WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendicis proprium*, *coronidis instar*, addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphaericae*, in Appendice dicta ab axiomate XI. Eucl. independenter demonstratæ, *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera trianguli sphaerici realia*, *rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphæra imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiatur, in qua sin. $R = 1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i, pro quo ibidem dictum I est $= e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \rightharpoondown \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \rightharpoondown \infty$). Ponatur, pro casu existentis i, unitas $= i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet p, dicatur

$$\frac{1}{2}\left(e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

cosinus ipsius p, et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

dicatur sinus ipsius p.

Erit hinc pro q reali

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$

$$= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin. q\sqrt{-1}$$

Ita

$$\frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) = \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$

$$= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos. q\sqrt{-1};$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomate dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis aequalium*; demonstraturque porro, pro casu existentis i, peripheriam radii y esse

$$= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i = 1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catheti sunt a et b, hypotenusa c, et anguli lateribus a, b, c oppositi sunt α, β, π; est (pro ($i = 1$)

in I.

$$1 : \sin. \alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$1 : \sin. \alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$1 : \sin. \alpha = -\sin. c\sqrt{-1} : -\sin. a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c\sqrt{-1} : \sin. a\sqrt{-1}.$$

In II. fit

$$\cos.\alpha : \sin.\beta = \cos.a\sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos.c\sqrt{-1} = \cos.a\sqrt{-1}\cos.b\sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin.\alpha = \sin.c : \sin.a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos.a = \sin.\beta : \cos.\alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos.c = \cos.a\cos.b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deductione (App. §. 32. post VII.) omissa offendi impedirique expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e per series expressis

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} + \cdots$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} - \cdots;$$

adeoque

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4i^4} + \cdots$$

$$= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2},$$

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \frown 0$, dum $i \frown \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4 (i^2 - k^2)},$$

quod manifesto $\frown 0$, dum $i \frown \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

sequitur (pro ω, v, λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2 i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2 i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega\right),$$

quod

$$\frown a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1 = i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i = 1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe *in superficie* (App. §. 21.) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $= 1$, qui sinus totus in F erit, peripheriæ eiusdem radius in plano erit plane dictum y; quod ad sphæram imaginariam, ad quam planum (in systemate antieuclideo) revocatur, facile applicatur.