Um diese Zusammensetzung zu bewirken, bringe man nach dem Vorigen (Nr. 5, Zusatz) sämmtliche Paare auf denselben Arm und vereinige durch gehöriges Verschieben sowohl die rechts- als auch die linksdrehenden Paare mit einander; so entstehen dadurch zwei Paare von gleicher Breite und entgegengesetzten Drehrichtungen, die sich wieder zu einem einzigen Kräftepaar von demselben Arm vereinigen lassen, wodurch endlich entweder ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder Gleichgewicht entsteht.

Hat man z. B. die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, Rr mit den beiden linksdrehenden Qq, Ss zu vereinigen, so bringe man z. B. die drei letztern auf den Arm oder die Breite p des erstern, d. h. man verwandle die Paare Rr, Qq, Ss in die gleichgeltenden $R'p$, $Q'p$, $S'p$, indem man die Kräfte R', Q', S' aus den Relationen $R'p = Rr$, $Q'p = Qq$, $S'p = Ss$ bestimmt.

Hat man nun durch die genannte Verschiebung die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, $R'p$, so wie auch die beiden linksdrehenden $Q'p$ $S'p$ mit einander vereinigt und wieder, wie in Fig. 7, gehörig verschoben, so erhält man das rechtsdrehende Paar $P+R'$ und das linksdrehende $Q'+S'$ und aus diesen beiden Paaren endlich, jenachdem $P+R' >, <, = Q'+S'$ ist, als Resultat ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder das Gleichgewicht.

Ist U das resultirende Kräftepaar, so ist also $U = (P+R') - (Q'+S')$, oder wenn man mit dem gemeinschaftlichen Arm p multiplicirt:

$$Up = Pp + R'p - Q'p - S'p,$$

oder mit Rücksicht auf die Erklärung f) in Nr. 1, im algebraischen Sinne genommen:

$$Up = Pp + R'p + Q'p + S'p.$$

Stellt man endlich für $R'p$, $Q'p\ldots$ die ursprünglichen Werthe wieder her, auch:

$$Up = Pp + Rr + Qq + Ss.$$

Aus dieser Relation ergibt sich ganz einfach das Gesetz, nach welchem sich das resultirende Kräftepaar durch Rechnung finden lässt.

Sind nämlich Pp, P_1p_1, $P_2p_2\ldots$ die Momente der verschiedenen in derselben Ebene liegende Kräftepaare, so wie Uu jenes des resultirenden Paares, so ist:

$$Uu = Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = \Sigma(Pp),$$

dabei diese Summe der Momente im algebraischen Sinne verstanden.

Von den Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen.

8. Liegen zwei Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen in zwei

parallelen, fest mit einander verbundenen Ebenen, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Es seien M, N (Fig. 8) die beiden parallelen Ebenen und $P_1 p_1$, $Q_1 q_1$ die Momente der in diesen liegenden Paare; also nach der Voraussetzung $P_1 p_1 = Q_1 q_1$. Man verwandle zuerst jedes Paar nach Nr. **5** (Zusatz) in ein gleichgeltendes von einem gleichen, z. B. dem Arm $AB = CD = a$, wodurch die Kräfte P_1, Q_1 in P und Q übergehen mögen, so, dass $Pa = Qa = P_1 p_1 = Q_1 q_1$, also $Q = P$ wird; hierauf verschiebe man diese in den Ebenen M und N liegenden Paare $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ so, dass die Arme AB und CD, mithin auch die Kräfte selbst zu einander parallel werden. Dies vorausgesetzt, geben die beiden gleich (in der Zeichnung aufwärts) gerichteten Kräfte P und Q die Resultirende $R = P + Q = 2P$, so wie die beiden nach entgegengesetzter Richtung (hier nach abwärts wirkenden) Kräfte P' und Q' die Resultante $R' = P' + Q' = 2P$.

Da nun diese beiden Resultirenden, welche mit den Componenten parallel laufen, einander gleich sind und in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte O der beiden in der durch AB und CD gedachten Ebene liegenden Geraden AC und BD angreifen und daher gerade entgegengesetzt wirken, so heben sie sich auf, und es sind sonach auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare selbst im Gleichgewicht.

Zusatz. Nach diesem Verfahren lässt sich also (da die gegenseitige Entfernung der parallelen Ebenen keinen Einfluss hat) ein Kräftepaar mit seiner Ebene parallel beliebig verschieben. Auch lassen sich eben so beliebig viele in parallelen Ebenen liegende Paare in eine einzige Ebene bringen und nach Nr. **7** zu einem Kräftepaar vereinigen.

Hieraus folgt, dass auch umgekehrt (Nr. **5**, Anmerkung) zwischen zwei in parallelen Ebenen liegenden Paaren von entgegengesetzten Drehrichtungen das Gleichgewicht nur bestehen kann, wenn ihre Momente einander gleich sind.

9. Liegen zwei Kräftepaare in zwei sich schneidenden Ebenen, so lassen sich diese durch ein einziges Kräftepaar ersetzen.

Es seien MN, $M'N'$ (Fig. 9) die beiden in AB sich schneidenden Ebenen. Man bringe wieder beide Paare auf dieselbe

Breite $AB = a$, wofür die Kräfte dann $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ in den Ebenen MN und $M'N'$ sein mögen. Verschiebt man jetzt die Paare in den Ebenen so, dass von den vier Kräften je zwei in den Puncten A und B angreifen und auf der Durchschnittslinie AB normal stehen; so liegen von den vier Kräften der beiden Paare jene P, Q' und P', Q in parallelen auf AB normalen Ebenen. Construirt man daher aus P, Q' und P', Q die Resultirenden R, R', so sind diese (wegen $P' = P$ und $Q' = Q$) einander gleich, liegen in einer Ebene, welche mit den gegebenen dieselbe Durchschnittslinie AB hat und wirken nach parallelen, jedoch entgegengesetzten Richtungen; es bildet also (R, R') das resultirende, den beiden gegebenen gleichgeltende Kräftepaar von der Breite a, oder es ist Ra das neue oder resultirende Paar.

Ist nun $MAQ' = \alpha$ der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen, so ist (Statik, Nr. 8):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha} \ldots (1).$$

Ist $RAQ' = \varphi$ der Neigungswinkel der Ebene des resultirenden Paares R mit der Ebene $M'N'$ des Paares Q, so ist:

$$\operatorname{Sin} \varphi = \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{R} \ldots (2),$$

wodurch auch die Lage der Ebene des neuen Paares bestimmt ist.

Zusatz 1. Waren $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ die ursprünglich gegebenen Paare, so hat man zur genannten Umwandlung derselben auf die gemeinschaftliche Breite a die beiden Relationen $Pa = P_1 p_1$ und $Qa = P_2 p_2$. Multiplicirt man daher die vorige Gleichung (1) durchaus mit a, so erhält man:

$$Ra = \sqrt{(Pa)^2 + (Qa)^2 + 2\,Pa \,.\, Qa \,.\, \operatorname{Cos} \alpha},$$

oder mit Rücksicht auf die vorigen Relationen:

$$Ra = \sqrt{(P_1 p_1)^2 + (P_2 p_2)^2 + 2\,P_1 p_1 \,.\, P_2 p_2 \,.\, \operatorname{Cos} \alpha} \ldots (1').$$

Auf ähnliche Weise nimmt auch die obige Gleichung (2) die Form an:

$$\operatorname{Sin} \varphi = \frac{P_1 p_1 \operatorname{Sin} \alpha}{Ra} \ldots (2').$$

Wirken nun aber zwei Kräfte $P_1 p_1$ und $P_2 p_2$ auf einen Punct unter einem Winkel α und ist Ra ihre Resultirende, sowie φ der Winkel, welchen dieselbe mit der Kraft $P_2 p_2$ einschliesst; so erhält man zur Bestimmung der Grösse und Lage derselben nach Nr. 8 (Statik) genau die vorigen beiden Relationen (1′) und (2′). Hieraus folgt also, dass man die in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare genau so zerlegen und zusammensetzen kann, wie einfache auf einen Punct wirkende, in einer Ebene liegende Kräfte, wenn man statt der Kräfte die Momente der Paare, und statt der Winkel der Kräfte die Winkel der Ebenen setzt, in welchen die Kräftepaare liegen.

Zusatz 2. Die Zerlegung und Zusammensetzung mehrerer in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare lässt sich oft durch Einführung ihrer Umdrehungsachsen (Erkl. *g*)) und zwar in folgender Weise vereinfachen.

Es seien MM, NN, RR (Fig. 9′) die Durchschnittslinien dreier Paarebenen mit der Ebene des Papiers, welche auf der durch A gehenden gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der drei Ebenen perpendikulär sein soll. Da man aber die Achse eines Paares durch jeden beliebigen Punct der Paarebene legen kann, indem sich das Paar in seiner Ebene willkürlich verschieben lässt; so können die in der Papierebene durch den Punct A auf diese Durchschnittslinien gezogenen Perpendikel Am, An, Ar für die Achsen dieser drei Paare genommen werden, welche offenbar unter einander dieselben Winkel, wie die entsprechenden Paarebenen selbst einschliessen.

Ist nun das eine in der Ebene RR liegende Paar die Resultirende aus den beiden andern in den Ebenen MM, NN liegenden Paaren, so bildet nach der vorigen Bemerkung dessen Moment Ra die Diagonale des aus den Momenten $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ construirten Parallelogrammes. Trägt man daher diese Momente auf den Achsen Am, An auf, ist nämlich $Aa = P_1 p_1$, $Ab = P_2 p_2$ und ergänzt das Parallelogramm; so ist die Richtung der Diagonale Ar desselben nicht nur die Achse des resultirenden Paares, sondern zugleich auch $Ac = Ra$ dessen Moment.

Zusatz 3. Da Kräftepaare keine anderen gegenseitigen Lagen als die bisher betrachteten haben können, so folgt schliesslich der allgemeine Satz, dass sich beliebig viele Kräftepaare, in beliebigen Ebenen liegend, immer zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen lassen.

10. Vereinigung eines Kräftepaares mit einer einzelnen Kraft.

Liegt die gegebene, im Puncte A (Fig. 10) angreifende Kraft P mit dem Paar Qq in derselben Ebene, so verwandle man zuerst das letztere in ein gleichgeltendes von der Kraft P, d. i. wenn a der entsprechende Arm ist (aus $Pa = Qq$ zu bestimmen) in das Paar Pa. Hierauf verschiebe man das neue Paar (P, P') in seiner Ebene so, dass die gegebene Kraft P durch die eine Kraft P' des Paares vernichtet oder aufgehoben wird; so bleibt als Resultirende noch die eine durch den Punct A' (welcher vom ursprünglichen A verschieden ist) gehende Kraft P, welche der gegebenen gleich, mit ihr parallel und nach derselben Richtung wirksam ist.

Liegt die gegebene Kraft P zwar nicht in der Ebene des Paares selbst, jedoch mit dieser parallel, so verschiebe man diese Ebene mit sich parallel (wodurch Nr. 8, Zusatz, in der Wirkung des Paares nichts geändert wird) bis sie die gegebene Kraft aufnimmt, und verfahre im Uebrigen wie vorhin.

Zusatz. Hat endlich die gegebene Kraft eine solche Lage, dass sie die Ebene des Paares schneidet, so lässt sich diese Vereinigung nicht bewerkstelligen.

11. Verschiebung einer Kraft nach paralleler Richtung.

Will man eine Kraft P, welche im Puncte A (Fig. 11) angreift, mit sich selbst parallel so verschieben, dass sie durch irgend einen Punct O geht, so darf man durch diesen letztern Punct nur zwei mit der gegebenen Kraft P gleiche, parallel und entgegengesetzt wirkende (sich also aufhebende) Kräfte P', P'' anbringen; so hat man (wie vorhin) durch den Punct O die Kraft P' mit der ursprünglichen P gleich, parallel und in derselben Richtung, so wie das Paar (P, P'') vom Arm $BO = a$ wirkend, dessen Moment Pa gleich ist dem statischen Momente der gegebenen Kraft P auf den neuen Angriffspunct O bezogen. Die drei Kräfte $P = P' = P''$ bewirken also dasselbe, was die Kraft P allein bewirkt.

Ist also z. B. ein Körper im Puncte O festgehalten und durch eine excentrisch wirkende Kraft P in A angegriffen, so wird, wenn man nach dem eben angedeuteten Verfahren diese Kraft P in die drei Kräfte P, P', P'' auflöst, das Paar (P, P'') auf O keinen Druck, sondern blos das Bestreben zu einer Drehung, welche nur durch ein in derselben Ebene wirkendes Paar $Qb = Pa$ aufgehoben werden kann, äussern, während ein Druck auf den Punct O durch die Kraft $P' = P$ in einer mit der Kraft P parallelen Richtung erzeugt wird.

Anwendungen.

12. Um von den bisher entwickelten Eigenschaften und Sätzen der Kräftepaare einige Anwendungen zu zeigen, so wollen wir zuerst zwei in derselben Ebene liegende Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ betrachten, welche gleiche Momente $Pa = Qb$ und entgegengesetzte Drehrichtungen haben, und so angeordnet sind, wie es aus Fig. 12 zu ersehen.

Da in diesem Falle (Nr. 5) Gleichgewicht besteht und die in C wirkende Kraft $P + Q = R$ der Resultante aus den beiden in A und B wirkenden parallelen Kräften P, Q gleich und entgegengesetzt ist; so folgt, dass die Resultirende aus zwei parallelen Kräften der Summe dieser Kräfte gleich und mit diesen parallel ist, und dass ferner jede beliebig gezogene Gerade $A'B'$ von den drei parallelen Kräften, wegen (nach der Voraussetzung) $Pa = Qb$, oder

$$P : Q : P + Q = b : a : a + b,$$

im Verhältniss von

$$b' : a' : a' + b' = P : Q : R$$

geschnitten wird. (Vergleiche §. 20.)

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies System von Angriffspuncten.

13. In einem freien Systeme von n Puncten M, M_1, M_2 . . . (Fig. 13) wirken die Kräfte P, P_1, P_2 . . . nach beliebigen Richtungen; die Coordinaten dieser Angriffspuncte auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem AX, AY, AZ bezogen, seien der Reihe nach x, y, z, $x_1 y_1 z_1$ u. s. w., so wie die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 . . . mit den Axen der x, y, z bilden, beziehungsweise α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w.

Betrachtet man nun zuerst die Kraft P an ihrem Angriffspunct M, so kann man diese, wenn man durch den Ursprung A der Coordinaten zwei mit P gleiche und parallele entgegengesetzt