Rotation eines Körpers um eine Achse *).

28. Eine weitere wichtige Anwendung finden die Kräftepaare in der Theorie der drehenden Bewegung eines Körpers um irgend eine Achse.

Es sei, um diese Anwendung zu zeigen, von den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen X, Y, Z (Fig. 22), auf welche wir die materiellen Puncte eines rotirenden Körpers beziehen wollen, jene Z die Rotationsachse, ferner sei w die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung (zugleich das Mass dieser Bewegung), so wie für irgend einen materiellen Punct $\mathrm{d}m$ des rotirenden Körpers x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten, und r der Abstand dieses Punctes von der Drehachse Z. Dies vorausgesetzt, besitzt der materielle Punct $\mathrm{d}m$ die Geschwindigkeit rw und zwar nach der Richtung der Tangente des Kreises vom Radius r, nach welcher dieses Massentheilchen durch eine Kraft p, deren Mass (Nr. **131**, 3.) $rw\,\mathrm{d}m$ ist, wie von der Ruhe aus getrieben oder in Bewegung gesetzt wird.

Auf dieselbe Weise werden alle materiellen Theilchen oder Puncte des Körpers durch ähnliche Kräfte $wr\,\mathrm{d}m$ getrieben oder bewegt, welche ihren Massen $\mathrm{d}m$ und Abständen r von der Rotationsachse proportional sind, und deren Richtungen zugleich auf diesen Geraden r und der Achse Z perpendikulär stehen.

29. Zerlegen wir nun, um diese Kräftenelemente auf andere Kräfte zu reduciren, welche mit ihnen gleichgeltend sind, d. i. die nämliche rotirende Bewegung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit w hervorbringen können, die genannte Kraft $p = wr\,\mathrm{d}m$ in drei auf einander senkrechte Seitenkräfte und zwar nach den Richtungen der Coordinatenachsen; so erhält man, wenn diese Componenten beziehungsweise durch X', Y', Z' bezeichnet werden, wie leicht zu sehen:

$$X' = wy\,\mathrm{d}m,\quad Y' = -\,wx\,\mathrm{d}m,\quad Z' = 0.$$

Verlegt man jetzt diese Kräfte mit sich parallel in den Anfangspunct A der Coordinaten, so erhält man nach dem Vor-

---

*) Mit Benützung der trefflichen Poinsot'schen Abhandlung: „*Théorie nouvelle de la Rotation des corps.*“ (*Paris* 1852.)

gange in Nr. **13** (wobei $P\,Cos\,\alpha = X'$, $P\,Cos\,\beta = Y'$, $P\,Cos\,\gamma = Z'$, $\Sigma(P\,Cos\,\alpha) = \int w\,y\,\mathrm{d}m$, $\Sigma(P\,Cos\,\beta) = -\int w\,x\,\mathrm{d}m$ und $\Sigma(P\,Cos\,\gamma) = 0$ ist) für's Erste die im Puncte A nach den Achsen X und Y wirkenden Kräfte:

$$X' = w\,y\,\mathrm{d}m,\quad Y' = -\,w\,x\,\mathrm{d}m,$$

und dann drei Kräftepaare L', M', N' beziehungsweise parallel mit den Ebenen der xy, xz, yz, deren Momente durch (Nr. **14**, Relation (e)):

$$X'y - Y'x,\quad Z'x - X'z,\quad Y'z - Z'y$$

ausgedrückt sind. Setzt man für X', Y', Z' die Werthe, so reduciren sich diese drei Paare oder deren Momente auf:

$$L' = w(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = w\,r^2\,\mathrm{d}m,\quad M' = -\,w\,y\,z\,\mathrm{d}m,\quad N' = -\,w\,x\,z\,\mathrm{d}m.$$

Verfährt man nun auf dieselbe Weise mit den sämmtlichen Kräften $w\,r\,\mathrm{d}m$ des Systemes der materiellen Puncte des rotirenden Körpers, so reduciren sich diese

1. auf die beiden im Puncte A angreifenden und nach AX und AY wirksamen Kräfte $X = w\int y\,\mathrm{d}m$ und $Y = -\,w\int x\,\mathrm{d}m$, deren Resultirende R auf der Achse AZ perpendikulär steht und die Grösse hat (analog mit R in Nr. **13**, Relat. (a)):

$$R = w\sqrt{(\int x\,\mathrm{d}m)^2 + (\int y\,\mathrm{d}m)^2}\ \ldots (1),$$

oder auch, wenn man die Länge des aus dem Schwerpunct O des Körpers von der Masse m auf die Umdrehungsachse AZ gefällten Perpendikels mit δ bezeichnet:

$$R = w\,m\,\delta\ \ldots (1')$$

(wegen, Stat. Nr. **32**, $x_1 m = \int x\,\mathrm{d}m$, $y_1 m = \int y\,\mathrm{d}m$ und $\delta^2 = x_1^2 + y_1^2$);

2. auf die beiden Paare $M = -\,w\int y\,z\,\mathrm{d}m$, $N = -\,w\int x\,z\,\mathrm{d}m$, welche beziehungsweise in mit den coordinirten Ebenen xz und yz parallelen Ebenen liegen und sich daher nach Nr. **8**, Zusatz, in diese coordinirten Ebenen selbst verlegen und sonach zu Einem Paar K vereinigen lassen, welches in einer durch AZ gehenden Ebene liegt; dieses resultirende Paar hat (Nr. **9** Zusatz, Relat. (1') wegen $\alpha = 90^0$) die Grösse:

$$K = w\sqrt{(\int x\,z\,\mathrm{d}m)^2 + (\int y\,z\,\mathrm{d}m)^2}\ \ldots (2);$$

und endlich

3. auf das in einer mit xy parallelen Ebene liegende, also auf der Achse AZ perpendikulären Kräftepaar, dessen Moment

$$L = w\int(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = w\int r^2\,\mathrm{d}m\ \ldots (3)$$

ist.

Nimmt man daher die fünf Integrale $\int x\,\mathrm{d}m$, $\int y\,\mathrm{d}m$, $\int xz\,\mathrm{d}m$, $\int yz\,\mathrm{d}m$ und $\int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$ innerhalb jener Grenzen, welche sich auf den ganzen rotirenden Körper beziehen, so lassen sich aus den vorigen Relationen (1), (2), (3) die Werthe der Kraft R und der Paare K, L vollständig bestimmen, welche Kräfte R, K, L zusammen genau auch die in Rede stehende Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit w erzeugen können.

Zusatz 1. Geht die Umdrehungsachse AZ durch den Schwerpunct des Körpers, so ist $\int x\,\mathrm{d}m = 0$ und $\int y\,\mathrm{d}m = 0$, folglich auch (Relat. (1)) $R = 0$.

In diesem Falle reduciren sich daher die sämmtlichen Kräfte auf die beiden Paare K und L in (2) und (3), welche sich übrigens (wieder nach Nr. **9**, Zusatz, wobei ebenfalls $\alpha = 90^0$ ist) zu einem Paare J vereinigen lassen, dessen Grösse oder Moment

$$J = \sqrt{K^2 + L^2} \ldots (4)$$

ist; hieraus folgt daher, dass sich die Kräfte, welche im Stande sind einen Körper um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse zu drehen, immer auf ein Kräftepaar reduciren lassen.

Dabei kann noch bemerkt werden, dass dieses Paar J im Allgemeinen nicht auf der Achse AZ perpendikulär steht, indem (Nr. **9**, Zusatz, Relat. (2')) diese Paarebene mit der Achse AZ einen Winkel φ bildet, dessen Cosinus

$$Cos\,\varphi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} \ldots (5)$$

ist, und welcher daher nur für $K = 0$ verschwinden kann.

Zusatz 2. Ist als specieller Fall die Rotationsachse AZ eine sogenannte Hauptachse des Körpers, so sind dafür die Momente:

$$\int xz\,\mathrm{d}m = 0 \text{ und } \int yz\,\mathrm{d}m = 0 \ldots (6),$$

folglich ist auch (Relat. (2)) das Paar $K = 0$, und es reduciren sich die sämmtlichen Kräfte auf das einzige Paar $J = L = w \int r^2\,\mathrm{d}m$, welches jetzt (Relat. (5)) auf der Rotationsachse perpendikulär steht;

die Kräfte also, welche einen Körper um eine seiner Hauptachsen drehen können, lassen sich immer auf ein Paar reduciren, dessen Ebene auf dieser Achse perpendikulär ist.

Da sich nun aber auch wieder umgekehrt irgend ein auf einer Hauptachse eines freien Körpers perpendikulär stehendes Paar L in Elementarkräfte $w\,r\,\mathrm{d}m$ zerlegen lässt, welche im Stande sind, denselben mit der Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{L}{\int r^2 \mathrm{d}m} = \frac{L}{\mu}$$

um diese Achse zu drehen, so folgt auch (wegen $\int r^2 \mathrm{d}m = \mu$ Dynamik Nr. **135**):

dass wenn an einem freien Körper ein Kräftepaar angebracht ist, dessen Ebene auf einer seiner Hauptachsen perpendikulär steht, dasselbe den Körper um diese Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, welche gleich ist dem Momente dieses Paares, dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf dieselbe Achse.

Anmerkung. Wirkt also ein Kräftepaar J auf einen freien Körper in irgend einer Ebene desselben, so lässt sich die dadurch hervorgebrachte Drehung mit Hilfe des letzten Satzes leicht bestimmen. Denn zerlegt man das gegebene Paar J in die drei Paare L, M, N beziehungsweise senkrecht auf die drei Hauptachsen des Körpers, und bezeichnet man das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf diese Achsen respective mit μ_1, μ_2, μ_3, so wie die Winkelgeschwindigkeiten der betreffenden Rotationen durch w_1, w_2, w_3, so hat man:

$$w_1 = \frac{L}{\mu_1}, \quad w_2 = \frac{M}{\mu_2}, \quad w_3 = \frac{N}{\mu_3}$$

und wenn man diese drei Rotationen wieder in Eine w zusammensetzt, so erhält man sowohl die Achse als auch die Grösse der Rotation, welche das gegebene Paar J im ersten Augenblicke in dem als ruhend gedachten Körper zu erzeugen streben.

30. Aus den bisherigen Entwickelungen ergeben sich nun die beiden wichtigen Folgerungen:

1. Lässt sich ganz einfach die Kraft R und das Paar J finden, welche zusammen im Stande sind, irgend eine gegebene Bewegung zu erzeugen. Denn wie diese Bewegung auch immer sein mag, so kann man sie stets so ansehen, als wäre sie aus zweien zusammengesetzt, nämlich aus einer progressiven oder translatorischen, welche der Bewegung des Schwerpunctes des Körpers gleich und parallel ist, und einer rotirenden Bewegung um eine durch diesen Schwerpunct gehenden

Achse. Man braucht daher die Kraft R nur so zu wählen, dass sie die erstere Bewegung, und das Paar J so anzunehmen, dass es die letztere Bewegung hervorbringen kann.

2. Wirken umgekehrt beliebig viele Kräfte auf einen Körper, so denke man sich dieselben sämmtlich mit sich parallel in den Schwerpunct des Körpers verlegt, so setzen sie sich zu einer einzigen Kraft, so wie die entstehenden Paare zu einem einzigen Paar J zusammen.

Die im Schwerpuncte angebrachte Resultirende R sucht in den sämmtlichen materiellen Puncten des Körpers die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $v = \frac{R}{m}$ nach der Richtung dieser Kraft R zu erzeugen, während das Kräftepaar J das Bestreben hat, in dem Körper eine Drehbewegung w um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse AZ hervorzubringen, deren Lage nach dem Obigen bestimmt werden kann.

Centrifugalkraft.

31. Um ferner auch die Centrifugalkräfte eines rotirenden Körpers zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dass durch diese drehende Bewegung (wobei jedes materielle Theilchen dm des Körpers die Kraft $rw\,\mathrm{d}m$ besitzt oder durch diese gleichsam animirt oder getrieben wird) in jedem materiellen Punct dm in jedem Augenblick eine unendlich kleine Kraft f, die sogenannte Centrifugalkraft entsteht oder erzeugt wird, welche dieses Theilchen vom Mittelpunct des betreffenden Kreises zu entfernen strebt.

Würde das materielle Theilchen dm, dieses als vollkommen frei gedacht, blos von der einzigen Kraft $p = v\,\mathrm{d}m$ nach der Tangente eines Kreises getrieben, so könnte dasselbe auch nicht den kleinsten Theil des Kreisbogens zurücklegen, wenn es nicht jeden Augenblick durch eine bestimmte Kraft, die sogenannte Centripetalkraft, gegen den Mittelpunct des Kreises gezogen und so auf dessen Peripherie erhalten würde, indem ohne diese Kraft das Theilchen mit der erlangten Geschwindigkeit v nach der Tangente fortgehen und sich sonach vom genannten Mittelpuncte entfernen würde.

Da die Centripetalkraft, welche der Centrifugalkraft gleich