

Wesentliche Eigenschaften der Kräftepaare.

1. Wie bereits in §. 21 (Anmerk.) bemerkt, haben zwei gleiche, parallele, jedoch entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche man nach PoinsoT ein Kräftepaar, Gegenpaar oder schlechtweg Paar (*couple*) nennt, keine Resultirende, indem ihre Grösse $R = P - P = 0$ und ihr Arm $= \infty$ wird, d. h. es gibt keine einzelne Kraft, welche mit einem solchen Paar im Gleichgewichte stehen könnte. Dagegen ist es möglich, das Gleichgewicht durch ein zweites Kräftepaar herzustellen, und es haben die Paare vorzüglich in der Statik einen solchen Einfluss, dass wir es angezeigt finden, die wichtigsten Eigenschaften derselben hier noch in Kürze zu entwickeln und auf einige besondere Fälle und Beispiele anzuwenden.

2. Erklärungen.

a) Die normale Entfernung der beiden ein Paar bildenden Kräfte heisst Breite oder Arm des Kräftepaares.

b) Ist P die Kraft eines Paares ($P, -P$) und p dessen Arm, so heisst das Product Pp das statische Moment der Kraft P oder das Moment des Paares ($P, -P$); häufig wird das Paar auch durch sein Moment Pp bezeichnet und eben so oft wird auch unter der Benennung Paar ($P, -P$) dessen Moment selbst verstanden.

c) Zwei Kräftepaare heissen gleich, wenn sie gleiche Kraft und gleichen Arm (also auch gleiche Momente) haben.

d) So wie eine einzelne Kraft ihrem Angriffspunct in gerader Linie eine progressive oder translatorische Bewegung zu geben strebt, so sucht ein Kräftepaar die zugehörige, d. i. die Ebene, in welcher das Paar liegt (auch

Paarebene genannt), um irgend einen im Allgemeinen noch unbestimmten Punct zu drehen.

e) Hat ein Kräftepaar das Bestreben, die zugehörige Ebene in jener Richtung zu drehen, in welcher sich die Zeiger einer Uhr bewegen, so wird das Paar rechts-, im Gegentheile linksdrehend genannt. Um über die Drehrichtung eines Kräftepaares entscheiden zu können, darf man sich nur zwischen beiden Kräften irgend einen Punct als Drehungspunct denken.

f) Da man die statischen Momente der rechts und links drehenden Kräfte (Statik 19, Anmerk. 1) mit entgegengesetzten Zeichen in die Rechnung einführen muss, so pflegt man das Moment eines rechtsdrehenden Paares mit $+$, jenes eines linksdrehenden mit $-$ zu bezeichnen.

Hat also ein rechtsdrehendes Paar die Kraft P und den Arm p , so wie ein linksdrehendes die Kraft Q und den Arm q , so sind diese beiden Kräftepaare in die Rechnung mit $+Pp$ und $-Qq$ einzuführen und dadurch auch vollkommen bestimmt.

g) Endlich versteht man unter Achse eines Paares jede Gerade, welche auf der Paarebene perpendicular steht; sie kann zugleich als Umdrehungsachse dieser Ebene gelten.

Dies vorausgeschickt, ergeben sich nun für die Kräftepaare die folgenden Sätze.

3. Die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte eines Paares auf was immer für einen in der Ebene des Paares liegenden Punct bezogen, ist gleich dem Momente des Kräftepaares.

Nimmt man O (Fig. 1) als Mittelpunkt der statischen Momente der Kräfte P, P' , welche ein Paar bilden, und setzt die auf die Richtung der Kräfte gefällten Perpendikel $Oa = a$ und $Ob = b$, so ist die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte P und P' , welche ihrer entgegengesetzten Richtung wegen mit $+$ und $-$ zu bezeichnen sind, $= Pb - P'a$, oder wenn man den Arm des Paares $ab = p$ setzt, wodurch $b = a + p$ wird, sofort wegen $P' = P$:

$$P(a + p) - P'a = Pp,$$

so, dass also die Lage des Punctes O hierauf ohne Einfluss ist.

4. Zwei gleiche, in derselben Ebene liegende Kräftepaare (Erkl. c) von entgegengesetzten Drehrichtungen, halten sich das Gleichgewicht.

Liegen die beiden Paare P und P' (von gleicher Grösse und gleichem Arm) wie in Fig. 2 auf- oder in einander, so wirken in jeder der beiden Geraden, wegen $P' = P$, zwei gleiche Kräfte nach gerade entgegengesetzter Richtung, die sich sonach aufheben oder im Gleichgewichte halten.

Schneiden sich, wie in Fig. 3, die beiden Paare P und P' , so setze man die in den Punkten A und B angreifenden gleich grossen Kräfte P, P' zusammen, so erhält man zwei Resultirende R von gleicher Grösse, welche nach der Diagonale des verschobenen Quadrates CD in entgegengesetzter Richtung wirken, sich also wieder das Gleichgewicht halten.

Sind endlich die beiden Paare P, P' , wie in Fig. 4, zu einander parallel, so füge man zu diesen noch zwei Paare Q, Q' hinzu, welche den gegebenen gleich sind, mit diesen in derselben Ebene liegen, sich schneiden und entgegengesetzte Drehrichtungen haben. Da sich diese hinzugefügten beiden Paare nach dem vorigen Falle das Gleichgewicht halten, so haben diese auf den Gleichgewichtszustand der ursprünglichen beiden Paare keinen Einfluss.

Nun steht aber nach dem vorigen Falle das Paar P mit jenem Q' , so wie das Paar P' mit jenem Q im Gleichgewicht, folglich müssen, da, wie eben bemerkt, die Paare Q und Q' für sich im Gleichgewichte sind, auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare $(P, -P)$ und $(P', -P')$ an und für sich im Gleichgewichte stehen.

Zusatz. Aus diesem Lehrsatz folgt, dass man, ohne die Wirkung eines Kräftepaares zu ändern, dasselbe in dessen Ebene beliebig verschieben und so jeden beliebigen Punkt derselben als Angriffspunct wählen kann.

5. Zwei in derselben Ebene wirksame Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen halten sich das Gleichgewicht.

Sind $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 5) die beiden Paare und p, q ihre Arme, folglich (Nr. 2, b) Pp, Qq ihre Momente; so

verschiebe man das Paar Q in der zugehörigen Ebene so, dass es das andere Paar P rechtwinkelig durchschneidet, construire in den Punkten A und B aus den Kräften P und Q die beiden Resultirenden R , so sind diese erstens einander gleich, liegen wegen (nach der Voraussetzung) $Pp = Qq$, oder $P:Q = q:p$ in der Richtung der Diagonale des Rechteckes CD und sind entgegengesetzt gerichtet, folglich im Gleichgewicht. Da nun diese beiden Resultanten im Gleichgewichte stehen, so halten sich auch die beiden Kräftepaare selbst das Gleichgewicht.

Zusatz. Man kann daher bei einem Kräftepaar Kraft und Arm beliebig verändern, wenn nur das neue Paar das Moment des ursprünglichen behält. Soll ein Paar Pp in ein gleichgeltendes vom Arm s umgeändert werden, so hat man die Kraft S aus der Relation $Ss = Pp$ zu bestimmen. Für $s = 1$ heisst das Paar $S = Pp$ ein reducirtes Kräftepaar.

Anmerkung. Dass umgekehrt zwei in derselben Ebene liegende Paare von entgegengesetzten Drehrichtungen nur im Gleichgewichte stehen können, wenn sie gleiche Momente haben, lässt sich wie folgt beweisen.

Ist (Fig. 6) P das rechts- und Q das linksdrehende Paar, der Arm des erstern $AA' = p$, jener des letztern $BB' = q$; so verlege man die Angriffspunkte der vier Kräfte in irgend eine durch den Durchschnittspunct C aus AA' und BB' gehende Gerade CD ; so ist für das Gleichgewicht, da die Kräfte P, Q die Gerade CD nach der einen, jene P', Q' nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben:

$$P \cdot CA + Q \cdot CB = P' \cdot CA' + Q' \cdot CA \dots (m)$$

oder wenn man $CA' = a$ und $CB' = b$ setzt, auch:

$$P(a + p) + bQ = aP' + Q'(b + q),$$

oder wegen $P' = P$ und $Q' = Q$, endlich:

$$Pp = Qq.$$

Diese letztere Relation folgt auch unmittelbar aus der vorigen (m), wenn man den Satz in Nr. 3 berücksichtigt.

6. Zwei Kräftepaare in derselben Ebene von gleichen Momenten und gleichen Drehrichtungen sind gleichgeltend.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden in Nr. 5 (Zusatz).

7. Zwei oder mehrere in einer Ebene liegende Kräftepaare lassen sich immer zusammensetzen oder zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen.

Um diese Zusammensetzung zu bewirken, bringe man nach dem Vorigen (Nr. 5, Zusatz) sämmtliche Paare auf denselben Arm und vereinige durch gehöriges Verschieben sowohl die rechts- als auch die linksdrehenden Paare mit einander; so entstehen dadurch zwei Paare von gleicher Breite und entgegengesetzten Drehrichtungen, die sich wieder zu einem einzigen Kräftepaar von demselben Arm vereinigen lassen, wodurch endlich entweder ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder Gleichgewicht entsteht.

Hat man z. B. die beiden rechtsdrehenden Paare Pp , Rr mit den beiden linksdrehenden Qq , Ss zu vereinigen, so bringe man z. B. die drei letztern auf den Arm oder die Breite p des erstern, d. h. man verwandle die Paare Rr , Qq , Ss in die gleichgeltenden $R'p$, $Q'p$, $S'p$, indem man die Kräfte R' , Q' , S' aus den Relationen $R'p = Rr$, $Q'p = Qq$, $S'p = Ss$ bestimmt.

Hat man nun durch die genannte Verschiebung die beiden rechtsdrehenden Paare Pp , $R'p$, so wie auch die beiden linksdrehenden $Q'p$, $S'p$ mit einander vereinigt und wieder, wie in Fig. 7, gehörig verschoben, so erhält man das rechtsdrehende Paar $P + R'$ und das linksdrehende $Q' + S'$ und aus diesen beiden Paaren endlich, jenachdem $P + R' >$, $<$, $= Q' + S'$ ist, als Resultat ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder das Gleichgewicht.

Ist U das resultierende Kräftepaar, so ist also $U = (P + R') - (Q' + S')$, oder wenn man mit dem gemeinschaftlichen Arm p multiplicirt:

$$Up = Pp + R'p - Q'p - S'p,$$

oder mit Rücksicht auf die Erklärung f) in Nr. 1, im algebraischen Sinne genommen:

$$Up = Pp + R'p + Q'p + S'p.$$

Stellt man endlich für $R'p$, $Q'p \dots$ die ursprünglichen Werthe wieder her, auch:

$$Up = Pp + Rr + Qq + Ss.$$

Aus dieser Relation ergibt sich ganz einfach das Gesetz, nach welchem sich das resultirende Kräftepaar durch Rechnung finden lässt.

Sind nämlich Pp , P_1p_1 , $P_2p_2 \dots$ die Momente der verschiedenen in derselben Ebene liegende Kräftepaare, so wie Uu jenes des resultirenden Paares, so ist:

$$Uu = Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \dots = \Sigma(Pp),$$

dabei diese Summe der Momente im algebraischen Sinne verstanden.

Von den Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen.

8. Liegen zwei Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen in zwei