, welche zur Bestimmung der Axe dienen, oder, was dasselbe heisst, jede der beiden Ebenen muss durch jeden der beiden Puncte gehen. Dem entsprechend erhalten wir die folgenden vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tx + uy + vz + 1 &= 0, \\ t'x + u'y + v'z + 1 &= 0, \\ tx' + uy' + vz' + 1 &= 0, \\ t'x' + u'y' + v'z' + 1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

welche die Bedingungen enthalten, dass der durch die sechs Coordinaten (5) bestimmte Strahl mit der durch die sechs Coordinaten (12) bestimmten Axe zusammenfalle.

Aus den beiden ersten und den beiden letzten der Gleichungen (14) folgt:

$$\begin{aligned} (t - t')\, x + (u - u')\, y + (v - v')\, z &= 0, \\ (t - t')\, x' + (u - u')\, y' + (v - v')\, z' &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus, wenn wir nach einander $(v - v')$ und $(u - u')$ eliminiren:

$$\begin{aligned} -(x'z - xz')(t - t') + (yz' - y'z)(u - u') &= 0, \\ (xy' - x'y)(t - t') - (yz' - y'z)(v - v') &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich in die, in dem folgenden Ausdrucke zusammengefassten, Proportionen auflösen:

$$\begin{aligned} &(t - t') : (u - u') : (v - v') \\ &= (yz' - y'z) : (x'z - xz') : (xy' - x'y). \end{aligned} \tag{15}$$

Aus der ersten und dritten, der zweiten und vierten der Gleichungen (14) folgt:

$$\begin{aligned} (x - x')\, t + (y - y')\, u + (z - z')\, v &= 0, \\ (x - x')\, t' + (y - y')\, u' + (z - z')\, v' &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus, wenn wir nach einander $(z - z')$ und $(y - y')$ eliminiren:

$$\begin{aligned} -(t'v - tv')(x - x') + (uv' - u'v)(y - y') &= 0, \\ (tu' - t'u)(x - x') - (uv' - u'v)(z - z') &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich in die folgenden Proportionen auflösen:

$$\begin{aligned} &(x - x') : \quad (y - y') : \quad (z - z') \\ &= (uv' - u'v) : (t'v - tv') : (tu' - t'u). \end{aligned} \tag{16}$$

Wenn wir endlich etwa zwischen den beiden ersten Gleichungen (14) x, zwischen den beiden letzten x' eliminiren, so kommt:

$$(tu' - t'u)\,y - (t'v - tv')\,z + (t - t') = 0,$$
$$(tu' - t'u)\,y' - (t'v - tv')\,z' + (t - t') = 0,$$

und dann wiederum zwischen diesen Gleichungen etwa $(t'v - tv')$, so ergibt sich:

$$(tu' - t'u).\ (yz' - y'z) = (t - t')\ (z - z'),$$

wonach:

$$(tu' - t'u) : (t - t') = (z - z') : (yz' - y'z). \tag{17}$$

Diese neue Proportion verbindet die Ausdrücke (15) und (16) und führt so zu der folgenden allgemeinen Zusammenstellung gleicher Verhältnisse:

$$\begin{aligned}&(x - x') : (y - y') : (z - z') : (yz' - y'z) : (x'z - xz') : (xy' - x'y)\\ &= (uv' - u'v) : (t'v - tv') : (tu' - t'u) : (t - t') : (u - u') : (v - v'). \end{aligned}\tag{18}$$

Wir wollen die unbestimmt gebliebenen Vorzeichen der sechs Coordinaten so nehmen, wie sie in den vorstehenden Proportionen auftreten. Es nöthigt uns dazu die Rücksicht auf die spätere Anwendung derselben Coordinaten zur Bestimmung von Kräften und Rotationen*). Bei dieser Annahme bedeuten nämlich, indem wir uns hier auf Betrachtung von Kräften beschränken, die sechs Coordinaten (5) die drei Projectionen auf die Coordinaten-Axen und die drei doppelten Drehungsmomente in Beziehung auf dieselben derjenigen Kraft, deren Angriffspunct $(x, y, z,)$ deren Intensität dem Abstande der beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z') gleich, und die von dem ersten Puncte zu dem zweiten gerichtet ist.

5. In der Zusammenstellung (18) sind die Bedingungen enthalten, unter welchen, in der doppelten Coordinaten-Bestimmung, ein und dieselbe gerade Linie (als Strahl und Axe betrachtet) dargestellt wird. Wenn wir zu den ursprünglichen fünf Strahlen-Coordinaten und den ursprünglichen fünf Axen-Coordinaten zurückgehn, so verwandelt sich (18) in:

$$\begin{aligned}&r : s : 1 : -\sigma : \varrho : ((r\sigma - s\varrho) \equiv \eta)\\ &= -\varkappa : \pi : ((p\varkappa - q\pi) \equiv \omega) : p : q : 1\end{aligned}\tag{19}$$

Wir behalten σ und $\varkappa$ mit dem negativen Vorzeichen bei, weil dieses die Symmetrie der Coordinaten-Bestimmung in Beziehung auf OZ verlangt.

6. Wir können die Proportionen (19) als aus den Proportionen (18) dadurch abgeleitet betrachten, dass die Vorderglieder derselben durch $(z - z')$, die Hinterglieder derselben durch $(v - v')$ dividirt worden sind. Die beiden Divisoren können wir ganz beliebig und unabhängig von einander bestimmen.

---

*) Vergl. Fundamental views regarding Mechanics. Phil. Transactions. 1866. p. 361. 369.

Danach können wir wiederum die Vorderglieder der Proportionen (19) durch eine beliebige Grösse h, die Hinterglieder mit einer beliebigen Grösse l multipliciren und diese Grössen können wir selbst (vergleiche die folgende Nummer) imaginär nehmen. Die fünf absoluten Coordinaten sind dann einmal:

$$\frac{r}{h}, \quad \frac{s}{h}, \quad -\frac{\sigma}{h}, \quad \frac{\varrho}{h}, \quad \frac{\eta}{h}, \tag{20}$$

das andere Mal:

$$-\frac{\varkappa}{l}, \quad \frac{\pi}{l}, \quad \frac{\omega}{l}, \quad \frac{p}{l}, \quad \frac{q}{l}, \tag{21}$$

Die Gleichungen der drei Projectionen der geraden Linie (1) und (2) werden alsdann:

$$\begin{aligned} hx &= rz + \varrho, \\ hy &= sz + \sigma, \\ h(ry - sx) &= (r\sigma - s\varrho) \equiv \eta. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Gleichungen der drei Puncte, in welchen die Coordinaten-Ebenen von der geraden Linie geschnitten werden, (8) und (9), erhalten die Form:

$$\begin{aligned} lt &= pv + \pi, \\ lu &= qv + \varkappa, \\ l(pu - qt) &= (p\varkappa - q\pi) \equiv \omega. \end{aligned} \tag{23}$$

7. Eine reelle gerade Linie lässt sich sowohl durch zwei imaginäre als durch zwei reelle Puncte bestimmen. Wir wollen, um auch diese Bestimmungsweise einzuschliessen, die Coordinaten der beiden Puncte (x, y, z) und (x', y', z') in folgender Weise bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x^0 + ix_0, \qquad & x' &= x^0 - ix_0, \\ y &= y^0 + iy_0, & y' &= y^0 - iy_0, \\ z &= z^0 + iz_0, & z' &= z^0 - iz_0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wobei wir durch i die Einheit oder $\sqrt{-1}$ bezeichnen, je nachdem die beiden Puncte reell oder imaginär sind. Die sechs Strahlen-Coordinaten (5), mit dem richtigen Vorzeichen genommen, werden alsdann:

$$\left.\begin{matrix} 2ix_0, & 2iy_0, & 2iz_0, \\ 2i(y_0z^0 - y^0z_0), & 2i(x^0z_0 - x_0z^0), & 2i(x_0y^0 - x^0y_0). \end{matrix}\right\} \tag{25}$$

Da bei der Bestimmung einer geraden Linie nur die Quotienten je zweier ihrer sechs Coordinaten in Betracht kommen, können wir den reellen oder imaginären Factor $2i$, der in allen vorstehenden Ausdrücken vorkommt, weglassen, und erhalten dann für die sechs Strahlen-Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{ccc} x_0, & y_0, & z_0, \\ (y_0 z^0 - y^0 z_0), & (x^0 z_0 - x_0 z^0), & (x_0 y^0 - x^0 y_0). \end{array} \tag{26}$$

Die Bestimmung der geraden Linie vermittelst der Grössen x^0, y^0, z^0 und x_0, y_0, z_0 ist also immer eine reelle. Es sind x^0, y^0, z^0 die Coordinaten der immer reellen Mitte zwischen den beiden reellen oder imaginären Puncten (x, y, z) und (x', y', z'), durch welche die gerade Linie geht. Der Abstand der beiden Puncte von einander ist $2i\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, die Cosinus der drei Winkel, welche die zu bestimmende Linie mit den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ bildet, verhalten sich wie $x_0 : y_0 : z_0$.

Die Betrachtungen der vorigen Nummer übertragen sich unmittelbar auf den Fall, dass wir die gerade Linie statt als Strahl als Axe betrachten und demnach durch Ebenen bestimmen. Setzen wir:

$$\left.\begin{array}{ll} t = t^0 + it_0, & t' = t^0 - it_0, \\ u = u^0 + iu_0, & u' = u^0 - iu_0, \\ v = v^0 + iv_0, & v' = v^0 - iv_0, \end{array}\right\} \tag{27}$$

so erhalten wir als neue Axen-Coordinaten, die den Strahlen-Coordinaten (26) entsprechen, die folgenden:

$$\begin{array}{ccc} t_0, & u_0, & v_0, \\ (u_0 v^0 - u^0 v_0), & (t^0 v_0 - t_0 v^0), & (t_0 u^0 - t^0 u_0). \end{array} \tag{28}$$

8. Wenn die neuen Coordinaten-Bestimmungen (26) und (28) sich auf dieselbe gerade Linie beziehen sollen, so ist:

$$\begin{array}{l} x_0 : y^0 : z_0 : (y_0 z^0 - y^0 z_0) : (x^0 z_0 - x_0 z^0) : (x_0 y^0 - x^0 y_0) \\ = (u_0 v^0 - u^0 v_0) : (t^0 v_0 - t_0 v^0) : (t_0 u^0 - t^0 u_0) : t_0 : u_0 : v_0. \end{array} \tag{29}$$

9. Wir haben im Vorstehenden gerade Linien durch Puncten-Paare und Ebenen-Paare bestimmt und für diese, was die Coordinaten-Bestimmung reell lässt, auch conjugirte imaginäre Puncte und Ebenen genommen. Wir können aber auch, worauf wir hier nicht eingehen, imaginäre Linien durch ihre imaginäre Coordinaten in die Betrachtung einführen.

10. Wir können endlich den sechs Coordinaten der geraden Linie, sei es, dass wir dieselbe als Strahl oder als Axe betrachten, eine allgemeinere Form geben, wenn wir die Puncte und Ebenen, von welchen wir ihre Construction abhängig gemacht haben, statt, wie bisher, durch drei Coordinaten, nunmehr durch vier Coordinaten, in der bekannten Weise, bestimmen. Wir wollen demnach für die Coordinaten der früheren beiden Puncte und beiden Ebenen:

$$\begin{array}{lll} x, \; y, \; z, \; \tau, & & x', \; y', \; z', \; \tau', \\ t, \; u, \; v, \; w, & & t', \; u', \; v', \; w' \end{array}$$

nehmen, was darauf hinaus kommt, in den bisherigen Entwicklungen

$$x, \; y, \; z, \qquad\qquad x', \; y', \; z'$$

mit

$$\frac{x}{\tau}, \; \frac{y}{\tau}, \; \frac{z}{\tau}, \qquad\qquad \frac{x'}{\tau'}, \; \frac{y'}{\tau'}, \; \frac{z'}{\tau'},$$

und

$$t, \; u, \; v, \qquad\qquad t', \; u', \; v',$$

mit

$$\frac{t}{w}, \; \frac{u}{w}, \; \frac{v}{w}, \qquad\qquad \frac{t'}{w'}, \; \frac{u'}{w'}, \; \frac{v'}{w'},$$

zu vertauschen. Nach dieser Vertauschung erhalten wir für die Bestimmung der geraden Linie die Strahlen-Coordinaten:

$$(x\tau' - x'\tau), \; (y\tau' - y'\tau), \; (z\tau' - z'\tau), \; (yz' - y'z), \; (x'z - xz'), \; (xy' - x'y) \quad (30)$$

und die Axen-Coordinaten:

$$(uv' - u'v), \; (t'v - tv'), \; (tu' - t'u), \; (tw' - t'w), \; (uw' - u'w), \; (vw' - v'w), \quad (31)$$

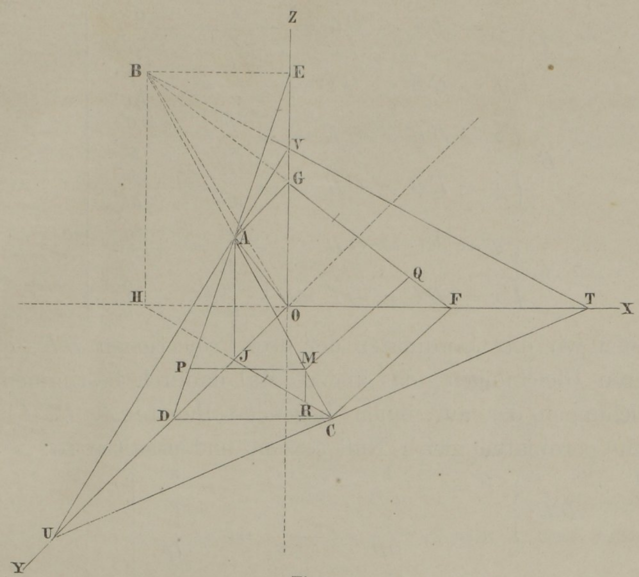
wo wir in der ersten Bestimmung den Factor $\frac{1}{\tau\tau'}$, in der zweiten $\frac{1}{ww'}$, fortgelassen haben.

Zum Behuf der geometrischen Construction der geraden Linie, die wir in den vorliegenden Untersuchungen als Raumelement betrachten, müssen wir von ihren Coordinaten zu den vier Constanten, von denen sie in allen Fällen abhängt, zurückgehn. Hierzu bieten die neuen Ausdrücke für die Coordinaten eine grössere Anzahl von Constanten, über die wir frei verfügen können, und hierin liegt, abgesehen von der grösseren Symmetrie, ihr Vorzug vor den Coordinaten (5) und (12).

11. Zur Erleichterung der Anschauung wollen wir Alles, was auf die Construction einer geraden Linie in der doppelten Coordinaten-Bestimmung Bezug hat, übersichtlich zusammenstellen.

Wir wollen für die drei Projectionen der zu bestimmenden geraden Linie auf YZ, XZ, XY die folgenden Gleichungen nehmen:

$$\begin{aligned} hy &= sz + \sigma, \\ hx &= rz + \varrho, \\ ry - sx &= \frac{\eta}{h}. \end{aligned}$$



Figur 1.

Sie seien in der beigefügten Figur (1) durch die Linien DE, FG, HI dargestellt. Die Gleichungen der drei Puncte, in welchen dieselbe gerade Linie die Coordinaten-Ebenen schneidet, seien:

$$lu = qv + \varkappa,$$
$$lt = pv + \pi,$$
$$pu - qt = \frac{\omega}{l}.$$

Die drei Puncte, welche auf den drei Projectionen DE, FG, HI liegen, sind A, B, C. Die Coordinaten eines beliebigen Punctes M, welcher auf der geraden Linie liegt, sind:

$$x = MP, \quad y = MQ, \quad z = MR,$$

die drei Coordinaten einer beliebigen Ebene TUV, welche durch die gerade Linie geht:

$$t = -\frac{1}{OT}, \quad u = -\frac{1}{OU}, \quad v = -\frac{1}{OV}.$$

Wir können die Coordinaten der drei Puncte A, B, C in doppelter Weise bestimmen; einmal aus ihren Gleichungen, das andere Mal aus den Gleichungen der drei Projectionen DE, FG, HI, indem wir in denselben die bezüglichen Punct-Coordinaten gleich Null setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\left.\begin{array}{ll}
A\left\{\begin{array}{l} z = IA = OG = +\frac{q}{\varkappa} = -\frac{\varrho}{r}, \\[1ex] y = GA = OI = -\frac{l}{\varkappa} = +\frac{\eta}{hr}, \end{array}\right. \\[3ex]
B\left\{\begin{array}{l} z = HB = OE = +\frac{p}{\pi} = -\frac{\sigma}{s}, \\[1ex] x = EB = OH = -\frac{l}{\pi} = -\frac{\eta}{hs}, \end{array}\right. \\[3ex]
C\left\{\begin{array}{l} y = FC = OD = -\frac{lp}{\omega} = +\frac{\sigma}{h}, \\[1ex] x = DC = OF = +\frac{lq}{\omega} = +\frac{\varrho}{h}. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (32)$$

Ebenso können wir die Coordinaten der drei Projectionen DE, FG, HI einmal aus ihren Gleichungen, das andere Mal dadurch bestimmen, dass wir in den Gleichungen der auf ihnen liegenden Puncte A, B, C die bezüglichen Linien-Coordinaten gleich Null setzen, und erhalten so:

$$\left.\begin{array}{ll}
DE\left\{\begin{array}{l} v = -\frac{1}{OE} = +\frac{s}{\sigma} = -\frac{\pi}{p}, \\[1ex] u = -\frac{1}{OD} = -\frac{h}{\sigma} = +\frac{\omega}{lp}, \end{array}\right. \\[3ex]
FG\left\{\begin{array}{l} v = -\frac{1}{OG} = +\frac{r}{\varrho} = -\frac{\varkappa}{q}, \\[1ex] t = -\frac{1}{OF} = -\frac{h}{\varrho} = -\frac{\omega}{lq}, \end{array}\right. \\[3ex]
HI\left\{\begin{array}{l} u = -\frac{1}{OI} = -\frac{hr}{\eta} = +\frac{\varkappa}{l}, \\[1ex] t = -\frac{1}{OH} = +\frac{hs}{\eta} = +\frac{\pi}{l}. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (33)$$

Aus der vorstehenden Zusammenstellung leiten wir hier nur noch die folgenden Relationen ab:

$$\left.\begin{array}{ll}
+\frac{s}{h} = +\frac{l.\pi}{\omega} = \text{tang}\, DEZ, & +\frac{r}{h} = -\frac{l.\varkappa}{\omega} = \text{tang}\, FGZ, \\[1ex]
-\frac{\eta}{h\varrho} = -\frac{l}{q} = \text{tang}\, AOZ, & +\frac{\eta}{h\sigma} = -\frac{l}{p} = \text{tang}\, BOZ.
\end{array}\right\} \qquad (34)$$

12. Die Coordinaten eines Punctes und die Coordinaten einer Ebene ändern sich, wenn die Coordinaten-Axen, welche ihre geometrische Construction vermitteln, ihre Lage und Richtung ändern. Die alten Coordinaten sind lineare Functionen der neuen, die als Constanten diejenigen Grössen enthalten, durch welche die Lage des neuen Coordinaten-Systems gegen das alte bestimmt wird. Ein Gleiches gilt für die Coordinaten der geraden Linie, sei es, dass wir dieselbe als Strahl oder als Axe betrachten.

Wir wollen mit den Strahlen-Coordinaten, für welche wir die sechs Grössen:

$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad yz' - y'z, \quad x'z - xz', \quad xy' - x'y,$
nehmen wollen, beginnen. Nach einer parallelen Verschiebung der Coordinaten-Axen bleiben die drei ersten Coordinaten unverändert. Wenn wir die Coordinaten des neuen Aufangspunctes durch x^0, y^0, z^0 bezeichnen und zur Unterscheidung die neuen Coordinaten-Werthe in fetter Schrift schreiben, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) &= (yz' - y'z) + y^0(z - z') - z^0(y - y'),\\ (\mathbf{x}'\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{z}') &= (x'z - xz') - x^0(z - z') + z^0(x - x'),\\ (\mathbf{x}\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\mathbf{y}) &= (xy' - x'y) + x^0(y - y') - y^0(x - x'),\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned}(yz' - y'z) &= (\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) - y^0(\mathbf{z} - \mathbf{z}') + z^0(\mathbf{y} - \mathbf{y}'),\\ (x'z - xz') &= (\mathbf{x}'\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{z}') + x^0(\mathbf{z} - \mathbf{z}') - z^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\\ (xy' - x'y) &= (\mathbf{x}\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\mathbf{y}) - x^0(\mathbf{y} - \mathbf{y}') + y^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$ identisch sind mit $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, $(\mathbf{y} - \mathbf{y}')$, $(\mathbf{z} - \mathbf{z}')$. Wenn wir für die ursprünglichen Coordinaten r, s, σ, ϱ, η nehmen und die entsprechenden neuen Coordinaten durch r', s', σ', ϱ', η' bezeichnen, erhalten wir aus den letzten Gleichungen unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}r &= r', \qquad s = s',\\ \sigma &= \sigma' + y^0 \quad - z^0 s',\\ \varrho &= \varrho' + x^0 \quad - z^0 r',\\ \eta &= \eta' - x^0 s' + y^0 r'.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

13. Wir können den Uebergang von einem Coordinaten-System zu einem anderen, in welchem die Richtung der Coordinaten-Axen eine verschiedene ist, in drei einzelne Schritte zerlegen. In dem einfachsten Falle zum Beispiel, wo ein rechtwinkliges Coordinaten-System XYZ durch Drehung um den Anfangspunct irgend eine andere Lage $X'Y'Z'$ annimmt, wollen wir erstens das ursprüngliche Coordinaten-System XYZ um die Axe OZ so drehen, dass die Coordinaten-Ebene XZ, nach der Drehung, durch die der Lage nach gegebene neue Axe OZ' geht. Wir wollen zweitens, nach vollbrachter Drehung um OZ, das Coordinaten-System um die Axe OY in ihrer neuen Lage so drehen, dass in der Ebene XZ die beiden Axen OZ und OZ' zusammenfallen. Dann bleibt drittens nur noch übrig, das System um OZ' so zu drehen, dass die beiden Axen OX und OY, die durch die beiden ersten Drehungen in die Coordinaten-Ebene $X'Y'$ gebracht sind, mit OX' und OY' zusammenfallen. Die drei Drehungswinkel, von welchen die Lage

der neuen Axen gegen die alten bestimmt ist, treten als Constante in den bezüglichen Verwandlungsformeln der Coordinaten des Punctes, der Ebene, der geraden Linie auf. Wir wollen diese Winkel ein für allemal in dem Sinne rechnen, wie dieses bei den Drehungsmomenten zu geschehen pflegt, d. h. von OX nach OY, von OY nach OZ und von OZ nach OX.

Wenn OZ seine Lage behält, während in der Ebene XY die beiden Axen OX und OY sich beliebig um OZ drehen und in ihrer neuen Lage OX' und OY' zwei Winkel α und α' mit OX in der ursprünglichen Lage bilden, so erhalten wir zwischen den alten Punct-Coordinaten x, y, z und x', y', z' und den neuen, die wir durch $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ und $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$ bezeichnen wollen, die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
x &= \mathbf{x} \cos\alpha + \mathbf{y} \cos\alpha', \\
x' &= \mathbf{x}' \cos\alpha + \mathbf{y}' \cos\alpha', \\
y &= \mathbf{x} \sin\alpha + \mathbf{y} \sin\alpha', \\
y' &= \mathbf{x}' \sin\alpha + \mathbf{y}' \sin\alpha', \\
z &= \mathbf{z}, \qquad\qquad z' = \mathbf{z}',
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned}
(x - x') &= \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cos\alpha + (\mathbf{y} - \mathbf{y}') \cos\alpha', \\
(y - y') &= \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sin\alpha + (\mathbf{y} - \mathbf{y}') \sin\alpha', \\
(z - z') &= \quad (\mathbf{z} - \mathbf{z}'), \\
(yz' - y'z) &= - (\mathbf{x}'\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{z}') \sin\alpha + (\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) \sin\alpha', \\
(x'z - xz') &= \quad (\mathbf{x}'\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{z}') \cos\alpha - (\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) \cos\alpha', \\
(xy' - x'y) &= \quad (\mathbf{x}\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\mathbf{y}) \sin\vartheta,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\alpha' - \alpha \equiv \vartheta$$

setzen. Nehmen wir statt der sechs Strahlen-Coordinaten in den beiden Systemen die fünf Coordinaten $r, s, \sigma, \varrho, \eta$ und $r', s', \sigma', \varrho', \eta'$, so erhalten wir aus den vorstehenden Gleichungen unmittelbar die entsprechenden:

$$\left.\begin{aligned}
r &= r' \cos\alpha + s' \cos\alpha', \\
s &= r' \sin\alpha + s' \sin\alpha', \\
\sigma &= \varrho' \sin\alpha + \sigma' \sin\alpha', \\
\varrho &= \varrho' \cos\alpha + \sigma' \cos\alpha', \\
\eta &= \eta' \sin\vartheta.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Wenn insbesondere auch die neuen Axen OX' und OY' auf einander senkrecht stehen, kommt:

$$\left.\begin{aligned}
r &= r' \cos\alpha - s' \sin\alpha,\\
s &= r' \sin\alpha + s' \cos\alpha,\\
\sigma &= \varrho' \sin\alpha + \sigma' \cos\alpha,\\
\varrho &= \varrho' \cos\alpha - \sigma' \sin\alpha,\\
\eta &= \eta'.
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Wenn wir, statt die beiden Axen OX und OY zu drehen, die beiden Axen OX und OZ in ihrer Ebene um O drehen und durch γ' und γ die Winkel bezeichnen, welche diese Axen in ihrer neuen Lage OX' und OZ' mit OZ in der ursprünglichen Lage bilden, so erhalten wir, um die sechs alten Strahlen-Coordinaten durch die neuen auszudrücken, durch blosse Buchstabenvertauschung aus den Gleichungen (38) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
(x - x') &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sin\gamma' + (\mathbf{z} - \mathbf{z}') \sin\gamma,\\
(y - y') &= (\mathbf{y} - \mathbf{y}'),\\
(z - z') &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cos\gamma' + (\mathbf{z} - \mathbf{z}') \cos\gamma,\\
(yz' - y'z) &= (\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) \cos\gamma - (\mathbf{x}\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\mathbf{y}) \cos\gamma',\\
(x'z - xz') &= (\mathbf{x}'\mathbf{z} - \mathbf{x}\mathbf{z}') \sin\vartheta',\\
(xy' - x'y) &= -(\mathbf{y}\mathbf{z}' - \mathbf{y}'\mathbf{z}) \sin\gamma + (\mathbf{x}\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\mathbf{y}) \sin\gamma',
\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

wobei wir der Kürze halber

$$\gamma' - \gamma \equiv \vartheta'$$

gesetzt haben. Hieraus ergibt sich, wenn wir wiederum zu den fünf Strahlen-Coordinaten übergehen:

$$\left.\begin{aligned}
r &= \frac{r' \sin\gamma' + \sin\gamma}{r' \cos\gamma' + \cos\gamma},\\
s &= \frac{s'}{r' \cos\gamma' + \cos\gamma},\\
\sigma &= \frac{\sigma' \cos\gamma + \eta' \cos\gamma'}{r' \cos\gamma' + \cos\gamma},\\
\varrho &= \frac{\varrho' \sin\vartheta'}{r' \cos\gamma' + \cos\gamma},\\
\eta &= \frac{\sigma' \sin\gamma + \eta' \sin\gamma'}{r' \cos\gamma' + \cos\gamma},
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

wonach ferner

$$\frac{\varrho}{s} = \frac{\varrho'}{s'} \sin\vartheta'.$$

Wenn insbesondere die neuen Coordinaten-Axen OX' und OZ' auf einander senkrecht stehen, verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
r &= \frac{r' \cos\gamma + \sin\gamma}{-r' \sin\gamma + \cos\gamma},\\
s &= \frac{s'}{-r' \sin\gamma + \cos\gamma},\\
\sigma &= \frac{\sigma' \cos\gamma - \eta' \sin\gamma}{-r' \sin\gamma + \cos\gamma},\\
\varrho &= \frac{\varrho'}{-r' \sin\gamma + \cos\gamma},\\
\eta &= \frac{\sigma' \sin\gamma + \eta' \cos\gamma}{-r' \sin\gamma + \cos\gamma},\\
\frac{\varrho}{s} &= \frac{\varrho'}{s'}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Wenn wir die Axen OY und OZ um OX drehen, so erhalten wir die entsprechenden Verwandlungsformeln unmittelbar durch Buchstaben-Vertauschung, nicht nur für den Fall der sechs, sondern auch der fünf Strahlen-Coordinaten, wenn wir, was letztere betrifft, von den Formeln (42) ausgehen. Darum erscheint es unnöthig, die neuen Formeln hinzuschreiben. Indessen ist zu bemerken, dass bei dieser Vertauschung die Drehung von OZ nach OY gerechnet wird, also in demselben Sinne, wie der Winkel, dessen trigonometrische Tangente in den Grund-Gleichungen (1) mit s bezeichnet worden ist. Soll sie in dem oben festgestellten Sinne, d. h. im Sinne des Drehungsmomentes um OX, genommen werden, so ergibt sich die Zurückführung darauf sogleich.

14. Wir können auch direct von den fünf Strahlen-Coordinaten in dem ersten Systeme zu den fünf Strahlen-Coordinaten in dem zweiten übergehn. Es seien $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ die Coordinaten einer geraden Linie in dem ersten Coordinatensysteme, dann sind:

$$\left.\begin{aligned}
x &= rz + \varrho,\\
y &= sz + \sigma,\\
ry - sx &= \eta,
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

die Gleichungen ihrer drei Projectionen. Sind $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ die Coordinaten derselben geraden Linie in dem zweiten Coordinatensysteme, so sind die Gleichungen ihrer drei Projectionen in diesem Systeme:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{x} &= r'\mathbf{z} + \varrho',\\
\mathbf{y} &= s'\mathbf{z} + \sigma',\\
r'\mathbf{y} - s'\mathbf{x} &= \eta'.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Sind die neuen Coordinaten-Axen den alten parallel und beträgt die Verschiebung nach OX, OY, OZ bezüglich x^0, y^0, z^0, so ist:

$$\mathbf{x} = x - x^0, \qquad \mathbf{y} = y - y^0, \qquad \mathbf{z} = z - z^0.$$

Hiernach verwandeln sich die letzten drei Gleichungen in:

$$\begin{aligned} x &= r'z + (\varrho' + x^0 - r'z^0), \\ y &= s'z + (\sigma' + y^0 - s'z^0), \\ r'y - s'x &= \eta' + r'y^0 - s'x^0, \end{aligned}$$

und damit diese Gleichungen mit den Gleichungen (44) identisch werden, ergibt sich, wie in der Nummer 12. (37):

$$\begin{aligned} r &= r', \qquad s = s', \\ \varrho &= \varrho' + x^0 - r'z^0, \\ \sigma &= \sigma' + y^0 - s'z^0, \\ \eta &= \eta' + r'y^0 - s'x^0. \end{aligned}$$

Drehen wir, wie in der 13. Nummer, die Axen OX und OY in ihrer Ebene um O, so gehen die ersten beiden Gleichungen (44), indem wir

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{z}, \\ x &= \mathbf{x} \cos\alpha + \mathbf{y} \cos\alpha', \\ y &= \mathbf{x} \sin\alpha + \mathbf{y} \sin\alpha' \end{aligned}$$

setzen, in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cos\alpha + \mathbf{y} \cos\alpha' &= r\mathbf{z} + \varrho, \\ \mathbf{x} \sin\alpha + \mathbf{y} \sin\alpha' &= s\mathbf{z} + \sigma. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, wenn wir wiederum $\alpha' - \alpha \equiv \vartheta$ setzen, die folgenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{r \sin\alpha' - s \cos\alpha'}{\sin\vartheta} \cdot \mathbf{z} + \frac{\varrho \sin\alpha' - \sigma \cos\alpha'}{\sin\vartheta}, \\ \mathbf{y} &= -\frac{r \sin\alpha - s \cos\alpha}{\sin\vartheta} \cdot \mathbf{z} - \frac{\varrho \sin\alpha - \sigma \cos\alpha}{\sin\vartheta}, \end{aligned}$$

welche, wenn wir sie den beiden ersten der Gleichungen (45) identisch setzen, die folgenden Relationen geben:

$$\begin{aligned} r' \sin\vartheta &= r \sin\alpha' - s \cos\alpha', \\ -s' \sin\vartheta &= r \sin\alpha - s \cos\alpha, \\ \varrho' \sin\vartheta &= \varrho \sin\alpha' - \sigma \cos\alpha', \\ -\sigma' \sin\vartheta &= \varrho \sin\alpha - \sigma \cos\alpha, \end{aligned}$$

und hieraus folgt, in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (39):

$$\begin{aligned} r &= r' \cos\alpha + s' \cos\alpha', \\ s &= r' \sin\alpha + s' \sin\alpha', \\ \varrho &= \varrho' \cos\alpha + \sigma' \cos\alpha', \\ \sigma &= \varrho' \sin\alpha + \sigma' \sin\alpha', \end{aligned}$$

und

$$\eta = \eta' \sin \vartheta.$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Formeln (42) ableiten.

15. Wir können in Folge der Proportionen (19) aus den entwickelten Formeln für die Verwandlung der Strahlen-Coordinaten einer gegebenen geraden Linie sogleich die Verwandlungsformeln für die Axen-Coordinaten derselben ableiten. Wenn wir die Axen-Coordinaten in dem ursprünglichen Systeme mit:

$$p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,\ \omega,$$

in dem neuen Systeme mit:

$$p',\ q',\ \pi',\ \varkappa',\ \omega'$$

bezeichnen, so ist:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\sigma}{\eta}, & p' &= -\frac{\sigma'}{\eta'}, \\ q &= \frac{\varrho}{\eta}, & q' &= \frac{\varrho'}{\eta'}, \\ \pi &= \frac{s}{\eta}, & \pi' &= \frac{s'}{\eta'}, \\ \varkappa &= -\frac{r}{\eta}, & \varkappa' &= -\frac{r'}{\eta'}, \\ \omega &= \frac{1}{\eta}, & \omega' &= \frac{1}{\eta'}. \end{aligned}$$

Wenn wir hiernach die Richtung der Coordinaten-Axen beibehalten und den Anfangspunct in irgend einen Punct (x^0, y^0, z^0) verlegen, so geben die Gleichungen (37):

$$\begin{aligned} p &= \frac{p' - y^0\omega' + z^0\pi'}{1 - x^0\pi' - y^0\varkappa'}, \\ q &= \frac{q' + x^0\omega' + z^0\varkappa'}{1 - x^0\pi' - y^0\varkappa'}, \\ \pi &= \frac{\pi'}{1 - x^0\pi' - y^0\varkappa'}, \\ \varkappa &= \frac{\varkappa'}{1 - x^0\pi' - y^0\varkappa'}, \\ \omega &= \frac{\omega'}{1 - x^0\pi' - y^0\varkappa'}. \end{aligned} \tag{46}$$

Wenn die Axen OX und OY so in ihrer Ebene gedreht werden, dass sie in ihrer neuen Lage mit OX in der ursprünglichen Lage die Winkel α und α' bilden, so geben die Gleichungen (39):

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{p' \sin \alpha' - q' \sin \alpha}{\sin \vartheta}, \\
q &= \frac{q' \cos \alpha - p' \cos \alpha'}{\sin \vartheta}, \\
\pi &= \frac{\pi' \sin \alpha' - \varkappa' \sin \alpha}{\sin \vartheta}, \\
\varkappa &= \frac{\varkappa' \cos \alpha - \pi' \cos \alpha'}{\sin \vartheta}, \\
\omega &= \frac{\omega'}{\sin \vartheta}.
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Wenn wir endlich OX und OZ in ihrer Ebene um O drehen, so geben, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, die Gleichungen (42):

$$\begin{aligned}
p &= \frac{p' \cos \gamma - \cos \gamma'}{- p' \sin \gamma + \sin \gamma'}, \\
q &= \frac{q' \sin \vartheta'}{- p' \sin \gamma + \sin \gamma'}, \\
\pi &= \frac{\pi'}{- p' \sin \gamma + \sin \gamma'}, \\
\varkappa &= \frac{\varkappa' \sin \gamma' - \omega' \sin \gamma}{- p' \sin \gamma + \sin \gamma'}, \\
\omega &= \frac{\omega'}{- p' \sin \gamma + \sin \gamma'}.
\end{aligned}$$

§ 2.

Ueber Complexe und Congruenzen im Allgemeinen.

16. Wenn

$$\begin{aligned}
&(x-x') : (y-y') : (z-z') : (yz'-y'z) : (x'z-xz') : (xy'-x'y) \\
&= (uv'-u'v) : (t'v-tv') : (tu'-t'u) : (t-t') : (u-u') : (v-v'),
\end{aligned}$$

so gehören die Strahlen-Coordinaten:

$$(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)$$

und die Axen-Coordinaten:

$$(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')$$

derselben geraden Linie an. Folglich sind es auch dieselben geraden Linien, deren Strahlen- und Axen-Coordinaten die folgenden beiden Gleichungen befriedigen:

$$F[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)] = \Omega_n = 0, \qquad (1)$$

$$F[(uv'-u'v),\ (t'v-tv'),\ (tu'-t'u),\ (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')] = \Phi_n = 0, \qquad (2)$$

wenn F dieselbe homogene Function der jedesmaligen sechs ihres Grades sind, kann unter denselben sich einer befinden, dessen Grad geringer ist. Das findet Statt in dem Falle der Gleichungen (5) und (6), in welchen, wenn $m > n$, der Grad der Complexe im Allgemeinen m ist, aber für den besonderen Fall, dass μ unendlich gross wird, auf n sich reducirt.

Es bilden die Congruenzen, in welchen die Anzahl der Linien, welche durch einen gegebenen Punct gehen oder welche in einer gegebenen Ebene liegen, k beträgt, so viele coordinirte Arten, als die Zahl k sich in Factoren m und n zerlegen lässt; also nur eine einzige, wenn k eine Primzahl ist. Daher bezeichnen wir die Art der Congruenz durch das Symbol:

$$[m,\ n]. \tag{7}$$

22. Die Strahlen- oder Axen-Coordinaten derjenigen Linien, welche dreien Complexen zugleich angehören, befriedigen gleichzeitig die entsprechenden Gleichungen der drei Complexe, die wir durch:

$$\Omega_m = 0, \qquad \Omega_n = 0, \qquad \Omega_g = 0, \tag{8}$$

oder durch:

$$\Phi_m = 0, \qquad \Phi_n = 0, \qquad \Phi_g = 0 \tag{9}$$

darstellen wollen. Sie sind dadurch dreien Bedingungen unterworfen. Da eine gerade Linie durch vier ihrer fünf Coordinaten bestimmt ist, so folgt, dass jede dieser Coordinaten Function jeder der drei anderen, oder, was dasselbe ist, jede dieser Coordinaten Function einer beliebig angenommenen Veränderlichen ist. Nehmen wir für diese, spätern Entwickelungen vorgreifend, die Zeit, so ist durch das Vorstehende ausgesprochen, dass die bezügliche gerade Linie, wenn wir die Zeit sich continuirlich ändern lassen, eine Fläche erzeugt. Eine solche Fläche, die durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, wollen wir — die triviale Bezeichnung als windschiefe Fläche vermeidend — eine Strahlen- oder Axenfläche nennen, und, indem wir diese Ausdrücke als synonym betrachten, eine solche Fläche auch als Linienfläche bezeichnen.

Die zusammenfallenden Linien dreier Complexe bilden eine Strahlen- oder Axenfläche.

Die Strahlen- oder Axen-Fläche gehört gleichzeitig allen Complexen an, welche, wenn μ und μ' unbestimmte Coefficienten bedeuten, durch jede der beiden Gleichungen:

$$\Omega_m + \mu\Omega_n + \mu'\Omega_g = 0, \tag{10}$$

$$\Phi_m + \mu\Phi_n + \mu'\Phi_g = 0 \tag{11}$$

dargestellt werden; sie gehört jeder Congruenz an, die durch irgend zwei dieser Complexe bestimmt wird. Wir sagen, dass sämmtliche Complexe, welchen eine gegebene Strahlenfläche angehört, eine durch jede der beiden vorstehenden Gleichungen dargestellte, dreigliedrige Complexgruppe bilden.

Wenn wir Ω_m, Ω_n und Ω_g als Functionen der fünf Strahlen-Coordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ betrachten, so erhalten wir die Gleichung der Strahlenfläche in Punct-Coordinaten x, y, z, wenn wir zwischen den drei Gleichungen (8) und den folgenden drei Gleichungen:

$$\eta = r\sigma - s\varrho,$$
$$x = rz + \varrho,$$
$$y = sz + \sigma$$

die fünf Strahlen-Coordinaten eliminiren. Die resultirende Gleichung in x, y, z ist im Allgemeinen vom Grade $2mng$.

Wenn wir Φ_m, Φ_n, Φ_g als Function der fünf Axen-Coordinaten $p, q, \pi, \varkappa, \omega$ betrachten, so erhalten wir die Gleichung der Axenfläche in Plan-Coordinaten t, u, v, wenn wir zwischen den drei Gleichungen (9) und den folgenden drei Gleichungen:

$$\omega = p\varkappa - q\pi,$$
$$t = pv + \pi,$$
$$u = qv + \varkappa$$

die fünf Strahlen-Coordinaten eliminiren. Die resultirende Gleichung ist im Allgemeinen vom Grade $2mng$.

Eine Strahlen- oder Axenfläche ist im Allgemeinen von gleicher Ordnung und Classe.

Strahlen-Flächen einer gegebenen Ordnung und Classe ordnen sich in verschiedene coordinirte Arten. Diese Arten ergeben sich durch den Grad der die Fläche bestimmenden Complexe. Bezeichnen wir Ordnung und Classe der Fläche durch 2λ, so ist die Anzahl solcher Arten gleich der Anzahl der möglichen Zerlegungen von λ in drei Factoren. Nehmen wir m, n, g für irgend drei solcher Factoren, so können wir die Art der Fläche näher durch das Symbol:

$$[m, n, g]$$

bezeichnen.

23. Vier Complexe haben nur eine endliche Anzahl von Linien gemein. Wenn der Grad der vier Complexe bezüglich m, n, g, h ist, so beträgt diese Anzahl:

$$2mngh,$$

wie sich unmittelbar ergibt, wenn wir zwischen den vier Gleichungen der Complexe und der Gleichung:

$$\eta = r\sigma - s\varrho,$$

oder bezüglich:

$$\omega = p\varkappa - q\pi,$$

die fünf Coordinatenwerthe bestimmen.

24. Ebene Curven werden entweder durch ihre Puncte oder durch ihre Tangenten bestimmt. Zwei solcher Curven haben eine gewisse Anzahl von Durchschnittspuncten und von gemeinschaftlichen Tangenten. Gehen wir von den beiden Dimensionen der Ebene zu den drei Dimensionen des Raumes über, so erheben wir uns von ebenen Curven zu Flächen, die entweder durch ihre Puncte oder durch ihre Tangentialebenen bestimmt werden. Zwei Flächen schneiden sich in einer räumlichen Curve und werden von einer Abwickelungsfläche umhüllt; drei Flächen haben eine gewisse Anzahl von Durchschnittspuncten und gemeinschaftlichen Tangentialebenen. Von Flächen steigen wir zu Complexen auf, welche aus geraden Linien bestehen, die wir einerseits als Strahlen, andererseits als Axen betrachten können. Die geraden Linien, welche in zwei Complexen zusammenfallen — in welchen gewissermassen die beiden Complexe sich schneiden — bilden eine Congruenz, diejenigen, welche dreien Complexen zugleich angehören, eine Strahlen- oder Axenfläche. Vier Complexen zugleich entspricht nur eine gewisse Anzahl von Strahlen oder Axen.

Es gibt eine Analysis zweier veränderlichen Grössen, die sich in der Ebene, eine Analysis dreier Veränderlichen, die sich im Raume bildlich darstellen lässt. Die Analysis von vier Veränderlichen findet ihre bildliche Darstellung, wenn wir diesen Veränderlichen die Bedeutung von Linien-Coordinaten geben.

25. Hiermit ist für die Entwicklungen des vorliegenden Bandes die Gränze gezogen. Aber der Weg zu neuen Verallgemeinerungen ist angebahnt. Wir können zu den vier unabhängigen Coordinaten der geraden Linie noch eine fünfte hinzufügen. Hier begegnen wir wieder coordinirten Beziehungen, dem entsprechend, dass wir die gerade Linie einmal als Strahl, das andere Mal als Axe betrachten. Wenn wir in der ersten Auffassung zu den vier Coordinaten einer geraden Linie als fünfte Coordinate ein der Grösse nach gegebenes Segment nehmen, das wir auf der geraden Linie entweder beliebig, oder von einem gegebenen Puncte aus, auftragen, so haben wir dadurch

eine Kraft bestimmt. Ihre fünf Coordinaten sind ihre Intensität und die vier Strahlen-Coordinaten der geraden Linie, nach welcher sie wirkt. Die Symmetrie und Einfachheit der Darstellung verlangt, dass wir auch hier, statt der vier unabhängigen Strahlen-Coordinaten, die fünf Coordinaten r, s, ϱ, σ, η nehmen, zwischen welchen die Relation besteht, dass:

$$\eta = r\sigma - s\varrho,$$

und die wir aus den sechs Coordinaten der geraden Linie dadurch ableiten, dass wir eine derselben in die fünf anderen dividiren. Wir haben aber bereits beiläufig hervorgehoben, dass diese sechs Coordinaten die Projectionen X, Y, Z einer beliebigen, nach der geraden Linie wirkenden Kraft auf die Coordinaten-Axen und die doppelten Momente L, M, N dieser Kraft in Beziehung auf dieselben Axen bedeuten. Wenn die Grösse der Kraft gegeben ist, so sind diese sechs Grössen, zwischen welchen die Relation:

$$X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0$$

fortbesteht, als die sechs Coordinaten der Kraft zu betrachten. Dieselben Coordinaten, welche für Strahlen nur relative Werthe erhalten, bekommen für Kräfte absolute Werthe. Strahlen-Complexe werden durch homogene Gleichungen, Kräfte-Complexe durch allgemeine Gleichungen zwischen den sechs Coordinaten dargestellt.

So wie wir eine Kraft durch eine, als Strahl betrachtete, gerade Linie und durch zwei auf ihr liegende Puncte darstellen, so können wir eine Rotation (richtiger ausgedrückt, die andere Art von Kraft, welche eine Rotation hervorbringt) durch eine als Axe betrachtete gerade Linie und durch zwei durch die Axe gelegte Ebenen darstellen. Indem wir dann Punct-Coordinaten mit Plan-Coordinaten und, dem entsprechend, Strahlen-Coordinaten mit Axen-Coordinaten vertauschen, gehen die sechs Kräfte-Coordinaten:

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

über in andere Ausdrücke:

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N},$$

zwischen welchen die Relation:

$$\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{N} = 0$$

besteht. Diese sechs Ausdrücke bestimmen eine Rotation und sind als die sechs Coordinaten dieser Rotation anzusehen. Sie reduciren sich in Folge der letzten Bedingungs-Gleichung auf die fünf unabhängigen Coordinaten derselben. Dieselben Coordinaten, welche für Axen nur relative Werthe besitzen, erhalten für Rotationen absolute. Homogene Gleichungen zwischen den sechs

Coordinaten einer Rotation stellen Axen-Complexe, nicht homogene Gleichungen zwischen denselben Coordinaten Rotationen-Complexe dar.

Während aber Strahlen und Axen an und für sich identisch dasselbe sind, stellen sich Kräfte und Rotationen wiederum coordinirt neben einander, analog wie Puncte und Ebenen. Das Princip der Reciprocität findet auf Kräfte und Rotationen dieselbe Anwendung als auf Puncte und Ebenen. Aber Aehnliches, wie beim Uebergange von den drei Coordinaten von Puncten und Ebenen zu den vier Coordinaten gerader Linien, findet auch dann Statt, wenn wir von den fünf unabhängigen Coordinaten von Kräften und Rotationen zu den sechs unabhängen Coordinaten von Dynamen übergehen.

Durch den Ausdruck „Dyname" habe ich die Ursache einer beliebigen Bewegung eines starren Systems, oder, da sich die Natur dieser Ursache, wie die Natur einer Kraft überhaupt, unserem Erkennuugsvermögen entzieht, die Bewegung selbst: statt der Ursache die Wirkung, bezeichnet. Da beide proportional sind, kommt dies in der mathematischen Darstellung darauf hinaus, an die Stelle einer idealen Einheit eine concrete zu setzen. — Beliebige Kräfte und Rotationen lassen sich, wenn sie gleichzeitig wirken, in unendlich verschiedener Weise sowohl auf zwei Kräfte als auf zwei Rotationen zurückführen. So können wir also eine Dyname in zwiefacher Weise auffassen und bestimmen: einmal durch zwei Kräfte, das andere Mal durch zwei Rotationen, und dem entsprechend das eine Mal durch die Coordinaten zweier Kräfte, das andere Mal durch die Coordinaten zweier Rotationen darstellen.

Die sechs Coordinaten einer Dyname aber sind dieselben sechs Grössen

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N,$$

oder

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N},$$

welche uns ursprünglich zur Bestimmung von geraden Linien gedient haben, indem wir ihnen nur relative Werthe beilegten und zwischen ihnen eine Bedingungsgleichung statuirten; dann zur Bestimmung von Kräften und Rotationen, indem wir ihnen, unter Voraussetzung der beschränkenden Bedingungsgleichung, absolute Werthe gaben. Dadurch, dass diese Bedingungsgleichung fortfällt, werden sie die Coordinaten von Dynamen. Für eine gegebene Dyname erhalten die sechs Coordinaten absolute Werthe, und umgekehrt, wenn wir diesen Coordinaten beliebige Werthe beilegen, bestimmen sie in linearer Weise eine Dyname.

So wie in einer geraden Linie die Reciprocität zwischen Punct und Ebene aufgeht, so geht in einer Dyname die Reciprocität zwischen Kraft und Rotation auf. In zwiefacher Coordinaten-Bestimmung können wir einen Linien-Complex durch eine Gleichung darstellen, ebenso in zwiefacher Coordinaten-Bestimmung einen Dynamen-Complex. Die Eigenschaften beider Complexe sind in analogem Sinne dualistisch.

In der vorstehenden Deduction über Coordinaten ist ein Mittelglied unberücksichtigt geblieben, betreffend denjenigen Fall, dass die sechs fraglichen Coordinaten der beschränkenden Bedingung nicht unterworfen sind, wir denselben aber nur relative Werthe beilegen, und, dem entsprechend, an die Stelle der allgemeinen Gleichungen, welche Dynamen-Complexe darstellen, homogene Gleichungen treten lassen. Dann entschwindet das specifisch Mechanische, und, um mich auf eine kurze Andeutung zu beschränken: es treten geometrische Gebilde auf, welche zu Dynamen in derselben Beziehung stehen, wie gerade Linien zu Kräften und Rotationen.

In den Dynamen finden die vorstehenden Betrachtungen ihren Abschluss.