vermeiden hat, so erkennt man leicht, wie wichtig bei drehenden Bestandtheilen, wie Räder, Scheiben u. s. w., das richtige Centriren der betreffenden Massen ist.

## Eigenschaften der freien und Hauptachsen.

**35.** Um diese Achsen noch speciell in's Auge zu fassen, so folgt aus den bisherigen Entwickelungen, dass man bei der Definition der freien oder sogenannten natürlichen Achsen von einem doppelten Gesichtspuncte ausgehen könne. Man kann nämlich erstens die Frage stellen, um welche Achse ein Körper oder festes System materieller Puncte sich drehen müsse, damit die in demselben thätigen Tangentialkräfte $p = rw\,\mathrm{d}m$ sich auf ein einziges Kräftepaar $L$ reducire, dessen Ebene auf dieser Achse senkrecht steht? oder sich zweitens die Aufgabe stellen, jene Drehungsachse zu finden, auf welche bezogen die entstehenden Centrifugalkräfte $f = rw^2\,\mathrm{d}m$ sich gegenseitig aufheben oder im Gleichgewichte halten; denn in beiden Fällen hat die Drehungsachse keinen Druck zu erleiden, also auch keinen Widerstand zu leisten, und das System bewegt sich, auch wenn es vollkommen frei ist, um diese genau so, als ob die Achse fest wäre, d. h. sie wird weder irgend eine fortschreitende Bewegung annehmen, noch sonst, wenn sie auch durch Nichts gehalten ist, ihre Lage gegen den Körper oder das System verändern; endlich wird, dieses System einmal um diese Achse in drehende Bewegung versetzt, und wenn keine äussern Kräfte auf dasselbe einwirken, dabei die Winkelgeschwindigkeit $w$ constant, also die drehende Bewegung eine gleichförmige.

**36.** Man mag nun die Umdrehungsachse nach der einen oder andern der beiden Bedingungen bestimmen, so kommt man in beiden Fällen (Nr. **29**, Zusätze 1 und 2 und Nr. **33**, Zusatz) zu den Bedingungsgleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0,\ \int y\,\mathrm{d}m = 0\ldots(1)$$

und

$$\int xz\,\mathrm{d}m = 0,\ \int yz\,\mathrm{d}m = 0\ldots(2),$$

wenn nämlich die Coordinatenachse $Z$ die gesuchte Drehungsachse ist.

Diese gesuchte Achse muss also erstlich (wegen Relat. (1)) durch den Schwerpunct des Systemes gehen und ausserdem noch eine bedingte, durch die Gleichungen (2) zu bestimmende (in 2tens von Nr. **34** näher erörterte) Lage erhalten.

Werden von diesen vier Bedingungsgleichungen nur jene (2) erfüllt, so ist die, offenbar mit der Coordinatenachse $Z$ parallele, jedoch nicht durch den Schwerpunct gehende, Drehungsachse eine sogenannte Hauptachse des Systems oder Körpers, für welche die Centrifugalkraft sofort durch den Schwerpunct geht.

Werden allgemein (da man statt der Achse $Z$ eben so gut die beiden andern Coordinatenachsen $Y$ oder $X$ als Drehungsachsen wählen kann) für irgend einen Punct $A$ eines Systemes oder Körpers bezüglich dreier, durch diesen Punct auf einander rechtwinkelig gelegte Achsen $AX$, $AY$, $AZ$ die drei Bedingungsgleichungen:

$$\int xy\,dm = 0,\quad \int xz\,dm = 0,\quad \int yz\,dm = 0$$

erfüllt, so ist jede dieser drei Achsen eine Hauptachse des Systems. Bestehen aber ausserdem noch die drei Gleichungen:

$$\int x\,dm = 0,\quad \int y\,dm = 0,\quad \int z\,dm = 0,$$

d. h. gehen diese Coordinatenachsen zugleich durch den Schwerpunct, so gehen diese Hauptachsen in freie Achsen über.

Anmerkung. Es lässt sich beweisen, dass es in jedem Puncte eines Körpers oder festen Systemes materieller Puncte drei unter sich rechtwinkelige Hauptachsen, folglich auch (wenn dieser Punct der Schwerpunct ist) drei auf einander senkrechte freie oder natürliche Achsen gibt.

Auch besitzen die drei durch irgend einen Punct $N$ eines Körpers gehenden Hauptachsen noch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass wenn man auf diese das Moment der Trägheit des Körpers bezieht, unter allen Trägheitsmomenten dieses Körpers, welche sich auf beliebige, durch denselben Punct $N$ gehende Achsen beziehen, das erste ein Maximum, das zweite ein Minimum und das dritte jedoch keines von beiden ist.

## Rad an der Welle.

**37.** Als weitere Anwendung der Kräftepaare wollen wir noch mit Hilfe derselben für das Rad an der Welle sowohl die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kraft und Last, als auch die Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Legt man durch den Punct $C$ (Fig. 15), in welchem die Achse $DE$ des Wellenrades von der Rad- oder Umdrehungsebene der Kraft $P$ geschnitten wird, zwei der Kraft $P$ gleiche, parallele und entgegengesetzt wirkende Kräfte $P' = P'' = P$, d. h.