dem eben angedeuteten Verfahren diese Kraft P in die drei Kräfte P, P', P'' auflöst, das Paar (P, P'') auf O keinen Druck, sondern blos das Bestreben zu einer Drehung, welche nur durch ein in derselben Ebene wirkendes Paar $Qb = Pa$ aufgehoben werden kann, äussern, während ein Druck auf den Punct O durch die Kraft $P' = P$ in einer mit der Kraft P parallelen Richtung erzeugt wird.

Anwendungen.

12. Um von den bisher entwickelten Eigenschaften und Sätzen der Kräftepaare einige Anwendungen zu zeigen, so wollen wir zuerst zwei in derselben Ebene liegende Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ betrachten, welche gleiche Momente $Pa = Qb$ und entgegengesetzte Drehrichtungen haben, und so angeordnet sind, wie es aus Fig. 12 zu ersehen.

Da in diesem Falle (Nr. 5) Gleichgewicht besteht und die in C wirkende Kraft $P + Q = R$ der Resultante aus den beiden in A und B wirkenden parallelen Kräften P, Q gleich und entgegengesetzt ist; so folgt, dass die Resultirende aus zwei parallelen Kräften der Summe dieser Kräfte gleich und mit diesen parallel ist, und dass ferner jede beliebig gezogene Gerade $A'B'$ von den drei parallelen Kräften, wegen (nach der Voraussetzung) $Pa = Qb$, oder

$$P : Q : P + Q = b : a : a + b,$$

im Verhältniss von

$$b' : a' : a' + b' = P : Q : R$$

geschnitten wird. (Vergleiche §. 20.)

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies System von Angriffspuncten.

13. In einem freien Systeme von n Puncten M, M_1, M_2 . . . (Fig. 13) wirken die Kräfte P, P_1, P_2 . . . nach beliebigen Richtungen; die Coordinaten dieser Angriffspuncte auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem AX, AY, AZ bezogen, seien der Reihe nach x, y, z, $x_1 y_1 z_1$ u. s. w., so wie die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 . . . mit den Axen der x, y, z bilden, beziehungsweise α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w.

Betrachtet man nun zuerst die Kraft P an ihrem Angriffspunct M, so kann man diese, wenn man durch den Ursprung A der Coordinaten zwei mit P gleiche und parallele entgegengesetzt wirkende Kräfte P', P'' hinzufügt, diese Kraft P ohne Aenderung nach Nr. **11** in eine Kraft P', welche in A angreift und ein Paar (P, P'') mit den Angriffspuncten M und A auflösen.

Verfährt man auf gleiche Weise auch mit den übrigen Kräften P_1, $P_2 \ldots$, so entstehen:

1. n Kräfte im Puncte A wirksam, welche den gegebenen gleich und parallel sind, und mit ihnen dieselbe Richtung haben;

2. n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich sind und den Punct A, so wie beziehungsweise die Puncte M, $M_1 \ldots$ als Angriffspuncte haben.

Die Resultante der in A wirksamen n Kräfte P, P_1, $P_2, \ldots$ ist aber (Statik Nr. **14**):

$$R = \sqrt{(\Sigma P \, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \beta)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \gamma)^2} \ldots (a),$$

so wie ihre Lage oder Richtung aus den Relationen:

$$Cos\, a = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \alpha)}{R}, \quad Cos\, b = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \beta)}{R}, \quad Cos\, c = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \gamma)}{R} \ldots (b)$$

bestimmt wird, wenn a, b, c die Winkel der Resultante mit den Axen der x, y, z bezeichnen.

Was ferner die n Kräftepaare $(P, -P)$, $(P_1, -P_1) \ldots$ betrifft, so lassen sich diese (Nr. **9**, Anmerk.) immer zu einem Paar Q vereinigen und es kommt jetzt nur noch darauf an, die Grösse von Q zu bestimmen.

14. Zu diesem Behufe zerlege man zuerst die zu dem Paare P (in A und M wirksam) gehörigen Kräfte in drei Componenten nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinatenaxen x, y, z; werden diese beziehungsweise durch p, q, r bezeichnet, so sind diese:

$$p = P \, Cos\, \alpha, \quad q = P \, Cos\, \beta, \quad r = P \, Cos\, \gamma \ldots (c).$$

Dadurch entstehen aber drei Kräftepaare $(p, -p)$, $(q, -q)$, $(r, -r)$ mit den Angriffspuncten M und A und den Momenten $p \cdot AE$, $q \cdot AF$, $r \cdot AC$, d. i.:

$$P \, Cos\, \alpha \sqrt{y^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \beta \sqrt{x^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \gamma \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (d).$$

Bringt man jetzt in den Puncten B und C der Geraden BC nach ihrer Richtung zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte $p'' = p' = p$ an, wodurch in dem Systeme nichts geändert wird, vereinigt die Kraft p in A mit p' in C, so wie die Kraft p in

M mit jener p'' in B zu einem Paar; so hat man das in A und M wirksame Paar $p\,.\,AE$ in die zwei ebengenannten Paare (p, p'), (p, p''), d. i. in die Paare py und pz aufgelöst oder zerlegt.

Auf dieselbe Weise kann man das Kräftepaar $q\,.\,AF$ in die beiden Paare qx (in A und C) und qz (in M und D), so wie das Kräftepaar $r\,.\,AC$ in die beiden äquivalenten Paare rx (in A und F) und ry (in D und M) auflösen (wenn man nämlich beziehungsweise in C und D $q' = q'' = q$ in der Geraden CD, und in F und D nach der Geraden FD die Kräfte $r' = r'' = r$ in entgegengesetzter Richtung anbringt).

Durch diese Zerlegungen haben wir daher anstatt der vorigen drei Kräftepaare, ausgedrückt in Relat. (d), die sechs Paare:

$$py,\ qx,\ rx,\ pz \text{ und } qz,\ ry.$$

Von diesen liegen das 1. und 2. Paar in der Ebene der xy, das 3. und 4. Paar in der Ebene der xz und einer mit dieser parallelen Ebene, so wie das 5. und 6. Paar in einer mit der Ebene der yz parallelen Ebene.

Verlegt man, was nach Nr. 8, Zusatz, für Paare in parallelen Ebenen gestattet ist, das 4. Paar in die Ebene der xz, so wie das 5. und 6. Paar in jene der yz und versieht die sämmtlichen Paare nach Nr. 2, f) mit ihren Vorzeichen, indem man die Richtung von der Seite der positiven x gegen jene der positiven z, von da zu den positiven y und von da zurück zu den positiven x als die rechtsdrehende, mithin die entgegengesetzte als die linksdrehende nimmt; so hat man statt der im Puncte M angreifenden Kraft, ausser jener bereits berücksichtigten durch A gehenden gleichen Kraft P', die in den drei coordinirten Ebenen der xy, xz und yz liegenden Paare (diese beziehungsweise von den positiven z, y und x aus betrachtet), d. i. ihre Momente:

$$py - qx,\quad rx - pz \text{ und } qz - ry,$$

oder wenn man für p, q, r die obigen Werthe (c) setzt, auch:

$$Py \operatorname{Cos}\alpha - Px \operatorname{Cos}\beta,\ Px \operatorname{Cos}\gamma - Pz \operatorname{Cos}\alpha,\ Pz \operatorname{Cos}\beta - Py \operatorname{Cos}\gamma \,..\, (e).$$

Verfährt man nun, wie es mit dem Kräftepaar P geschehen, eben so auch mit den übrigen Paaren P_1, P_2..., so erhält man schliesslich durch gehörige Vereinigung die drei beziehungsweise in den Ebenen der xy, xz, yz liegenden Kräftepaare L, M, N, deren Werthe sind:

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma[P(y\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \beta)] \\ M &= \Sigma[P(x\ Cos\ \gamma - z\ Cos\ \alpha)] \\ N &= \Sigma[P(z\ Cos\ \beta - y\ Cos\ \gamma)] \end{aligned}\right\} \ldots (f).$$

Werden nun in gegebenen speciellen Fällen diese drei Kräftepaare nach dem in Nr. **9** angegebenen Verfahren zusammengesetzt, so erhält man das genannte resultirende Kräftepaar Q, dessen Ebene sofort durch den Ursprung A geht.

Liegt, als besonderer Fall, die Resultante R (Relat. (a)) in der Ebene dieses Paares Q oder mit dessen Ebene parallel, so lässt sich die Kraft R nach Nr. **10** mit diesem Paar Q vereinigen und man erhält dadurch eine Kraft $R' = R$, welche mit R parallel und gleich gerichtet ist, jedoch einen andern Angriffspunct besitzt.

Ausser diesem besonders günstigen Fall würden sich die n Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ des Systemes blos durch eine Kraft R und ein Kräftepaar Q ersetzen lassen.

15. Für das vollständige Gleichgewicht muss sowohl $R = 0$ als auch $Q = 0$ sein; daraus folgen die Bedingungsgleichungen (Relat. (a) und (f)):

$$\Sigma(P\ Cos\ \alpha) = 0,\ \Sigma(P\ Cos\ \beta) = 0,\ \Sigma(P\ Cos\ \gamma) = 0$$

und $$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

(Vergleiche Statik Nr. **20**, Anmerk. 2, Relat. (s).)

Finden von diesen sechs Bedingungsgleichungen blos die drei ersten Statt, so besteht blos hinsichtlich der fortschreitenden, keineswegs aber auch bezüglich der drehenden Bewegung Gleichgewicht.

Bestehen dagegen blos die drei letztern Bedingungsgleichungen, ist also R nicht Null, so findet zwar keine drehende, wohl aber eine fortschreitende Bewegung Statt.

16. Sind, als specieller Fall, die sämmtlichen Kräfte zu einander parallel und wirken diese theils nach einer, theils nach der entgegengesetzten Richtung; so sind die Winkel α für die in derselben Richtung wirkenden Kräfte einander gleich, dagegen gehen sie für die entgegengesetzt wirkenden Kräfte in die Supplementwinkel über; dasselbe gilt auch für die Winkel β und γ.

Hat nun z. B. die Kraft P_r gegen die übrigen die entgegengesetzte Richtung, so geht dafür die Componente $P_r\ Cos\ \alpha_r$ in $P_r\ Cos\ (180^0 - \alpha_r) = - P_r\ Cos\ \alpha_r$, gerade so über, als ob man den

Winkel α_r als spitz beibehalten, dafür aber die Kraft P_r negativ genommen hätte. Ueberträgt man daher einfach die verschiedenen Zeichen der Cosinus auf die Kräfte selbst, wodurch also $\Sigma(P)$ im algebraischen Sinne zu verstehen ist; so hat man aus Nr. **13**, Relat. (a):

$$R = \sqrt{(\Sigma P)^2 \, Cos\, \alpha^2 + (\Sigma P)^2 \, Cos\, \beta^2 + (\Sigma P)^2 \, Cos\, \gamma^2} =$$
$$\Sigma(P) \sqrt{Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2},$$

oder wegen $Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2 = 1$ (Comp. §. 580) auch:

$$R = \Sigma(P) \ldots (g),$$

d. h. die Resultante ist gleich der algebraischen Summe aus den parallelen Kräften.

Ferner ist, Nr. **13**, Relat. (b):

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \alpha}{\Sigma(P)}, \quad Cos\, b = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \beta}{\Sigma(P)}, \quad Cos\, c = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \gamma}{\Sigma(P)},$$

d. i. $\quad Cos\, a = Cos\, \alpha, \quad Cos\, b = Cos\, \beta, \quad Cos\, c = Cos\, \gamma,$

oder: $\quad a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma,$

d. h. die Resultirende R ist mit den gegebenen Kräften parallel.

Was ferner die Relationen (f) (Nr. **14**) betrifft, so gehen sie für diesen Fall, wegen $Cos\, \alpha_1 = Cos\, \alpha_2 \ldots = Cos\, \alpha$, $Cos\, \beta_1 = Cos\, \beta_2 = \ldots = Cos\, \beta$ und $Cos\, \gamma_1 = Cos\, \gamma_2 = \ldots = Cos\, \gamma$ über in:

$$\left.\begin{aligned} L &= Cos\, \alpha\, \Sigma(Py) - Cos\, \beta\, \Sigma(Px) \\ M &= Cos\, \gamma\, \Sigma(Px) - Cos\, \alpha\, \Sigma(Pz) \\ N &= Cos\, \beta\, \Sigma(Pz) - Cos\, \gamma\, \Sigma(Py) \end{aligned}\right\} \ldots (h).$$

17. Die durch das in Nr. **13** eingeschlagene Verfahren entstehenden n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich und parallel sind, fallen im vorliegenden speciellen Fall in Ebenen, welche sich sämmtlich in einer mit den Kräften parallelen Geraden AS schneiden, daher liegt auch (Nr. **9**) das resultirende Paar Q in einer durch diese Gerade AS gehenden Ebene; da nun aber die im Puncte A angreifende Resultante R ebenfalls mit AS zusammenfällt, so liegt diese Kraft mit dem Paar Q in einerlei Ebene und lässt sich daher (Nr. **10**) mit diesem Paare Q vereinigen.

Verwandelt man nämlich, wie es in Nr. **10** angedeutet, das Paar in ein gleichgeltendes von der Kraft R, setzt also

$$Q = Rr \ldots (i)$$

und verschiebt das letztere oder neue Paar so, dass dadurch die in A angreifende Mittelkraft R aufgehoben wird, so bleibt als neue Resultirende eine Kraft R' übrig, welche der Mittelkraft R gleich, mit ihr parallel und gleich gerichtet ist, nur hat diese jetzt einen andern Angriffspunct O.

Um diesen Angriffs- oder Mittelpunct der parallelen Kräfte zu bestimmen, seien X, Y, Z dessen Coordinaten. Zerlegt man die durch diesen Punct gehende Mittelkraft R in drei Seitenkräfte parallel mit den rechtwinkeligen Coordinaten-Axen und verfährt mit diesen letztern genau so, wie dies in Nr. **14** mit den Componenten p, q, r geschehen; so erhält man drei Kräftepaare, welche in den coordinirten Ebenen der xy, xz, yz liegen, und zwar sind diese (analog mit den Relat. (e) in Nr. **14**) beziehungsweise:

$$\left.\begin{array}{l} RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta,\quad RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma \end{array}\right\}\ldots(k).$$

Da nun die Kräftepaare Q und Rr (vorige Relation (i)) einander gleich sind, so müssen es auch ihre in einerlei Ebene liegenden Componenten sein, d. i. es müssen die vorigen Ausdrücke (k) den obigen von L, M, N (Relat. (h)) gleich sein; man hat daher die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta &= Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px), \\ RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha &= Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) - Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz), \\ RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma &= Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py), \end{aligned}$$

aus welchen sofort die Coordinaten X, Y, Z zu bestimmen sind.

Multiplicirt man zu diesem Behufe die erste dieser Gleichungen mit $Cos\,\gamma$, die zweite mit $Cos\,\beta$ und addirt dann beide Producte, so entsteht die mit $Cos\,\alpha$ multiplicirte dritte Gleichung mit entgegengesetztem Zeichen, oder es ist überhaupt, wenn man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $Cos\,\gamma$, $Cos\,\beta$, $Cos\,\alpha$ multiplicirt, die Summe aus je zweien immer gleich der dritten mit entgegengesetztem Zeichen, so, dass man eigentlich nur zwei verschiedene oder unabhängige Gleichungen hat, indem die dritte nur eine Folge der beiden andern ist.

Benützt man daher blos die beiden ersten Gleichungen und bringt diese auf die Form:

$$\begin{aligned} [RX - \Sigma(Px)]\,Cos\,\beta + [\Sigma(Py) - RY]\,Cos\,\alpha &= 0, \\ [RZ - \Sigma(Pz)]\,Cos\,\alpha + [\Sigma(Px) - RX]\,Cos\,\gamma &= 0, \end{aligned}$$

so sieht man sogleich, dass wenn die Kräfte P und ihre Coordinaten x, y, z ihre Unabhängigkeit und Allgemeinheit behalten sollen, diese Gleichungen nur Null werden können, indem jeder einzelne Summand Null wird. Da ferner von den beiden Factoren dieser Summanden jener $Cos\,\alpha$ oder $Cos\,\beta$ oder $Cos\,\gamma$ im Allgemeinen nicht Null ist, so muss es sofort der andere sein; dadurch erhält man endlich die drei verschiedenen Bedingungsgleichungen:

$$RX - \Sigma(Px) = 0,\quad RY - \Sigma(Py) = 0,\quad RZ = \Sigma(Pz)$$

und daraus die gesuchten Coordinaten, wegen $R = \Sigma(P)$ (Relat. (g)):

$$X = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad Y = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad Z = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \ldots (l).$$

(Man vergleiche Statik Nr. **15**.)

18. Findet in dem Systeme der parallelen Kräfte vollständiges Gleichgewicht Statt, so muss, da ein Kräftepaar Q mit einer einzelnen Kraft R nicht im Gleichgewichte, also $Q + R$ nur Null sein kann, wenn sowohl $R = 0$ als $Q = 0$ ist; so folgt, dass wegen $R = \Sigma(P) = 0$ für's Erste, damit keine fortschreitende Bewegung Statt hat, die algebraische Summe der Kräfte Null sein muss.

Was die zweite Bedingungsgleichung $Q = 0$ betrifft, welche sich auf das Drehbestreben des Systemes bezieht, so zerfällt diese (Relat. (h) Nr. **16**) in die drei folgenden: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so dass man also für das vollständige Gleichgewicht scheinbar die vier Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0,\quad Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px) = 0,$$
$$Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) - Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz) = 0,\quad Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py) = 0$$

erhält, allein da von diesen drei letztern Gleichungen, wie bereits bemerkt, jede eine Folge der beiden übrigen ist, so reduciren sich diese eigentlich auf drei, d. i. auf $R = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Wird von diesen Bedingungen blos die erste erfüllt, so findet zwar keine progressive, wohl aber eine drehende Bewegung statt, bestehen blos die beiden letztern Bedingungsgleichungen, so hat das System keine drehende, dafür aber eine fortschreitende Bewegung. Im erstern Falle reducirt sich das System der Kräfte auf ein Paar, und es besitzt dann keinen Mittelpunct der Kräfte.

19. Wählt man das rechtwinkelige Coordinatensystem so, dass die Kräfte mit einer, z. B. mit der Achse der z parallel laufen, folglich auf der Ebene der xy perpendikulär stehen, so folgen für das Gleichgewicht aus den vorigen Relationen, wegen $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ und $\gamma = 0$, die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(P) = 0,\\ \Sigma(Px) = 0,\ \ \Sigma(Py) = 0\end{array}\right\}\ldots(m),$$

d. h. es muss sowohl die algebraische Summe der Kräfte, als auch jene der Momente auf zwei sich rechtwinkelig schneidenden mit den Kräften parallelen Ebenen Null sein.

20. Wirken die sämmtlichen parallelen Kräfte nach ein und derselben Richtung, so ist ihre Resultirende $R = \Sigma(P)$ gleich der Summe der Kräfte, und ihr Angriffspunct liegt im Mittelpunct der Kräfte, dessen Coordinaten aus den obigen Relationen (l) gefunden werden.

Sind sämmtliche n Kräfte einander gleich, so ist

$$R = \Sigma(P) = nP,$$

$$X = \frac{P\Sigma(x)}{nP} = \frac{1}{n}\Sigma(x),\ \ Y = \frac{1}{n}\Sigma(y),\ \ Z = \frac{1}{n}\Sigma(z),$$

und es heisst in diesem Falle der Angriffspunct X, Y, Z Mittelpunct der mittlern Abstände.

21. Aus dem oben in Nr. **13** und ferner behandelten allgemeinen Falle der wirkenden Kräfte im Raume lassen sich auch leicht die Relationen und Bedingungen für den besondern Fall ableiten, in welchem die sämmtlichen, übrigens in dieser nach beliebigen Richtungen wirkenden n Kräfte in einer Ebene liegen.

Nimmt man nämlich diese Ebene zu einer der coordinirten, z. B. zur Ebene der xy, so erhält man aus den Relationen (a) und (b) in Nr. **13** wegen $z = z_1 = z_2 = \ldots = 0$ und $\gamma = 90^0$, sofort:

$$R = \sqrt{(\Sigma P\, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P\, Cos\, \beta)^2},$$

und

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P\, Cos\, \alpha)}{R},\ \ Cos\, b = \frac{\Sigma(P\, Cos\, \beta)}{R}.$$

Da ferner hier das Kräftepaar Q mit jenem L zusammenfällt, so hat man (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$Q = L = \Sigma[P(y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta)],$$

oder da, wenn p das aus einem Punct der Kraftebene auf die Kraft P gefällte Perpendikel bezeichnet, sofort (Statik Nr. **20**, Anmerk. 1) $p = y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta$ ist, auch:

$$Q = \Sigma(Pp).$$

Da sich nun das Paar Q mit der Kraft R, welche zusammen in derselben Ebene liegen, nach Nr. **10** vereinigen lassen, indem man $Q = Rr$ setzt, so hat man endlich statt der vorigen Relation, jene:

$$Rr = \Sigma(Pp),$$

woraus sofort folgt, dass das statische Moment der Mittelkraft gleich ist der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte, diese Momente auf einen beliebigen in der Ebene augenommenen Punct bezogen.

(Vergl. Statik Nr. **20**, Relat. (2).)

Für das Gleichgewicht erhält man aus den obigen sechs Relationen in Nr. **15** die drei Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,\ \Sigma(P\,Cos\,\beta) = 0 \text{ und } L, \text{ d. i. } \Sigma(Pp) = 0.$$

(Vergl. Statik Nr. **20**, Anmerk. 1 Relat. (l).)

22. Sind die in der eben betrachteten Ebene liegenden Kräfte unter einander parallel, so erhält man wegen $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta$ entweder aus der unmittelbar vorhergehenden, noch einfacher aber aus den Relationen in Nr. **16** und **17**:

$$R = \Sigma(P),\ a = \alpha,\ b = \beta,\ Q = Rr = \Sigma(Pp),\ RX = \Sigma(Px) \text{ und } RY = \Sigma(Py).$$

Für das vollständige Gleichgewicht erhält man aus Nr. **18** die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px) = 0.$$

23. Verschiebt man die Coordinatenaxen X, Y in ihrer Ebene so, dass jene Y zu den gegebenen Kräften parallel wird, so erhält man wegen $\alpha = 90^0$ und $\beta = 0$, aus den letztern Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } \Sigma(Px) = 0,$$

es muss nämlich sowohl die algebraische Summe der Kräfte als auch die ihrer statischen Momente auf den Anfangspunct der Coordinaten (welcher sofort ein willkürlicher ist) gleich Null sein.

Besteht blos die erste dieser beiden Bedingungsgleichungen, so findet keine fortschreitende, dagegen eine drehende Bewegung Statt. Das Umgekehrte tritt ein, wenn von diesen Gleichungen nur die letztere erfüllt wird.

24. Ist das in Nr. **13** und ferner betrachtete allgemeine System nicht vollkommen frei, sondern besitzt dasselbe z. B. einen festen Punct O, so vermindert sich die Zahl der für das Gleichgewicht gefundenen Bedingungsgleichungen von sechs auf drei. Nimmt man nämlich diesen Punct O zum Ursprung der Coordinaten, so ist er auch zugleich der Angriffspunct der n Kräfte und vernichtet sonach die Resultirende R von selbst; es bleibt daher von den obigen Bedingungsgleichungen $R = 0$ und $Q = 0$ für diesen Fall nur noch die letztere, welche sofort wieder in die drei Bedingungsgleichungen:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

für die Ebenen der xy, xz, yz zerfällt.

Der auf den Punct O ausgeübte Druck ergibt sich aus dem Werthe von R.

25. Hat das System zwei feste Puncte O und S, so wähle man wieder den Punct O zum Anfangspunct der Coordinaten, ferner die Gerade OS zu einer, z. B. zur Achse Z. Dies vorausgesetzt, wird wie zuvor die Resultirende R der n Kräfte durch den festen Punct O aufgehoben, und es bleiben wieder nur in den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise die drei Kräftepaare L, M, N übrig.

Da jedoch die Gerade OS eine Drehungsachse des Systemes bildet, so werden die in den Ebenen xz und yz liegenden Paare M und N durch diese feste Achse aufgehoben, so, dass nur noch die einzige Bedingungsgleichung $L = 0$, d. i. (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$\Sigma[P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta)] = 0$$

bestehen bleibt.

26. Kann sich das System (oder der Körper) längs dieser Achse OS verschieben, so werden von den drei Componenten:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha), \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta), \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma),$$

welche die Resultirende R (Nr. **13**, (a)) bilden, nur die beiden erstern, d. i. jene nach den Achsen der x und y aufgehoben, so, dass also die Bedingungsgleichung für die letztere Componente, so wie jene für die Drehung noch bestehen bleibt.

Man hat nämlich in diesem Falle für das Gleichgewicht die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma[P(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta)] = 0.$$

Um dabei auch die auf die beiden festen Puncte O und S stattfindenden Drücke R und R' zu finden, so ersetze man diese Pressungen durch die sogenannten Reactionskräfte, d. h. durch Kräfte R und R', welche in den Puncten O und S den Drücken gleich, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht werden. Mit Hinzufügung oder Einführung dieser beiden Kräfte R, R' kann man das System sofort wieder wie ein vollkommen freies behandeln.

Man zerlege nun jede dieser beiden Kräfte R und R' (Fig. 14) in die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten p, q, r und p', q', r' und bringe ausserdem im Puncte O nach der Achse der x die zwei gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte $p' = p''$, so wie nach der Achse der y jene $q' = q''$ an, so bilden sich ausser den Kräften $p + p'$, $q + q'$ und r in O und r' in S nach den drei Achsen in den angedeuteten Richtungen noch die in den Puncten S und O angreifenden Paare (p', p'') und (q', q'').

Haben die beiden Puncte O und S die Entfernung $OS = a$ von einander, so müssen sofort für das Gleichgewicht die folgenden sechs Bedingungsgleichungen, und zwar bezüglich der fortschreitenden Bewegung, jene:

$$\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = p + p', \quad \Sigma(P\, Cos\, \beta) = q + q', \quad \Sigma(P\, Cos\, \gamma) = r + r',$$

und hinsichtlich der drehenden Bewegung, mit Rücksicht auf den Sinn der Drehungsrichtung (und zwar nach der Bemerkung in Nr. **14**, nach welcher die Drehung von $+X$ zu $+Z$, von da zu $+Y$ und endlich von da gegen $+X$ als positiv genommen wird) in den Ebenen der xy, xz und yz beziehungsweise jene:

$$L = 0, \quad M + p'a = 0 \quad \text{und} \quad N - q'a = 0$$

bestehen.

Aus diesen sechs Gleichungen folgt:

$$r + r' = \Sigma(P\, Cos\, \gamma), \quad p = \frac{M + a\, \Sigma(P\, Cos\, \alpha)}{a}, \quad p' = -\frac{M}{a},$$

$$q = \frac{a\, \Sigma(P\, Cos\, \beta) - N}{a} \quad \text{und} \quad q' = \frac{N}{a},$$

wobei die Werthe von M und N in Nr. **14**, Relation (f) angegeben sind.

Die Drücke auf die Puncte O und S normal zur Achse OS sind sonach durch p, q, p', q' vollkommen bestimmt, während sich von dem Drucke nach der Richtung der Achse nur die Summe $r + r'$ angeben lässt; es bleibt sonach, bei Voraussetzung eines absolut festen Systemes, jeder einzelne Druck auf die Puncte O und S unbestimmt und kann die Summe $r + r'$ auf diese beliebig vertheilt werden.

Liegen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ in Ebenen, welche mit jener der xy parallel, also normal zur Drehungsachse OS sind, so wird, wegen $\gamma = 90^0$, die genannte Summe, also der Druck nach dieser Achse $r + r' = 0$.

Die übrigen Werthe sind für diesen besondern Fall, wenn man gleich für M und N die entsprechenden Werthe aus Relation (f) setzt:

$$p = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\alpha) - \Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a},\quad p' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a},$$

$$q = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\beta) - \Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a},\quad q' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a}.$$

Liegen endlich sämmtliche Kräfte in einer Ebene, welche mit der Ebene der xy parallel ist und von dieser den Abstand $\frac{1}{2}a$ hat, so folgt aus diesen letztern Relationen:

$$p = p' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\alpha) \text{ und } q = q' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\beta).$$

Fällt diese Ebene mit jener der xy zusammen, so wird wegen $z = 0$, sofort:

$$p = \Sigma(P\,Cos\,\alpha),\ p' = 0,\ q = \Sigma(P\,Cos\,\beta),\ q' = 0.$$

Anmerkung. Besitzt ein vollkommen festes System mehr als zwei feste Puncte, so sind die Drücke auf diese Puncte immer unbestimmt, und wenn sich in der Wirklichkeit in einem solchen Falle dennoch bestimmte Werthe dafür ergeben, so rührt dies nur daher, dass sich die Form eines jeden physischen Körpers oder Systemes durch die Einwirkung von Kräften immer mehr oder weniger ändert, es also in dieser Hinsicht kein absolut festes System gibt.

27. Zur Erläuterung dieser Bemerkung wollen wir den Fall annehmnn, dass sich die sämmtlichen Angriffspuncte der Kräfte in einer Ebene befinden, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes in beliebig vielen Puncten gestützt sein soll.

Nimmt man diese Ebene als coordinirte Ebene der xy und denkt sich in den Stützpuncten normale Kräfte $p, p_1, p_2, \ldots$ welche den in diesen Puncten stattfindenden Drücken gleich und entgegengesetzt sind, und die wir kurz Reactionskräfte nennen wollen (Statik Nr. **131**, 15.), welche also mit der Achse der z parallel sind und nach einerlei Richtung wirken sollen; so dürfen die an dieser Ebene wirkenden Kräfte, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, weder nach den Axen der x und y eine Wirkung, noch um die Achse der z eine Drehung hervorbringen.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher durch die Relationen gegeben:

$$\Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,\ \Sigma(P\,Cos\,\beta) = 0,\ L = 0.$$

Werden die zur Herstellung des Gleichgewichtes angebrachten, mit der Achse Z parallelen Reactionskräfte $p, p_1 \ldots$ zu einer Resultirenden r vereinigt, welche also gleich ist der Summe dieser Kräfte und mit diesen dieselbe Richtung hat; so muss ihr Angriffspunct (für's Gleichgewicht) innerhalb des convexen Polygones liegen, welches in der Ebene entsteht, wenn man die Stützpuncte durch gerade Linien mit einander verbindet. Hieraus folgt aber, dass auch die Resultante aus den Componenten der gegebenen Kräfte nach der Achse der z, d. i. $\Sigma(P\,Cos\,\gamma)$ ihren Angriffspunct innerhalb dieses genannten Polygones haben und der Kraft r entgegen gerichtet sein muss.

Zur Bestimmung des Druckes gegen die einzelnen Stützpuncte hat man nun, wenn man die rechtwinkeligen Coordinaten der angenommenen Reactionskräfte $p, p_1 \ldots$ nach den Axen der x und y beziehungsweise mit $u, u_1, u_2 \ldots$ und $v, v_1, v_2 \ldots$ bezeichnet, im Stande des Gleichgewichtes:

$$\Sigma(p) = \Sigma(P\,Cos\,\gamma),\ \Sigma(pu) = M \text{ und } \Sigma(pv) = N \ldots (m),$$

dabei ist (aus Relat. (f) in Nr. **14** wegen $z = 0$):

$$M = \Sigma(Px\,Cos\,\gamma) \text{ und } N = -\Sigma(Py\,Cos\,\gamma).$$

Da man nun zur Bestimmung der Drücke oder Kräfte p, $p_1 \ldots$ nur die drei Bedingungsgleichungen (m) erhält, so folgt, dass diese Drücke unbestimmt sein werden, sobald man mehr als drei Stützpuncte annimmt.

Auch tritt dieselbe Unbestimmtheit ein, wenn die sämmtlichen Kräfte und die drei Stützpuncte in einer geraden Linie, z. B. in der Axe der x liegen, weil dafür wegen $y = 0$ und $v = 0$, die dritte der vorigen Bedingungsgleichungen, in $0 = 0$ übergeht und sonach nur zwei Gleichungen bestehen.

Ist endlich nur ein Stützpunct vorhanden, so muss für das Gleichgewicht, wie sich von selbst versteht, die Resultirende durch diesen Stützpunct gehen.