noch eine bedingte, durch die Gleichungen (2) zu bestimmende (in 2tens von Nr. **34** näher erörterte) Lage erhalten.

Werden von diesen vier Bedingungsgleichungen nur jene (2) erfüllt, so ist die, offenbar mit der Coordinatenachse Z parallele, jedoch nicht durch den Schwerpunct gehende, Drehungsachse eine sogenannte Hauptachse des Systems oder Körpers, für welche die Centrifugalkraft sofort durch den Schwerpunct geht.

Werden allgemein (da man statt der Achse Z eben so gut die beiden andern Coordinatenachsen Y oder X als Drehungsachsen wählen kann) für irgend einen Punct A eines Systemes oder Körpers bezüglich dreier, durch diesen Punct auf einander rechtwinkelig gelegte Achsen AX, AY, AZ die drei Bedingungsgleichungen:

$$\int xy\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int xz\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int yz\,\mathrm{d}m = 0$$

erfüllt, so ist jede dieser drei Achsen eine Hauptachse des Systems. Bestehen aber ausserdem noch die drei Gleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int y\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int z\,\mathrm{d}m = 0,$$

d. h. gehen diese Coordinatenachsen zugleich durch den Schwerpunct, so gehen diese Hauptachsen in freie Achsen über.

Anmerkung. Es lässt sich beweisen, dass es in jedem Puncte eines Körpers oder festen Systemes materieller Puncte drei unter sich rechtwinkelige Hauptachsen, folglich auch (wenn dieser Punct der Schwerpunct ist) drei auf einander senkrechte freie oder natürliche Achsen gibt.

Auch besitzen die drei durch irgend einen Punct N eines Körpers gehenden Hauptachsen noch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass wenn man auf diese das Moment der Trägheit des Körpers bezieht, unter allen Trägheitsmomenten dieses Körpers, welche sich auf beliebige, durch denselben Punct N gehende Achsen beziehen, das erste ein Maximum, das zweite ein Minimum und das dritte jedoch keines von beiden ist.

Rad an der Welle.

37. Als weitere Anwendung der Kräftepaare wollen wir noch mit Hilfe derselben für das Rad an der Welle sowohl die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kraft und Last, als auch die Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Legt man durch den Punct C (Fig. 15), in welchem die Achse DE des Wellenrades von der Rad- oder Umdrehungsebene der Kraft P geschnitten wird, zwei der Kraft P gleiche, parallele und entgegengesetzt wirkende Kräfte $P' = P'' = P$, d. h.

ersetzt man die Kraft P durch die ihr gleiche und gleichgerichtete Achsenkraft P' und das Paar (P, P'') vom Arm $CA = R$ gleich dem Halbmesser des Rades (oder verschiebt man die Kraft P nach Nr. **11** aus ihrem Angriffspunct A mit sich parallel nach dem Punct C).

Verfährt man ferner eben so mit der Kraft oder Last Q, indem man durch den Durchschnittspunct C' der Umdrehungsebene der Last mit der Achse die zwei der Last Q gleiche, parallele Kräfte Q', Q'' legt oder die Kraft Q in die mit ihr gleiche, parallele Kraft Q' und das Kräftepaar (Q, Q'') vom Arm $C'B = r$, als Halbmesser der Welle, auflöst; so haben die beiden Achsenkräfte P' und Q', da sie von der Achse DE aufgehoben werden, auf die Bedingung des Gleichgewichtes keinen Einfluss, und es kommen dafür nur noch die beiden, in parallelen Ebenen liegenden, nach entgegengesetzten Richtungen drehenden Kräftepaare (P, P'') und (Q, Q''), deren Momente PR und Qr sind, in Betracht. Nun müssen aber nach Nr. 8 (Zusatz) für das Gleichgewicht diese Momente einander gleich sein, folglich erhält man als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes die bekannte Relation:

$$PR = Qr \ldots (1),$$

wobei die Entfernung CC' der beiden Drehungsebenen ohne Einfluss ist.

Um ferner auch den Druck auf jeden der beiden Zapfen D und E zu finden, so zerlege man die beiden vorhin erhaltenen Achsenkräfte P' und Q', welche hierauf Einfluss haben, jede in eine verticale und horizontale Seitenkraft; seien diese beziehungsweise p und p' für P', so wie q und q' für Q'. Ist ferner O der Schwerpunct und G das Gewicht der Maschine, so ist der gesammte Zapfendruck nach verticaler Richtung, wenn man jenen Theil, welcher auf den Zapfen D kommt, durch x, und jenen, welchen der Zapfen E aufnimmt, durch y bezeichnet, sofort:

$$x + y = p + q + G.$$

Aus den beiden horizontalen Componenten q' und p' dagegen entstehen auf diese Zapfen D und E beziehungsweise die Seitendrücke x' und y', welche weiter unten bestimmt werden.

Sind α und β die Neigungswinkel der Kraft P und Last Q gegen eine Horizontale, so hat man für die erwähnten vier Seitenkräfte:

$$p = P \, Sin\, \alpha, \; p' = P \, Cos\, \alpha, \; q = Q \, Sin\, \beta, \; q' = Q \, Cos\, \beta.$$

Ist ferner die ganze Länge $DE = l$, die Entfernung $DC' = a$, jene $DC = b$ und $DO = c$, so ist für das Gleichgewicht (E als Stützpunct genommen):

$$x \, . \, DE = q \, . \, C'E + G \, . \, OE + p \, . \, CE,$$

d. i.:

$$lx = (l - a) q + (l - c) G + (l - b) p \ldots (n);$$

ferner (D als Stützpunct angesehen):

$$y \, . \, DE = p \, . \, DC + G \, . \, DO + q \, . \, DC',$$

d. i.:

$$ly = bp + cG + aq \ldots (o),$$

aus welchen Gleichungen (n) und (o) die verticalen Drücke in D und E gefunden werden. (Beide Gleichungen addirt geben, wie es sein soll, wieder $x + y = p + q + G$.)

Um ferner auch die horizontalen Drücke x' und y' in D und E zu bestimmen, hat man eben so (für den Stützpunct E):

$$x' . DE = q' . C'E \; p' . CE,$$

d. i.:

$$l x' = (l - a) q' - (l - b) p' \ldots (p),$$

und (D als Stützpunct genommen):

$$y' . DE = p' . DC - q' . DC',$$

d. i.:

$$ly' = bp' - aq' \ldots (q),$$

aus welchen Gleichungen sofort x' und y' gefunden werden. (Dabei ist der Natur der Sache gemäss, wenn man (q) von (p) abzieht, $x' - y' = q' - p'$ oder umgekehrt $y' - x' = p' - q'$.)

Die Resultirenden s und s' aus x, x' und y, y' für die Zapfen D und E sind beziehungsweise:

$$s = \sqrt{x^2 + x'^2} \text{ und } s' = \sqrt{y^2 + y'^2}.$$

Bilden endlich diese Kräfte als die gesuchten Drücke der Zapfen in ihren Lagern mit der Horizontalen die Winkel φ und φ', so hat man noch:

$$tang\, \varphi = \frac{x}{x'} \text{ und } tang\, \varphi' = \frac{y}{y'}.$$

Wirkt wie gewöhnlich beim Rad an der Welle die Last Q nach **verticaler** Richtung, so ist wegen $\beta = 90^0$, sofort:

$$q = Q, \; q' = 0, \text{ folglich } l x' = (l - b) p' \text{ und } l y' = b p'.$$

Hat auch die Kraft P diese Richtung, so ist auch $\alpha = 90^0$ und daher:

$$p = P,\ p' = 0,\ x' = y' = 0 \text{ und } x + y = P + Q + G.$$

Anwendung der Paare auf einige Bewegungs-Erscheinungen.

38. Um schliesslich noch einige Bewegungs-Erscheinungen zu untersuchen, die sich ebenfalls am einfachsten aus den Eigenschaften der Kräftepaare erklären lassen, so wollen wir zuerst bemerken, dass wenn eine Kugel in irgend einer Richtung gestossen wird, der von der Kugel aufgenommene Stoss immer durch den Mittelpunct derselben geht.

Denn es lässt sich die Stosskraft immer in eine Componente zerlegen, welche in die an die Kugel am Stosspunct gelegten Tangentialebene fällt und sonach verloren geht, und in eine zweite darauf normale, also durch den Mittelpunct der Kugel gehende.

Es werde nun eine auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 16) ruhende Kugel vom Halbmesser $CA = r$ in der Richtung MN vorwärts gestossen und sei die durch den Mittelpunct C nach MN gerichtete Kraft (entweder die ursprüngliche oder durch Zerlegung erhaltene, wobei die darauf senkrechte zweite Componente unberücksichtigt bleibt) $= P$.

Die Kugel wird daher anfangs durch diese Kraft P eine fortschreitende Bewegung erhalten. Da sich jedoch durch die zwischen der Oberfläche der Kugel und jener der Unterlage stattfindende Reibung eine in entgegengesetzter Richtung NM wirkende Reibungskraft p entwickelt oder geltend macht; so verlege man diese nach C, d. h. man ersetze sie nach dem vorhergehenden Verfahren durch eine durch den Mittelpunct C gehende Kraft p', welcher jener p gleich, parallel und mit ihr gleich gerichtet ist, und ein Kräftepaar (p, p'') vom Arm $CA = r$. Dadurch wird aber die vorige Kraft P der progressiven Bewegung beständig um die Kraft $p' = p$ vermindert und endlich auf Null gebracht, während das Paar (p, p''), dessen Moment $= pr$ ist, eine (in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung) Drehung der Kugel nach vorwärts erzeugt.