Anhang.

Ueber die wesentlichsten Eigenschaften der Kräftepaare, nebst einigen ihrer wichtigsten Anwendungen.

Wesentliche Eigenschaften der Kräftepaare.

1. Wie bereits in §. 21 (Anmerk.) bemerkt, haben zwei gleiche, parallele, jedoch entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche man nach Poinsot ein Kräftepaar, Gegenpaar oder schlechtweg Paar (*couple*) nennt, keine Resultirende, indem ihre Grösse $R = P - P = 0$ und ihr Arm $= \infty$ wird, d. h. es gibt keine einzelne Kraft, welche mit einem solchen Paar im Gleichgewichte stehen könnte. Dagegen ist es möglich, das Gleichgewicht durch ein zweites Kräftepaar herzustellen, und es haben die Paare vorzüglich in der Statik einen solchen Einfluss, dass wir es angezeigt finden, die wichtigsten Eigenschaften derselben hier noch in Kürze zu entwickeln und auf einige besondere Fälle und Beispiele anzuwenden.

2. Erklärungen.

a) Die normale Entfernung der beiden ein Paar bildenden Kräfte heisst Breite oder Arm des Kräftepaares.

b) Ist P die Kraft eines Paares $(P, -P)$ und p dessen Arm, so heisst das Product Pp das statische Moment der Kraft P oder das Moment des Paares $(P, -P)$; häufig wird das Paar auch durch sein Moment Pp bezeichnet und eben so oft wird auch unter der Benennung Paar $(P, -P)$ dessen Moment selbst verstanden.

c) Zwei Kräftepaare heissen gleich, wenn sie gleiche Kraft und gleichen Arm (also auch gleiche Momente) haben.

d) So wie eine einzelne Kraft ihrem Angriffspunct in gerader Linie eine progressive oder translatorische Bewegung zu geben strebt, so sucht ein Kräftepaar die zugehörige, d. i. die Ebene, in welcher das Paar liegt (auch

Paarebene genannt), um irgend einen im Allgemeinen noch unbestimmten Punct zu drehen.

e) Hat ein Kräftepaar das Bestreben, die zugehörige Ebene in jener Richtung zu drehen, in welcher sich die Zeiger einer Uhr bewegen, so wird das Paar rechts-, im Gegentheile linksdrehend genannt. Um über die Drehrichtung eines Kräftepaares entscheiden zu können, darf man sich nur zwischen beiden Kräften irgend einen Punct als Drehungspunct denken.

f) Da man die statischen Momente der rechts und links drehenden Kräfte (Statik 19, Anmerk. 1) mit entgegengesetzten Zeichen in die Rechnung einführen muss, so pflegt man das Moment eines rechtsdrehenden Paares mit $+$, jenes eines linksdrehenden mit $-$ zu bezeichnen.

Hat also ein rechtsdrehendes Paar die Kraft P und den Arm p, so wie ein linksdrehendes die Kraft Q und den Arm q, so sind diese beiden Kräftepaare in die Rechnung mit $+Pp$ und $-Qq$ einzuführen und dadurch auch vollkommen bestimmt.

g) Endlich versteht man unter Achse eines Paares jede Gerade, welche auf der Paarebene perpendikulär steht; sie kann zugleich als Umdrehungsachse dieser Ebene gelten.

Dies vorausgeschickt, ergeben sich nun für die Kräftepaare die folgenden Sätze.

3. Die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte eines Paares auf was immer für einen in der Ebene des Paares liegenden Punct bezogen, ist gleich dem Momente des Kräftepaares.

Nimmt man O (Fig. 1) als Mittelpunct der statischen Momente der Kräfte P, P', welche ein Paar bilden, und setzt die auf die Richtung der Kräfte gefällten Perpendikel $Oa = a$ und $Ob = b$, so ist die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte P und P', welche ihrer entgegengesetzten Richtung wegen mit $+$ und $-$ zu bezeichnen sind, $= Pb - P'a$, oder wenn man den Arm des Paares $ab = p$ setzt, wodurch $b = a + p$ wird, sofort wegen $P' = P$:

$$P(a+p) - P'a = Pp,$$

so, dass also die Lage des Punctes O hierauf ohne Einfluss ist.

4. Zwei gleiche, in derselben Ebene liegende Kräftepaare (Erkl. *c*)) von entgegengesetzten Drehrichtungen, halten sich das Gleichgewicht.

Liegen die beiden Paare P und P' (von gleicher Grösse und gleichem Arm) wie in Fig. 2 auf- oder in einander, so wirken in jeder der beiden Geraden, wegen $P' = P$, zwei gleiche Kräfte nach gerade entgegengesetzter Richtung, die sich sonach aufheben oder im Gleichgewichte halten.

Schneiden sich, wie in Fig. 3, die beiden Paare P und P', so setze man die in den Puncten A und B angreifenden gleich grossen Kräfte P, P' zusammen, so erhält man zwei Resultirende R von gleicher Grösse, welche nach der Diagonale des verschobenen Quadrates CD in entgegengesetzter Richtung wirken, sich also wieder das Gleichgewicht halten.

Sind endlich die beiden Paare P, P', wie in Fig. 4, zu einander parallel, so füge man zu diesen noch zwei Paare Q, Q' hinzu, welche den gegebenen gleich sind, mit diesen in derselben Ebene liegen, sich schneiden und entgegengesetzte Drehrichtungen haben. Da sich diese hinzugefügten beiden Paare nach dem vorigen Falle das Gleichgewicht halten, so haben diese auf den Gleichgewichtszustand der ursprünglichen beiden Paare keinen Einfluss.

Nun steht aber nach dem vorigen Falle das Paar P mit jenem Q', so wie das Paar P' mit jenem Q im Gleichgewicht, folglich müssen, da, wie eben bemerkt, die Paare Q und Q' für sich im Gleichgewichte sind, auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare $(P, -P)$ und $(P', -P')$ an und für sich im Gleichgewichte stehen.

Zusatz. Aus diesem Lehrsatze folgt, dass man, ohne die Wirkung eines Kräftepaares zu ändern, dasselbe in dessen Ebene beliebig verschieben und so jeden beliebigen Punct derselben als Angriffspunct wählen kann.

5. Zwei in derselben Ebene wirksame Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen halten sich das Gleichgewicht.

Sind $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 5) die beiden Paare und p, q ihre Arme, folglich (Nr. **2**, *b*)) Pp, Qq ihre Momente; so verschiebe man das Paar Q in der zugehörigen Ebene so, dass es das andere Paar P rechtwinkelig durchschneidet, construire in den Puncten A und B aus den Kräften P und Q die beiden Resultirenden R, so sind diese erstens einander gleich, liegen wegen (nach der Voraussetzung) $Pp = Qq$, oder $P : Q = q : p$ in der Richtung der Diagonale des Rechteckes CD und sind entgegengesetzt gerichtet, folglich im Gleichgewicht. Da nun diese beiden Resultanten im Gleichgewichte stehen, so halten sich auch die beiden Kräftepaare selbst das Gleichgewicht.

Zusatz. Man kann daher bei einem Kräftepaar Kraft und Arm beliebig verändern, wenn nur das neue Paar das Moment des ursprünglichen behält. Soll ein Paar Pp in ein gleichgeltendes vom Arm s umgeändert werden, so hat man die Kraft S aus der Relation $Ss = Pp$ zu bestimmen. Für $s = 1$ heisst das Paar $S = Pp$ ein reducirtes Kräftepaar.

Anmerkung. Dass umgekehrt zwei in derselben Ebene liegende Paare von entgegengesetzten Drehrichtungen nur im Gleichgewichte stehen können, wenn sie gleiche Momente haben, lässt sich wie folgt beweisen.

Ist (Fig. 6) P das rechts- und Q das linksdrehende Paar, der Arm des erstern $AA' = p$, jener des letztern $BB' = q$; so verlege man die Angriffspuncte der vier Kräfte in irgend eine durch den Durchschnittspunct C aus AA' und BB' gehende Gerade CD; so ist für das Gleichgewicht, da die Kräfte P, Q die Gerade CD nach der einen, jene P', Q' nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben:

$$P \cdot CA + Q \cdot CB' = P' \cdot CA' + Q' \cdot CA \ldots (m)$$

oder wenn man $CA' = a$ und $CB' = b$ setzt, auch:

$$P(a + p) + bQ = aP' + Q'(b + q),$$

oder wegen $P' = P$ und $Q' = Q$, endlich:

$$Pp = Qq.$$

Diese letztere Relation folgt auch unmittelbar aus der vorigen (m), wenn man den Satz in Nr. 3 berücksichtigt.

6. Zwei Kräftepaare in derselben Ebene von gleichen Momenten und gleichen Drehrichtungen sind gleichgeltend.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden in Nr. 5 (Zusatz).

7. Zwei oder mehrere in einer Ebene liegende Kräftepaare lassen sich immer zusammensetzen oder zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen.

Um diese Zusammensetzung zu bewirken, bringe man nach dem Vorigen (Nr. 5, Zusatz) sämmtliche Paare auf denselben Arm und vereinige durch gehöriges Verschieben sowohl die rechts- als auch die linksdrehenden Paare mit einander; so entstehen dadurch zwei Paare von gleicher Breite und entgegengesetzten Drehrichtungen, die sich wieder zu einem einzigen Kräftepaar von demselben Arm vereinigen lassen, wodurch endlich entweder ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder Gleichgewicht entsteht.

Hat man z. B. die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, Rr mit den beiden linksdrehenden Qq, Ss zu vereinigen, so bringe man z. B. die drei letztern auf den Arm oder die Breite p des erstern, d. h. man verwandle die Paare Rr, Qq, Ss in die gleichgeltenden $R'p$, $Q'p$, $S'p$, indem man die Kräfte R', Q', S' aus den Relationen $R'p = Rr$, $Q'p = Qq$, $S'p = Ss$ bestimmt.

Hat man nun durch die genannte Verschiebung die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, $R'p$, so wie auch die beiden linksdrehenden $Q'p$ $S'p$ mit einander vereinigt und wieder, wie in Fig. 7, gehörig verschoben, so erhält man das rechtsdrehende Paar $P + R'$ und das linksdrehende $Q' + S'$ und aus diesen beiden Paaren endlich, jenachdem $P + R' >, <, = Q' + S'$ ist, als Resultat ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder das Gleichgewicht.

Ist U das resultirende Kräftepaar, so ist also $U = (P + R') - (Q' + S')$, oder wenn man mit dem gemeinschaftlichen Arm p multiplicirt:

$$Up = Pp + R'p - Q'p - S'p,$$

oder mit Rücksicht auf die Erklärung f) in Nr. 1, im algebraischen Sinne genommen:

$$Up = Pp + R'p + Q'p + S'p.$$

Stellt man endlich für $R'p$, $Q'p$ ... die ursprünglichen Werthe wieder her, auch:

$$Up = Pp + Rr + Qq + Ss.$$

Aus dieser Relation ergibt sich ganz einfach das Gesetz, nach welchem sich das resultirende Kräftepaar durch Rechnung finden lässt.

Sind nämlich Pp, $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ ... die Momente der verschiedenen in derselben Ebene liegende Kräftepaare, so wie Uu jenes des resultirenden Paares, so ist:

$$Uu = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma (Pp),$$

dabei diese Summe der Momente im algebraischen Sinne verstanden.

Von den Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen.

8. Liegen zwei Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen in zwei

parallelen, fest mit einander verbundenen Ebenen, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Es seien M, N (Fig. 8) die beiden parallelen Ebenen und $P_1 p_1$, $Q_1 q_1$ die Momente der in diesen liegenden Paare; also nach der Voraussetzung $P_1 p_1 = Q_1 q_1$. Man verwandle zuerst jedes Paar nach Nr. **5** (Zusatz) in ein gleichgeltendes von einem gleichen, z. B. dem Arm $AB = CD = a$, wodurch die Kräfte P_1, Q_1 in P und Q übergehen mögen, so, dass $Pa = Qa = P_1 p_1 = Q_1 q_1$, also $Q = P$ wird; hierauf verschiebe man diese in den Ebenen M und N liegenden Paare $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ so, dass die Arme AB und CD, mithin auch die Kräfte selbst zu einander parallel werden. Dies vorausgesetzt, geben die beiden gleich (in der Zeichnung aufwärts) gerichteten Kräfte P und Q die Resultirende $R = P + Q = 2P$, so wie die beiden nach entgegengesetzter Richtung (hier nach abwärts wirkenden) Kräfte P' und Q' die Resultante $R' = P' + Q' = 2P$.

Da nun diese beiden Resultirenden, welche mit den Componenten parallel laufen, einander gleich sind und in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte O der beiden in der durch AB und CD gedachten Ebene liegenden Geraden AC und BD angreifen und daher gerade entgegengesetzt wirken, so heben sie sich auf, und es sind sonach auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare selbst im Gleichgewicht.

Zusatz. Nach diesem Verfahren lässt sich also (da die gegenseitige Entfernung der parallelen Ebenen keinen Einfluss hat) ein Kräftepaar mit seiner Ebene parallel beliebig verschieben. Auch lassen sich eben so beliebig viele in parallelen Ebenen liegende Paare in eine einzige Ebene bringen und nach Nr. **7** zu einem Kräftepaar vereinigen.

Hieraus folgt, dass auch umgekehrt (Nr. **5**, Anmerkung) zwischen zwei in parallelen Ebenen liegenden Paaren von entgegengesetzten Drehrichtungen das Gleichgewicht nur bestehen kann, wenn ihre Momente einander gleich sind.

9. Liegen zwei Kräftepaare in zwei sich schneidenden Ebenen, so lassen sich diese durch ein einziges Kräftepaar ersetzen.

Es seien MN, $M'N'$ (Fig. 9) die beiden in AB sich schneidenden Ebenen. Man bringe wieder beide Paare auf dieselbe

Breite $AB = a$, wofür die Kräfte dann $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ in den Ebenen MN und $M'N'$ sein mögen. Verschiebt man jetzt die Paare in den Ebenen so, dass von den vier Kräften je zwei in den Puncten A und B angreifen und auf der Durchschnittslinie AB normal stehen; so liegen von den vier Kräften der beiden Paare jene P, Q' und P', Q in parallelen auf AB normalen Ebenen. Construirt man daher aus P, Q' und P', Q die Resultirenden R, R', so sind diese (wegen $P' = P$ und $Q' = Q$) einander gleich, liegen in einer Ebene, welche mit den gegebenen dieselbe Durchschnittslinie AB hat und wirken nach parallelen, jedoch entgegengesetzten Richtungen; es bildet also (R, R') das resultirende, den beiden gegebenen gleichgeltende Kräftepaar von der Breite a, oder es ist Ra das neue oder resultirende Paar.

Ist nun $MAQ' = \alpha$ der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen, so ist (Statik, Nr. 8):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \, Cos\, \alpha} \ldots (1).$$

Ist $RAQ' = \varphi$ der Neigungswinkel der Ebene des resultirenden Paares R mit der Ebene $M'N'$ des Paares Q, so ist:

$$Sin\, \varphi = \frac{P \, Sin\, \alpha}{R} \ldots (2),$$

wodurch auch die Lage der Ebene des neuen Paares bestimmt ist.

Zusatz 1. Waren $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ die ursprünglich gegebenen Paare, so hat man zur genannten Umwandlung derselben auf die gemeinschaftliche Breite a die beiden Relationen $Pa = P_1 p_1$ und $Qa = P_2 p_2$. Multiplicirt man daher die vorige Gleichung (1) durchaus mit a, so erhält man:

$$Ra = \sqrt{(Pa)^2 + (Qa)^2 + 2\, Pa \,.\, Qa \,.\, Cos\, \alpha},$$

oder mit Rücksicht auf die vorigen Relationen:

$$Ra = \sqrt{(P_1 p_1)^2 + (P_2 p_2)^2 + 2\, P_1 p_1 \,.\, P_2 p_2 \,.\, Cos\, \alpha} \ldots (1').$$

Auf ähnliche Weise nimmt auch die obige Gleichung (2) die Form an:

$$Sin\, \varphi = \frac{P_1 p_1 \, Sin\, \alpha}{Ra} \ldots (2').$$

Wirken nun aber zwei Kräfte $P_1 p_1$ und $P_2 p_2$ auf einen Punct unter einem Winkel α und ist Ra ihre Resultirende, sowie φ der Winkel, welchen dieselbe mit der Kraft $P_2 p_2$ einschliesst; so erhält man zur Bestimmung der Grösse und Lage derselben nach Nr. 8 (Statik) genau die vorigen beiden Relationen (1') und (2'). Hieraus folgt also, dass man die in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare genau so zerlegen und zusammensetzen kann, wie einfache auf einen Punct wirkende, in einer Ebene liegende Kräfte, wenn man statt der Kräfte die Momente der Paare, und statt der Winkel der Kräfte die Winkel der Ebenen setzt, in welchen die Kräftepaare liegen.

Zusatz 2. Die Zerlegung und Zusammensetzung mehrerer in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare lässt sich oft durch Einführung ihrer Umdrehungsachsen (Erkl. *g*)) und zwar in folgender Weise vereinfachen.

Es seien MM, NN, RR (Fig. 9′) die Durchschnittslinien dreier Paarebenen mit der Ebene des Papiers, welche auf der durch A gehenden gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der drei Ebenen perpendikulär sein soll. Da man aber die Achse eines Paares durch jeden beliebigen Punct der Paarebene legen kann, indem sich das Paar in seiner Ebene willkürlich verschieben lässt; so können die in der Papierebene durch den Punct A auf diese Durchschnittslinien gezogenen Perpendikel Am, An, Ar für die Achsen dieser drei Paare genommen werden, welche offenbar unter einander dieselben Winkel, wie die entsprechenden Paarebenen selbst einschliessen.

Ist nun das eine in der Ebene RR liegende Paar die Resultirende aus den beiden andern in den Ebenen MM, NN liegenden Paaren, so bildet nach der vorigen Bemerkung dessen Moment Ra die Diagonale des aus den Momenten $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ construirten Parallelogrammes. Trägt man daher diese Momente auf den Achsen Am, An auf, ist nämlich $Aa = P_1 p_1$, $Ab = P_2 p_2$ und ergänzt das Parallelogramm; so ist die Richtung der Diagonale Ar desselben nicht nur die Achse des resultirenden Paares, sondern zugleich auch $Ac = Ra$ dessen Moment.

Zusatz 3. Da Kräftepaare keine anderen gegenseitigen Lagen als die bisher betrachteten haben können, so folgt schliesslich der allgemeine Satz, dass sich beliebig viele Kräftepaare, in beliebigen Ebenen liegend, immer zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen lassen.

10. Vereinigung eines Kräftepaares mit einer einzelnen Kraft.

Liegt die gegebene, im Puncte A (Fig. 10) angreifende Kraft P mit dem Paar Qq in derselben Ebene, so verwandle man zuerst das letztere in ein gleichgeltendes von der Kraft P, d. i. wenn a der entsprechende Arm ist (aus $Pa = Qq$ zu bestimmen) in das Paar Pa. Hierauf verschiebe man das neue Paar (P, P') in seiner Ebene so, dass die gegebene Kraft P durch die eine Kraft P' des Paares vernichtet oder aufgehoben wird; so bleibt als Resultirende noch die eine durch den Punct A' (welcher vom ursprünglichen A verschieden ist) gehende Kraft P, welche der gegebenen gleich, mit ihr parallel und nach derselben Richtung wirksam ist.

Liegt die gegebene Kraft P zwar nicht in der Ebene des Paares selbst, jedoch mit dieser parallel, so verschiebe man diese Ebene mit sich parallel (wodurch Nr. 8, Zusatz, in der Wirkung des Paares nichts geändert wird) bis sie die gegebene Kraft aufnimmt, und verfahre im Uebrigen wie vorhin.

Zusatz. Hat endlich die gegebene Kraft eine solche Lage, dass sie die Ebene des Paares schneidet, so lässt sich diese Vereinigung nicht bewerkstelligen.

11. Verschiebung einer Kraft nach paralleler Richtung.

Will man eine Kraft P, welche im Puncte A (Fig. 11) angreift, mit sich selbst parallel so verschieben, dass sie durch irgend einen Punct O geht, so darf man durch diesen letztern Punct nur zwei mit der gegebenen Kraft P gleiche, parallel und entgegengesetzt wirkende (sich also aufhebende) Kräfte P', P'' anbringen; so hat man (wie vorhin) durch den Punct O die Kraft P' mit der ursprünglichen P gleich, parallel und in derselben Richtung, so wie das Paar (P, P'') vom Arm $BO = a$ wirkend, dessen Moment Pa gleich ist dem statischen Momente der gegebenen Kraft P auf den neuen Angriffspunct O bezogen. Die drei Kräfte $P = P' = P''$ bewirken also dasselbe, was die Kraft P allein bewirkt.

Ist also z. B. ein Körper im Puncte O festgehalten und durch eine excentrisch wirkende Kraft P in A angegriffen, so wird, wenn man nach dem eben angedeuteten Verfahren diese Kraft P in die drei Kräfte P, P', P'' auflöst, das Paar (P, P'') auf O keinen Druck, sondern blos das Bestreben zu einer Drehung, welche nur durch ein in derselben Ebene wirkendes Paar $Qb = Pa$ aufgehoben werden kann, äussern, während ein Druck auf den Punct O durch die Kraft $P' = P$ in einer mit der Kraft P parallelen Richtung erzeugt wird.

Anwendungen.

12. Um von den bisher entwickelten Eigenschaften und Sätzen der Kräftepaare einige Anwendungen zu zeigen, so wollen wir zuerst zwei in derselben Ebene liegende Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ betrachten, welche gleiche Momente $Pa = Qb$ und entgegengesetzte Drehrichtungen haben, und so angeordnet sind, wie es aus Fig. 12 zu ersehen.

Da in diesem Falle (Nr. 5) Gleichgewicht besteht und die in C wirkende Kraft $P + Q = R$ der Resultante aus den beiden in A und B wirkenden parallelen Kräften P, Q gleich und entgegengesetzt ist; so folgt, dass die Resultirende aus zwei parallelen Kräften der Summe dieser Kräfte gleich und mit diesen parallel ist, und dass ferner jede beliebig gezogene Gerade $A'B'$ von den drei parallelen Kräften, wegen (nach der Voraussetzung) $Pa = Qb$, oder

$$P : Q : P + Q = b : a : a + b,$$

im Verhältniss von

$$b' : a' : a' + b' = P : Q : R$$

geschnitten wird. (Vergleiche §. 20.)

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies System von Angriffspuncten.

13. In einem freien Systeme von n Puncten $M, M_1, M_2 \ldots$ (Fig. 13) wirken die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach beliebigen Richtungen; die Coordinaten dieser Angriffspuncte auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem AX, AY, AZ bezogen, seien der Reihe nach x, y, z, $x_1 y_1 z_1$ u. s. w., so wie die Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit den Axen der x, y, z bilden, beziehungsweise α, β, γ, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ u. s. w.

Betrachtet man nun zuerst die Kraft P an ihrem Angriffspunct M, so kann man diese, wenn man durch den Ursprung A der Coordinaten zwei mit P gleiche und parallele entgegengesetzt wirkende Kräfte P', P'' hinzufügt, diese Kraft P ohne Aenderung nach Nr. **11** in eine Kraft P', welche in A angreift und ein Paar (P, P'') mit den Angriffspuncten M und A auflösen.

Verfährt man auf gleiche Weise auch mit den übrigen Kräften $P_1, P_2 \ldots$, so entstehen:

1. n Kräfte im Puncte A wirksam, welche den gegebenen gleich und parallel sind, und mit ihnen dieselbe Richtung haben;

2. n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich sind und den Punct A, so wie beziehungsweise die Puncte $M, M_1 \ldots$ als Angriffspuncte haben.

Die Resultante der in A wirksamen n Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ ist aber (Statik Nr. **14**):

$$R = \sqrt{(\Sigma P \, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \beta)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \gamma)^2} \ldots (a),$$

so wie ihre Lage oder Richtung aus den Relationen:

$$Cos\, a = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \alpha)}{R}, \quad Cos\, b = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \beta)}{R}, \quad Cos\, c = \frac{\Sigma (P \, Cos\, \gamma)}{R} \ldots (b)$$

bestimmt wird, wenn a, b, c die Winkel der Resultante mit den Axen der x, y, z bezeichnen.

Was ferner die n Kräftepaare $(P, -P)$, $(P_1, -P_1) \ldots$ betrifft, so lassen sich diese (Nr. **9**, Anmerk.) immer zu einem Paar Q vereinigen und es kommt jetzt nur noch darauf an, die Grösse von Q zu bestimmen.

14. Zu diesem Behufe zerlege man zuerst die zu dem Paare P (in A und M wirksam) gehörigen Kräfte in drei Componenten nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinatenaxen x, y, z; werden diese beziehungsweise durch p, q, r bezeichnet, so sind diese:

$$p = P \, Cos\, \alpha, \quad q = P \, Cos\, \beta, \quad r = P \, Cos\, \gamma \ldots (c).$$

Dadurch entstehen aber drei Kräftepaare $(p, -p)$, $(q, -q)$, $(r, -r)$ mit den Angriffspuncten M und A und den Momenten $p \cdot AE$, $q \cdot AF$, $r \cdot AC$, d. i.:

$$P \, Cos\, \alpha \sqrt{y^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \beta \sqrt{x^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \gamma \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (d).$$

Bringt man jetzt in den Puncten B und C der Geraden BC nach ihrer Richtung zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte $p'' = p' = p$ an, wodurch in dem Systeme nichts geändert wird, vereinigt die Kraft p in A mit p' in C, so wie die Kraft p in

M mit jener p'' in B zu einem Paar; so hat man das in A und M wirksame Paar $p\,.\,AE$ in die zwei ebengenannten Paare (p, p'), (p, p''), d. i. in die Paare py und pz aufgelöst oder zerlegt.

Auf dieselbe Weise kann man das Kräftepaar $q\,.\,AF$ in die beiden Paare qx (in A und C) und qz (in M und D), so wie das Kräftepaar $r\,.\,AC$ in die beiden äquivalenten Paare rx (in A und F) und ry (in D und M) auflösen (wenn man nämlich beziehungsweise in C und D $q' = q'' = q$ in der Geraden CD, und in F und D nach der Geraden FD die Kräfte $r' = r'' = r$ in entgegengesetzter Richtung anbringt).

Durch diese Zerlegungen haben wir daher anstatt der vorigen drei Kräftepaare, ausgedrückt in Relat. (d), die sechs Paare:

$$py, \; qx, \; rx, \; pz \text{ und } qz, \; ry.$$

Von diesen liegen das 1. und 2. Paar in der Ebene der xy, das 3. und 4. Paar in der Ebene der xz und einer mit dieser parallelen Ebene, so wie das 5. und 6. Paar in einer mit der Ebene der yz parallelen Ebene.

Verlegt man, was nach Nr. 8, Zusatz, für Paare in parallelen Ebenen gestattet ist, das 4. Paar in die Ebene der xz, so wie das 5. und 6. Paar in jene der yz und versieht die sämmtlichen Paare nach Nr. 2, f) mit ihren Vorzeichen, indem man die Richtung von der Seite der positiven x gegen jene der positiven z, von da zu den positiven y und von da zurück zu den positiven x als die rechtsdrehende, mithin die entgegengesetzte als die linksdrehende nimmt; so hat man statt der im Puncte M angreifenden Kraft, ausser jener bereits berücksichtigten durch A gehenden gleichen Kraft P', die in den drei coordinirten Ebenen der xy, xz und yz liegenden Paare (diese beziehungsweise von den positiven z, y und x aus betrachtet), d. i. ihre Momente:

$$py - qx, \quad rx - pz \text{ und } qz - ry,$$

oder wenn man für p, q, r die obigen Werthe (c) setzt, auch:

$$Py \, Cos\,\alpha - Px\, Cos\,\beta, \; Px\, Cos\,\gamma - Pz\, Cos\,\alpha, \; Pz\, Cos\,\beta - Py\, Cos\,\gamma \,.\,.\,(e).$$

Verfährt man nun, wie es mit dem Kräftepaar P geschehen, eben so auch mit den übrigen Paaren P_1, P_2..., so erhält man schliesslich durch gehörige Vereinigung die drei beziehungsweise in den Ebenen der xy, xz, yz liegenden Kräftepaare L, M, N, deren Werthe sind:

$$\left.\begin{array}{l} L = \Sigma[P(y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta)] \\ M = \Sigma[P(x\, Cos\, \gamma - z\, Cos\, \alpha)] \\ N = \Sigma[P(z\, Cos\, \beta - y\, Cos\, \gamma)] \end{array}\right\} \ldots (f).$$

Werden nun in gegebenen speciellen Fällen diese drei Kräftepaare nach dem in Nr. **9** angegebenen Verfahren zusammengesetzt, so erhält man das genannte resultirende Kräftepaar Q, dessen Ebene sofort durch den Ursprung A geht.

Liegt, als besonderer Fall, die Resultante R (Relat. (a)) in der Ebene dieses Paares Q oder mit dessen Ebene parallel, so lässt sich die Kraft R nach Nr. **10** mit diesem Paar Q vereinigen und man erhält dadurch eine Kraft $R' = R$, welche mit R parallel und gleich gerichtet ist, jedoch einen andern Angriffspunct besitzt.

Ausser diesem besonders günstigen Fall würden sich die n Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ des Systemes blos durch eine Kraft R und ein Kräftepaar Q ersetzen lassen.

15. Für das vollständige Gleichgewicht muss sowohl $R = 0$ als auch $Q = 0$ sein; daraus folgen die Bedingungsgleichungen (Relat. (a) und (f)):

$$\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0,\ \Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0,\ \Sigma(P\, Cos\, \gamma) = 0$$

und $$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

(Vergleiche Statik Nr. **20**, Anmerk. 2, Relat. (s).)

Finden von diesen sechs Bedingungsgleichungen blos die drei ersten Statt, so besteht blos hinsichtlich der fortschreitenden, keineswegs aber auch bezüglich der drehenden Bewegung Gleichgewicht.

Bestehen dagegen blos die drei letztern Bedingungsgleichungen, ist also R nicht Null, so findet zwar keine drehende, wohl aber eine fortschreitende Bewegung Statt.

16. Sind, als specieller Fall, die sämmtlichen Kräfte zu einander parallel und wirken diese theils nach einer, theils nach der entgegengesetzten Richtung; so sind die Winkel α für die in derselben Richtung wirkenden Kräfte einander gleich, dagegen gehen sie für die entgegengesetzt wirkenden Kräfte in die Supplementwinkel über; dasselbe gilt auch für die Winkel β und γ.

Hat nun z. B. die Kraft P_r gegen die übrigen die entgegengesetzte Richtung, so geht dafür die Componente $P_r\, Cos\, \alpha_r$ in $P_r\, Cos\, (180^0 - \alpha_r) = - P_r\, Cos\, \alpha_r$, gerade so über, als ob man den

Winkel α_r als spitz beibehalten, dafür aber die Kraft P_r negativ genommen hätte. Ueberträgt man daher einfach die verschiedenen Zeichen der Cosinus auf die Kräfte selbst, wodurch also $\Sigma(P)$ im algebraischen Sinne zu verstehen ist; so hat man aus Nr. **13**, Relat. (a):

$$R = \sqrt{(\Sigma P)^2 \, Cos\, \alpha^2 + (\Sigma P)^2 \, Cos\, \beta^2 + (\Sigma P)^2 \, Cos\, \gamma^2} =$$
$$\Sigma(P) \sqrt{Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2},$$

oder wegen $Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2 = 1$ (Comp. §. 580) auch:

$$R = \Sigma(P) \ldots (g),$$

d. h. die Resultante ist gleich der algebraischen Summe aus den parallelen Kräften.

Ferner ist, Nr. **13**, Relat. (b):

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \alpha}{\Sigma(P)}, \quad Cos\, b = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \beta}{\Sigma(P)}, \quad Cos\, c = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \gamma}{\Sigma(P)},$$

d. i. $\quad Cos\, a = Cos\, \alpha, \quad Cos\, b = Cos\, \beta, \quad Cos\, c = Cos\, \gamma,$

oder: $\quad a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma,$

d. h. die Resultirende R ist mit den gegebenen Kräften parallel.

Was ferner die Relationen (f) (Nr. **14**) betrifft, so gehen sie für diesen Fall, wegen $Cos\, \alpha_1 = Cos\, \alpha_2 \ldots = Cos\, \alpha$, $Cos\, \beta_1 = Cos\, \beta_2 = \ldots = Cos\, \beta$ und $Cos\, \gamma_1 = Cos\, \gamma_2 = \ldots = Cos\, \gamma$ über in:

$$\left.\begin{aligned} L &= Cos\, \alpha\, \Sigma(Py) - Cos\, \beta\, \Sigma(Px) \\ M &= Cos\, \gamma\, \Sigma(Px) - Cos\, \alpha\, \Sigma(Pz) \\ N &= Cos\, \beta\, \Sigma(Pz) - Cos\, \gamma\, \Sigma(Py) \end{aligned}\right\} \ldots (h).$$

17. Die durch das in Nr. **13** eingeschlagene Verfahren entstehenden n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich und parallel sind, fallen im vorliegenden speciellen Fall in Ebenen, welche sich sämmtlich in einer mit den Kräften parallelen Geraden AS schneiden, daher liegt auch (Nr. **9**) das resultirende Paar Q in einer durch diese Gerade AS gehenden Ebene; da nun aber die im Puncte A angreifende Resultante R ebenfalls mit AS zusammenfällt, so liegt diese Kraft mit dem Paar Q in einerlei Ebene und lässt sich daher (Nr. **10**) mit diesem Paare Q vereinigen.

Verwandelt man nämlich, wie es in Nr. **10** angedeutet, das Paar in ein gleichgeltendes von der Kraft R, setzt also

$$Q = Rr \ldots (i)$$

und verschiebt das letztere oder neue Paar so, dass dadurch die in A angreifende Mittelkraft R aufgehoben wird, so bleibt als neue Resultirende eine Kraft R' übrig, welche der Mittelkraft R gleich, mit ihr parallel und gleich gerichtet ist, nur hat diese jetzt einen andern Angriffspunct O.

Um diesen Angriffs- oder Mittelpunct der parallelen Kräfte zu bestimmen, seien X, Y, Z dessen Coordinaten. Zerlegt man die durch diesen Punct gehende Mittelkraft R in drei Seitenkräfte parallel mit den rechtwinkeligen Coordinaten-Axen und verfährt mit diesen letztern genau so, wie dies in Nr. **14** mit den Componenten p, q, r geschehen; so erhält man drei Kräftepaare, welche in den coordinirten Ebenen der xy, xz, yz liegen, und zwar sind diese (analog mit den Relat. (e) in Nr. **14**) beziehungsweise:

$$\left.\begin{array}{r} RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta,\ \ RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha, \\ RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma \end{array}\right\}\ldots(k).$$

Da nun die Kräftepaare Q und Rr (vorige Relation (i)) einander gleich sind, so müssen es auch ihre in einerlei Ebene liegenden Componenten sein, d. i. es müssen die vorigen Ausdrücke (k) den obigen von L, M, N (Relat. (h)) gleich sein; man hat daher die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta &= Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px), \\ RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha &= Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) - Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz), \\ RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma &= Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py), \end{aligned}$$

aus welchen sofort die Coordinaten X, Y, Z zu bestimmen sind.

Multiplicirt man zu diesem Behufe die erste dieser Gleichungen mit $Cos\,\gamma$, die zweite mit $Cos\,\beta$ und addirt dann beide Producte, so entsteht die mit $Cos\,\alpha$ multiplicirte dritte Gleichung mit entgegengesetztem Zeichen, oder es ist überhaupt, wenn man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $Cos\,\gamma$, $Cos\,\beta$, $Cos\,\alpha$ multiplicirt, die Summe aus je zweien immer gleich der dritten mit entgegengesetztem Zeichen, so, dass man eigentlich nur zwei verschiedene oder unabhängige Gleichungen hat, indem die dritte nur eine Folge der beiden andern ist.

Benützt man daher blos die beiden ersten Gleichungen und bringt diese auf die Form:

$$\begin{aligned} [RX - \Sigma(Px)]\,Cos\,\beta + [\Sigma(Py) - RY]\,Cos\,\alpha &= 0, \\ [RZ - \Sigma(Pz)]\,Cos\,\alpha + [\Sigma(Px) - RX]\,Cos\,\gamma &= 0, \end{aligned}$$

so sieht man sogleich, dass wenn die Kräfte P und ihre Coordinaten x, y, z ihre Unabhängigkeit und Allgemeinheit behalten sollen, diese Gleichungen nur Null werden können, indem jeder einzelne Summand Null wird. Da ferner von den beiden Factoren dieser Summanden jener $Cos\,\alpha$ oder $Cos\,\beta$ oder $Cos\,\gamma$ im Allgemeinen nicht Null ist, so muss es sofort der andere sein; dadurch erhält man endlich die drei verschiedenen Bedingungsgleichungen:

$$RX - \Sigma(Px) = 0,\; RY - \Sigma(Py) = 0,\; RZ = \Sigma(Pz)$$

und daraus die gesuchten Coordinaten, wegen $R = \Sigma(P)$ (Relat. (g)):

$$X = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\; Y = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\; Z = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \ldots (l).$$

(Man vergleiche Statik Nr. **15**.)

18. Findet in dem Systeme der parallelen Kräfte vollständiges Gleichgewicht Statt, so muss, da ein Kräftepaar Q mit einer einzelnen Kraft R nicht im Gleichgewichte, also $Q + R$ nur Null sein kann, wenn sowohl $R = 0$ als $Q = 0$ ist; so folgt, dass wegen $R = \Sigma(P) = 0$ für's Erste, damit keine fortschreitende Bewegung Statt hat, die algebraische Summe der Kräfte Null sein muss.

Was die zweite Bedingungsgleichung $Q = 0$ betrifft, welche sich auf das Drehbestreben des Systemes bezieht, so zerfällt diese (Relat. (h) Nr. **16**) in die drei folgenden: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so dass man also für das vollständige Gleichgewicht scheinbar die vier Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0,\; Cos\,\alpha\, \Sigma(Py) - Cos\,\beta\, \Sigma(Px) = 0,$$
$$Cos\,\gamma\, \Sigma(Px) - Cos\,\alpha\, \Sigma(Pz) = 0,\; Cos\,\beta\, \Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\, \Sigma(Py) = 0$$

erhält, allein da von diesen drei letztern Gleichungen, wie bereits bemerkt, jede eine Folge der beiden übrigen ist, so reduciren sich diese eigentlich auf drei, d. i. auf $R = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Wird von diesen Bedingungen blos die erste erfüllt, so findet zwar keine progressive, wohl aber eine drehende Bewegung statt, bestehen blos die beiden letztern Bedingungsgleichungen, so hat das System keine drehende, dafür aber eine fortschreitende Bewegung. Im erstern Falle reducirt sich das System der Kräfte auf ein Paar, und es besitzt dann keinen Mittelpunct der Kräfte.

19. Wählt man das rechtwinkelige Coordinatensystem so, dass die Kräfte mit einer, z. B. mit der Achse der z parallel laufen, folglich auf der Ebene der xy perpendikulär stehen, so folgen für das Gleichgewicht aus den vorigen Relationen, wegen $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ und $\gamma = 0$, die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(P) = 0, \\ \Sigma(Px) = 0,\ \ \Sigma(Py) = 0 \end{array}\right\} \dots (m),$$

d. h. es muss sowohl die algebraische Summe der Kräfte, als auch jene der Momente auf zwei sich rechtwinkelig schneidenden mit den Kräften parallelen Ebenen Null sein.

20. Wirken die sämmtlichen parallelen Kräfte nach ein und derselben Richtung, so ist ihre Resultirende $R = \Sigma(P)$ gleich der Summe der Kräfte, und ihr Angriffspunct liegt im Mittelpunct der Kräfte, dessen Coordinaten aus den obigen Relationen (l) gefunden werden.

Sind sämmtliche n Kräfte einander gleich, so ist

$$R = \Sigma(P) = nP,$$

$$X = \frac{P\Sigma(x)}{nP} = \frac{1}{n}\Sigma(x),\ \ Y = \frac{1}{n}\Sigma(y),\ \ Z = \frac{1}{n}\Sigma(z),$$

und es heisst in diesem Falle der Angriffspunct X, Y, Z Mittelpunct der mittlern Abstände.

21. Aus dem oben in Nr. **13** und ferner behandelten allgemeinen Falle der wirkenden Kräfte im Raume lassen sich auch leicht die Relationen und Bedingungen für den besondern Fall ableiten, in welchem die sämmtlichen, übrigens in dieser nach beliebigen Richtungen wirkenden n Kräfte in einer Ebene liegen.

Nimmt man nämlich diese Ebene zu einer der coordinirten, z. B. zur Ebene der xy, so erhält man aus den Relationen (a) und (b) in Nr. **13** wegen $z = z_1 = z_2 = \dots = 0$ und $\gamma = 90^0$, sofort:

$$R = \sqrt{(\Sigma P\, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P\, Cos\, \beta)^2},$$

und

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P\, Cos\, \alpha)}{R},\ \ Cos\, b = \frac{\Sigma(P\, Cos\, \beta)}{R}.$$

Da ferner hier das Kräftepaar Q mit jenem L zusammenfällt, so hat man (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$Q = L = \Sigma[P(y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta)],$$

oder da, wenn p das aus einem Punct der Kraftebene auf die Kraft P gefällte Perpendikel bezeichnet, sofort (Statik Nr. **20**, Anmerk. 1) $p = y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta$ ist, auch:

$$Q = \Sigma(Pp).$$

Da sich nun das Paar Q mit der Kraft R, welche zusammen in derselben Ebene liegen, nach Nr. **10** vereinigen lassen, indem man $Q = Rr$ setzt, so hat man endlich statt der vorigen Relation, jene:

$$Rr = \Sigma(Pp),$$

woraus sofort folgt, dass das statische Moment der Mittelkraft gleich ist der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte, diese Momente auf einen beliebigen in der Ebene augenommenen Punct bezogen. (Vergl. Statik Nr. **20**, Relat. (2).)

Für das Gleichgewicht erhält man aus den obigen sechs Relationen in Nr. **15** die drei Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0,\ \Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0 \text{ und } L, \text{ d. i. } \Sigma(Pp) = 0.$$

(Vergl. Statik Nr. **20**, Anmerk. 1 Relat. (l).)

22. Sind die in der eben betrachteten Ebene liegenden Kräfte unter einander parallel, so erhält man wegen $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta$ entweder aus der unmittelbar vorhergehenden, noch einfacher aber aus den Relationen in Nr. **16** und **17**:

$$R = \Sigma(P),\ a = \alpha,\ b = \beta,\ Q = Rr = \Sigma(Pp),\ RX = \Sigma(Px) \text{ und } RY = \Sigma(Py).$$

Für das vollständige Gleichgewicht erhält man aus Nr. **18** die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } Cos\, \alpha\, \Sigma(Py) - Cos\, \beta\, \Sigma(Px) = 0.$$

23. Verschiebt man die Coordinatenaxen X, Y in ihrer Ebene so, dass jene Y zu den gegebenen Kräften parallel wird, so erhält man wegen $\alpha = 90^0$ und $\beta = 0$, aus den letztern Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } \Sigma(Px) = 0,$$

es muss nämlich sowohl die algebraische Summe der Kräfte als auch die ihrer statischen Momente auf den Anfangspunct der Coordinaten (welcher sofort ein willkürlicher ist) gleich Null sein.

Besteht blos die erste dieser beiden Bedingungsgleichungen, so findet keine fortschreitende, dagegen eine drehende Bewegung Statt. Das Umgekehrte tritt ein, wenn von diesen Gleichungen nur die letztere erfüllt wird.

24. Ist das in Nr. **13** und ferner betrachtete allgemeine System nicht vollkommen frei, sondern besitzt dasselbe z. B. einen festen Punct O, so vermindert sich die Zahl der für das Gleichgewicht gefundenen Bedingungsgleichungen von sechs auf drei. Nimmt man nämlich diesen Punct O zum Ursprung der Coordinaten, so ist er auch zugleich der Angriffspunct der n Kräfte und vernichtet sonach die Resultirende R von selbst; es bleibt daher von den obigen Bedingungsgleichungen $R = 0$ und $Q = 0$ für diesen Fall nur noch die letztere, welche sofort wieder in die drei Bedingungsgleichungen:

$$L = 0, \; M = 0, \; N = 0$$

für die Ebenen der xy, xz, yz zerfällt.

Der auf den Punct O ausgeübte Druck ergibt sich aus dem Werthe von R.

25. Hat das System zwei feste Puncte O und S, so wähle man wieder den Punct O zum Anfangspunct der Coordinaten, ferner die Gerade OS zu einer, z. B. zur Achse Z. Dies vorausgesetzt, wird wie zuvor die Resultirende R der n Kräfte durch den festen Punct O aufgehoben, und es bleiben wieder nur in den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise die drei Kräftepaare L, M, N übrig.

Da jedoch die Gerade OS eine Drehungsachse des Systemes bildet, so werden die in den Ebenen xz und yz liegenden Paare M und N durch diese feste Achse aufgehoben, so, dass nur noch die einzige Bedingungsgleichung $L = 0$, d. i. (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$\Sigma[P(y \, Cos \, \alpha - x \, Cos \, \beta)] = 0$$

bestehen bleibt.

26. Kann sich das System (oder der Körper) längs dieser Achse OS verschieben, so werden von den drei Componenten:

$$\Sigma(P \, Cos \, \alpha), \; \Sigma(P \, Cos \, \beta), \; \Sigma(P \, Cos \, \gamma),$$

welche die Resultirende R (Nr. **13**, (a)) bilden, nur die beiden erstern, d. i. jene nach den Achsen der x und y aufgehoben, so, dass also die Bedingungsgleichung für die letztere Componente, so wie jene für die Drehung noch bestehen bleibt.

Man hat nämlich in diesem Falle für das Gleichgewicht die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P \, Cos \, \gamma) = 0 \text{ und } \Sigma[P(y \, Cos \, \alpha - x \, Cos \, \beta)] = 0.$$

Um dabei auch die auf die beiden festen Puncte O und S stattfindenden Drücke R und R' zu finden, so ersetze man diese Pressungen durch die sogenannten Reactionskräfte, d. h. durch Kräfte R und R', welche in den Puncten O und S den Drücken gleich, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht werden. Mit Hinzufügung oder Einführung dieser beiden Kräfte R, R' kann man das System sofort wieder wie ein vollkommen freies behandeln.

Man zerlege nun jede dieser beiden Kräfte R und R' (Fig. 14) in die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten p, q, r und p', q', r' und bringe ausserdem im Puncte O nach der Achse der x die zwei gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte $p' = p''$, so wie nach der Achse der y jene $q' = q''$ an, so bilden sich ausser den Kräften $p + p'$, $q + q'$ und r in O und r' in S nach den drei Achsen in den angedeuteten Richtungen noch die in den Puncten S und O angreifenden Paare (p', p'') und (q', q'').

Haben die beiden Puncte O und S die Entfernung $OS = a$ von einander, so müssen sofort für das Gleichgewicht die folgenden sechs Bedingungsgleichungen, und zwar bezüglich der fortschreitenden Bewegung, jene:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) = p + p', \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) = q + q', \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma) = r + r',$$

und hinsichtlich der drehenden Bewegung, mit Rücksicht auf den Sinn der Drehungsrichtung (und zwar nach der Bemerkung in Nr. **14**, nach welcher die Drehung von $+X$ zu $+Z$, von da zu $+Y$ und endlich von da gegen $+X$ als positiv genommen wird) in den Ebenen der xy, xz und yz beziehungsweise jene:

$$L = 0, \quad M + p'a = 0 \quad \text{und} \quad N - q'a = 0$$

bestehen.

Aus diesen sechs Gleichungen folgt:

$$r + r' = \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma), \quad p = \frac{M + a\, \Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha)}{a}, \quad p' = -\frac{M}{a},$$

$$q = \frac{a\, \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) - N}{a} \quad \text{und} \quad q' = \frac{N}{a},$$

wobei die Werthe von M und N in Nr. **14**, Relation (f) angegeben sind.

Die Drücke auf die Puncte O und S normal zur Achse OS sind sonach durch p, q, p', q' vollkommen bestimmt, während sich von dem Drucke nach der Richtung der Achse nur die Summe $r + r'$ angeben lässt; es bleibt sonach, bei Voraussetzung eines absolut festen Systemes, jeder einzelne Druck auf die Puncte O und S unbestimmt und kann die Summe $r + r'$ auf diese beliebig vertheilt werden.

Liegen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ in Ebenen, welche mit jener der xy parallel, also normal zur Drehungsachse OS sind, so wird, wegen $\gamma = 90^0$, die genannte Summe, also der Druck nach dieser Achse $r + r' = 0$.

Die übrigen Werthe sind für diesen besondern Fall, wenn man gleich für M und N die entsprechenden Werthe aus Relation (f) setzt:

$$p = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\alpha) - \Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a},\quad p' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a},$$

$$q = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\beta) - \Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a},\quad q' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a}.$$

Liegen endlich sämmtliche Kräfte in einer Ebene, welche mit der Ebene der xy parallel ist und von dieser den Abstand $\frac{1}{2}a$ hat, so folgt aus diesen letztern Relationen:

$$p = p' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\alpha) \text{ und } q = q' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\beta).$$

Fällt diese Ebene mit jener der xy zusammen, so wird wegen $z = 0$, sofort:

$$p = \Sigma(P\,Cos\,\alpha),\ p' = 0,\ q = \Sigma(P\,Cos\,\beta),\ q' = 0.$$

Anmerkung. Besitzt ein vollkommen festes System mehr als zwei feste Puncte, so sind die Drücke auf diese Puncte immer unbestimmt, und wenn sich in der Wirklichkeit in einem solchen Falle dennoch bestimmte Werthe dafür ergeben, so rührt dies nur daher, dass sich die Form eines jeden physischen Körpers oder Systemes durch die Einwirkung von Kräften immer mehr oder weniger ändert, es also in dieser Hinsicht kein absolut festes System gibt.

27. Zur Erläuterung dieser Bemerkung wollen wir den Fall annehmnn, dass sich die sämmtlichen Angriffspuncte der Kräfte in einer Ebene befinden, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes in beliebig vielen Puncten gestützt sein soll.

Nimmt man diese Ebene als coordinirte Ebene der xy und denkt sich in den Stützpuncten normale Kräfte $p, p_1, p_2, \ldots$ welche den in diesen Puncten stattfindenden Drücken gleich und entgegengesetzt sind, und die wir kurz Reactionskräfte nennen wollen (Statik Nr. **131**, 15.), welche also mit der Achse der z parallel sind und nach einerlei Richtung wirken sollen; so dürfen die an dieser Ebene wirkenden Kräfte, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, weder nach den Axen der x und y eine Wirkung, noch um die Achse der z eine Drehung hervorbringen.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher durch die Relationen gegeben:

$$\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0, \quad \Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0, \quad L = 0.$$

Werden die zur Herstellung des Gleichgewichtes angebrachten, mit der Achse Z parallelen Reactionskräfte $p, p_1 \ldots$ zu einer Resultirenden r vereinigt, welche also gleich ist der Summe dieser Kräfte und mit diesen dieselbe Richtung hat; so muss ihr Angriffspunct (für's Gleichgewicht) innerhalb des convexen Polygones liegen, welches in der Ebene entsteht, wenn man die Stützpuncte durch gerade Linien mit einander verbindet. Hieraus folgt aber, dass auch die Resultante aus den Componenten der gegebenen Kräfte nach der Achse der z, d. i. $\Sigma(P\, Cos\, \gamma)$ ihren Angriffspunct innerhalb dieses genannten Polygones haben und der Kraft r entgegen gerichtet sein muss.

Zur Bestimmung des Druckes gegen die einzelnen Stützpuncte hat man nun, wenn man die rechtwinkeligen Coordinaten der angenommenen Reactionskräfte $p, p_1 \ldots$ nach den Axen der x und y beziehungsweise mit $u, u_1, u_2 \ldots$ und $v, v_1, v_2 \ldots$ bezeichnet, im Stande des Gleichgewichtes:

$$\Sigma(p) = \Sigma(P\, Cos\, \gamma), \quad \Sigma(pu) = M \quad \text{und} \quad \Sigma(pv) = N \ldots (m),$$

dabei ist (aus Relat. (f) in Nr. **14** wegen $z = 0$):

$$M = \Sigma(Px\, Cos\, \gamma) \quad \text{und} \quad N = -\Sigma(Py\, Cos\, \gamma).$$

Da man nun zur Bestimmung der Drücke oder Kräfte p, $p_1 \ldots$ nur die drei Bedingungsgleichungen (m) erhält, so folgt, dass diese Drücke u n b e s t i m m t sein werden, sobald man mehr als drei Stützpuncte annimmt.

Auch tritt dieselbe Unbestimmtheit ein, wenn die sämmtlichen Kräfte und die drei Stützpuncte in einer g e r a d e n L i n i e, z. B. in der Axe der x liegen, weil dafür wegen $y = 0$ und $v = 0$, die dritte der vorigen Bedingungsgleichungen, in $0 = 0$ übergeht und sonach nur zwei Gleichungen bestehen.

Ist endlich nur ein Stützpunct vorhanden, so muss für das Gleichgewicht, wie sich von selbst versteht, die Resultirende durch diesen Stützpunct gehen.

Rotation eines Körpers um eine Achse *).

28. Eine weitere wichtige Anwendung finden die Kräftepaare in der Theorie der drehenden Bewegung eines Körpers um irgend eine Achse.

Es sei, um diese Anwendung zu zeigen, von den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen X, Y, Z (Fig. 22), auf welche wir die materiellen Puncte eines rotirenden Körpers beziehen wollen, jene Z die Rotationsachse, ferner sei w die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung (zugleich das Mass dieser Bewegung), so wie für irgend einen materiellen Punct $\mathrm{d}m$ des rotirenden Körpers x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten, und r der Abstand dieses Punctes von der Drehachse Z. Dies vorausgesetzt, besitzt der materielle Punct $\mathrm{d}m$ die Geschwindigkeit rw und zwar nach der Richtung der Tangente des Kreises vom Radius r, nach welcher dieses Massentheilchen durch eine Kraft p, deren Mass (Nr. **131**, 3.) $rw\,\mathrm{d}m$ ist, wie von der Ruhe aus getrieben oder in Bewegung gesetzt wird.

Auf dieselbe Weise werden alle materiellen Theilchen oder Puncte des Körpers durch ähnliche Kräfte $wr\,\mathrm{d}m$ getrieben oder bewegt, welche ihren Massen $\mathrm{d}m$ und Abständen r von der Rotationsachse proportional sind, und deren Richtungen zugleich auf diesen Geraden r und der Achse Z perpendikulär stehen.

29. Zerlegen wir nun, um diese Kräftenelemente auf andere Kräfte zu reduciren, welche mit ihnen gleichgeltend sind, d. i. die nämliche rotirende Bewegung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit w hervorbringen können, die genannte Kraft $p = wr\,\mathrm{d}m$ in drei auf einander senkrechte Seitenkräfte und zwar nach den Richtungen der Coordinatenachsen; so erhält man, wenn diese Componenten beziehungsweise durch X', Y', Z' bezeichnet werden, wie leicht zu sehen:

$$X' = wy\,\mathrm{d}m,\quad Y' = -wx\,\mathrm{d}m,\quad Z' = 0.$$

Verlegt man jetzt diese Kräfte mit sich parallel in den Anfangspunct A der Coordinaten, so erhält man nach dem Vor-

*) Mit Benützung der trefflichen Poinsot'schen Abhandlung: „*Théorie nouvelle de la Rotation des corps.*" (*Paris* 1852.)

gange in Nr. **13** (wobei $P\,Cos\,\alpha = X'$, $P\,Cos\,\beta = Y'$, $P\,Cos\,\gamma = Z'$, $\Sigma(P\,Cos\,\alpha) = \int w\,y\,\mathrm{d}m$, $\Sigma(P\,Cos\,\beta) = -\int w\,x\,\mathrm{d}m$ und $\Sigma(P\,Cos\,\gamma) = 0$ ist) für's Erste die im Puncte A nach den Achsen X und Y wirkenden Kräfte:

$$X' = w\,y\,\mathrm{d}m,\quad Y' = -\,w\,x\,\mathrm{d}m,$$

und dann drei Kräftepaare L', M', N' beziehungsweise parallel mit den Ebenen der xy, xz, yz, deren Momente durch (Nr. **14**, Relation (e)):

$$X'y - Y'x,\quad Z'x - X'z,\quad Y'z - Z'y$$

ausgedrückt sind. Setzt man für X', Y', Z' die Werthe, so reduciren sich diese drei Paare oder deren Momente auf:

$$L' = w\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = w\,r^2\,\mathrm{d}m,\quad M' = -\,w\,y\,z\,\mathrm{d}m,\quad N' = -\,w\,x\,z\,\mathrm{d}m.$$

Verfährt man nun auf dieselbe Weise mit den sämmtlichen Kräften $w\,r\,\mathrm{d}m$ des Systemes der materiellen Puncte des rotirenden Körpers, so reduciren sich diese

1. auf die beiden im Puncte A angreifenden und nach AX und AY wirksamen Kräfte $X = w\int y\,\mathrm{d}m$ und $Y = -\,w\int x\,\mathrm{d}m$, deren Resultirende R auf der Achse AZ perpendikulär steht und die Grösse hat (analog mit R in Nr. **13**, Relat. (a)):

$$R = w\sqrt{(\int x\,\mathrm{d}m)^2 + (\int y\,\mathrm{d}m)^2}\ \ldots (1),$$

oder auch, wenn man die Länge des aus dem Schwerpunct O des Körpers von der Masse m auf die Umdrehungsachse AZ gefällten Perpendikels mit δ bezeichnet:

$$R = w\,m\,\delta \ldots (1')$$

(wegen, Stat. Nr. **32**, $x_1 m = \int x\,\mathrm{d}m$, $y_1 m = \int y\,\mathrm{d}m$ und $\delta^2 = x_1^2 + y_1^2$);

2. auf die beiden Paare $M = -\,w\int y\,z\,\mathrm{d}m$, $N = -\,w\int x\,z\,\mathrm{d}m$, welche beziehungsweise in mit den coordinirten Ebenen xz und yz parallelen Ebenen liegen und sich daher nach Nr. **8**, Zusatz, in diese coordinirten Ebenen selbst verlegen und sonach zu Einem Paar K vereinigen lassen, welches in einer durch AZ gehenden Ebene liegt; dieses resultirende Paar hat (Nr. **9** Zusatz, Relat. (1') wegen $\alpha = 90^0$) die Grösse:

$$K = w\sqrt{(\int x\,z\,\mathrm{d}m)^2 + (\int y\,z\,\mathrm{d}m)^2}\ \ldots (2);$$

und endlich

3. auf das in einer mit xy parallelen Ebene liegende, also auf der Achse AZ perpendikulären Kräftepaar, dessen Moment

$$L = w\int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = w\int r^2\,\mathrm{d}m \ldots (3)$$

ist.

Nimmt man daher die fünf Integrale $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$ und $\int (x^2+y^2)\,dm$ innerhalb jener Grenzen, welche sich auf den ganzen rotirenden Körper beziehen, so lassen sich aus den vorigen Relationen (1), (2), (3) die Werthe der Kraft R und der Paare K, L vollständig bestimmen, welche Kräfte R, K, L zusammen genau auch die in Rede stehende Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit w erzeugen können.

Zusatz 1. Geht die Umdrehungsachse AZ durch den Schwerpunct des Körpers, so ist $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, folglich auch (Relat. (1)) $R = 0$.

In diesem Falle reduciren sich daher die sämmtlichen Kräfte auf die beiden Paare K und L in (2) und (3), welche sich übrigens (wieder nach Nr. **9**, Zusatz, wobei ebenfalls $\alpha = 90^0$ ist) zu einem Paare J vereinigen lassen, dessen Grösse oder Moment

$$J = \sqrt{K^2 + L^2} \ldots (4)$$

ist; hieraus folgt daher, dass sich die Kräfte, welche im Stande sind einen Körper um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse zu drehen, immer auf ein Kräftepaar reduciren lassen.

Dabei kann noch bemerkt werden, dass dieses Paar J im Allgemeinen nicht auf der Achse AZ perpendikulär steht, indem (Nr. **9**, Zusatz, Relat. (2')) diese Paarebene mit der Achse AZ einen Winkel φ bildet, dessen Cosinus

$$Cos\,\varphi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} \ldots (5)$$

ist, und welcher daher nur für $K = 0$ verschwinden kann.

Zusatz 2. Ist als specieller Fall die Rotationsachse AZ eine sogenannte Hauptachse des Körpers, so sind dafür die Momente:

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int yz\,dm = 0 \ldots (6),$$

folglich ist auch (Relat. (2)) das Paar $K = 0$, und es reduciren sich die sämmtlichen Kräfte auf das einzige Paar $J = L = w\int r^2\,dm$, welches jetzt (Relat. (5)) auf der Rotationsachse perpendikulär steht;

die Kräfte also, welche einen Körper um eine seiner Hauptachsen drehen können, lassen sich immer auf ein Paar reduciren, dessen Ebene auf dieser Achse perpendikulär ist.

Da sich nun aber auch wieder umgekehrt irgend ein auf einer Hauptachse eines freien Körpers perpendikulär stehendes Paar L in Elementarkräfte $wr\,dm$ zerlegen lässt, welche im Stande sind, denselben mit der Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{L}{\int r^2 dm} = \frac{L}{\mu}$$

um diese Achse zu drehen, so folgt auch (wegen $\int r^2 dm = \mu$ Dynamik Nr. **135**):

dass wenn an einem freien Körper ein Kräftepaar angebracht ist, dessen Ebene auf einer seiner Hauptachsen perpendikulär steht, dasselbe den Körper um diese Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, welche gleich ist dem Momente dieses Paares, dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf dieselbe Achse.

Anmerkung. Wirkt also ein Kräftepaar J auf einen freien Körper in irgend einer Ebene desselben, so lässt sich die dadurch hervorgebrachte Drehung mit Hilfe des letzten Satzes leicht bestimmen. Denn zerlegt man das gegebene Paar J in die drei Paare L, M, N beziehungsweise senkrecht auf die drei Hauptachsen des Körpers, und bezeichnet man das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf diese Achsen respective mit μ_1, μ_2, μ_3, so wie die Winkelgeschwindigkeiten der betreffenden Rotationen durch w_1, w_2, w_3, so hat man:

$$w_1 = \frac{L}{\mu_1}, \quad w_2 = \frac{M}{\mu_2}, \quad w_3 = \frac{N}{\mu_3}$$

und wenn man diese drei Rotationen wieder in Eine w zusammensetzt, so erhält man sowohl die Achse als auch die Grösse der Rotation, welche das gegebene Paar J im ersten Augenblicke in dem als ruhend gedachten Körper zu erzeugen streben.

30. Aus den bisherigen Entwickelungen ergeben sich nun die beiden wichtigen Folgerungen:

1. Lässt sich ganz einfach die Kraft R und das Paar J finden, welche zusammen im Stande sind, irgend eine gegebene Bewegung zu erzeugen. Denn wie diese Bewegung auch immer sein mag, so kann man sie stets so ansehen, als wäre sie aus zweien zusammengesetzt, nämlich aus einer progressiven oder translatorischen, welche der Bewegung des Schwerpunctes des Körpers gleich und parallel ist, und einer rotirenden Bewegung um eine durch diesen Schwerpunct gehenden

Achse. Man braucht daher die Kraft R nur so zu wählen, dass sie die erstere Bewegung, und das Paar J so anzunehmen, dass es die letztere Bewegung hervorbringen kann.

2. Wirken umgekehrt beliebig viele Kräfte auf einen Körper, so denke man sich dieselben sämmtlich mit sich parallel in den Schwerpunct des Körpers verlegt, so setzen sie sich zu einer einzigen Kraft, so wie die entstehenden Paare zu einem einzigen Paar J zusammen.

Die im Schwerpuncte angebrachte Resultirende R sucht in den sämmtlichen materiellen Puncten des Körpers die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $v = \frac{R}{m}$ nach der Richtung dieser Kraft R zu erzeugen, während das Kräftepaar J das Bestreben hat, in dem Körper eine Drehbewegung w um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse AZ hervorzubringen, deren Lage nach dem Obigen bestimmt werden kann.

Centrifugalkraft.

31. Um ferner auch die Centrifugalkräfte eines rotirenden Körpers zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dass durch diese drehende Bewegung (wobei jedes materielle Theilchen dm des Körpers die Kraft $rw\,dm$ besitzt oder durch diese gleichsam animirt oder getrieben wird) in jedem materiellen Punct dm in jedem Augenblick eine unendlich kleine Kraft f, die sogenannte Centrifugalkraft entsteht oder erzeugt wird, welche dieses Theilchen vom Mittelpunct des betreffenden Kreises zu entfernen strebt.

Würde das materielle Theilchen dm, dieses als vollkommen frei gedacht, blos von der einzigen Kraft $p = v\,dm$ nach der Tangente eines Kreises getrieben, so könnte dasselbe auch nicht den kleinsten Theil des Kreisbogens zurücklegen, wenn es nicht jeden Augenblick durch eine bestimmte Kraft, die sogenannte Centripetalkraft, gegen den Mittelpunct des Kreises gezogen und so auf dessen Peripherie erhalten würde, indem ohne diese Kraft das Theilchen mit der erlangten Geschwindigkeit v nach der Tangente fortgehen und sich sonach vom genannten Mittelpuncte entfernen würde.

Da die Centripetalkraft, welche der Centrifugalkraft gleich und entgegengesetzt ist, daher auf diese bezogen durch $-f$ bezeichnet wird, von der Natur der Schwerkraft ist, so lässt sich diese beschleunigende Kraft auch leicht nach denselben Gesetzen bestimmen, und zwar ist ihre Grösse (Dynamik Nr. **130**) im vorliegenden Falle $f = rw^2 \mathrm{d}m$.

Denkt man sich daher in jedem materiellen Theilchen $\mathrm{d}m$ des rotirenden Körpers zu der Tangentialkraft $rw\,\mathrm{d}m$ noch die entsprechende Centripetalkraft $-rw^2\mathrm{d}m$ hinzugefügt, so wird sich das ganze System dieser materiellen Puncte, d. i. der Körper selbst, um die angenommene Achse AZ mit der Winkelgeschwindigkeit w vollkommen frei und ungezwungen so drehen, dass die Theilchen des Körpers, selbst wenn sie nicht mit einander verbunden wären, dadurch nicht im Geringsten afficirt werden.

Anmerkung. Im vorliegenden Falle wird jedes materielle Theilchen $\mathrm{d}m$ allerdings nur von der Tangentialkraft p getrieben; allein man kann, ohne Aenderung des Bewegungszustandes dieser Kraft p, die Centripetalkraft $-f$ hinzufügen, wenn man an diesen Punct zugleich noch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft $+f$ anbringt. Da es nun erlaubt ist, die Impulsionskraft $rw\,\mathrm{d}m$ durch die drei gleichgeltenden $rw\,\mathrm{d}m$, $-rw^2\mathrm{d}m$, $+rw^2\mathrm{d}m$ zu ersetzen, so kann man sich vorstellen, dass während eines Zeitelementes $\mathrm{d}t$ die beiden erstern dazu verwendet werden, um das Theilchen $\mathrm{d}m$ frei durch den Kreisbogen $rw\,\mathrm{d}t$ zu bewegen, während die dritte Kraft $+rw^2\mathrm{d}m$ dieses Theilchen vom Mittelpunct zu entfernen sucht.

Auf diese Weise nun werden die sämmtlichen materiellen Puncte des Körpers, in Folge seiner rotirenden Bewegung um die Achse AZ, von ganz ähnlichen beschleunigenden Kräften $+f$ getrieben, welche den innern Zustand desselben in so ferne afficiren, als sie den Cohäsionskräften entgegen, oder auf die Bänder, wenn man sich solche vorstellen will, welche diese Theilchen zurückhalten, ziehend oder spannend wirken.

32. Alle diese unendlich kleinen Centrifugalkräfte f lassen sich aber nach dem obigen Verfahren ganz leicht auf eine einzige beschleunigende Kraft R' und ein beschleunigendes Kraftpaar K' reduciren, wenn man einfach berücksichtiget, dass diese Kräfte $f = rw^2\mathrm{d}m$ bis auf den Factor w eben so ausgedrückt sind, wie die, die Theilchen $\mathrm{d}m$ animirenden Tangentialkräfte $p = rw\,\mathrm{d}m$, und dass sie nicht wie diese letzteren nach den Tangenten, sondern nach den Radien der zu durchlaufenden Kreise wirksam, folglich auf diesen Kräften p und der Achse AZ zugleich perpendikulär sind.

Verfährt man daher mit diesen Kräften f genau so, wie früher (Nr. **29**) mit jenen p, und verlegt die nach den Achsen der X, Y, Z entstehenden drei Componenten von f wieder in den Anfangspunct A, so erhält man erstens die mit der obigen R in Relat. (1) analoge Kraft:

$$R' = w^2 \sqrt{(\int x\,dm)^2 + (\int y\,dm)^2} = wR \ldots (7)$$

oder auch:

$$R' = \delta w^2 m \ldots (7')$$

(wenn man nämlich für R den Werth aus Relat. (1') in Nr. **29** setzt) und dann das mit K in Relat. (2) analoge Paar:

$$K' = w^2 \sqrt{(\int xz\,dm)^2 + (\int yz\,dm)^2} = wK \ldots (8),$$

welches aus den beiden mit M' und N' analogen Paaren, deren Momente $w^2 \int xz\,dm$, $w^2 \int yz\,dm$ sind und beziehungsweise in den Ebenen der xz und yz liegen (oder als in diesen liegend angesehen, d. i. in diese verlegt werden können) resultirt und sonach in einer durch die Achse AZ gehenden Ebene liegen.

Ein mit L analoges, auf der Achse AZ perpendikuläres Paar L' kann hier nicht entstehen, weil die sämmtlichen Centrifugalkräfte durch die Umdrehungsachse AZ gehen, oder weil dafür $L' = Xy - Yx = 0$ wird.

33. Was nun die Lage dieser Kraft R' und des Paares K' anbelangt, so steht erstere offenbar auf der obigen Kraft R perpendikulär, weil die einzelnen Centrifugalkräfte f, von denen R' die Resultirende ist, beziehungsweise auf den einzelnen Tangential- oder Impulsionskräften p, von denen R die Resultante ist, senkrecht und diesen proportional sind.

Aus demselben Grunde ist auch die Achse AK' (Fig. 22) des Paares K' auf der Achse AK des Paares K perpendikulär (d. h. die Paarebenen bilden einen rechten Winkel, Nr. **9**, Zus. 2) und da diese letztere auf AZ, als Achse des Paares L senkrecht steht, so ist auch die erstere Achse AK' perpendikulär auf der Achse AJ des Paares J, welches aus den beiden Paaren L und K (durch Zusammensetzung nach dem in Nr. **9**, Zusatz 2 angegebenen Verfahren) resultirt: e s s t e h t a l s o d i e A c h s e d e s a u s d e n C e n t r i f u g a l k r ä f t e n e n t s t e h e n d e n P a a r e s K' z u g l e i c h a u f d e r R o t a t i o n s a c h s e AZ u n d a u f d e r A c h s e d e s P a a r e s J d e r I m p u l s i o n s- o d e r T a n g e n t i a l k r ä f t e p e r p e n d i k u l ä r, o d e r d i e E b e n e d e s P a a r e s K' g e h t durch die Rotationsachse und steht zugleich auf der Ebene des Paares J senkrecht.

Da nun von den beiden Geraden AR und AJ die erstere die Grösse der Kraft R, und letztere die Achse und Grösse des Paares J vorstellt, welche Kräfte (R und J) zusammen dieselbe Drehung w um die freie Achse AZ bewirken können, so erhält man, wenn α den Neigungswinkel der Achse AJ (des Paares J) mit der Umdrehungsachse AZ bezeichnet (wodurch sofort $K = J \operatorname{Sin} \alpha$ wird) für die beschleunigende Kraft R' und das beschleunigende Paar K', welche Kräfte aus den Centrifugalkräften entstehen, ganz einfach (aus den vorigen Relationen (7') und (8)):

$$R' = wR \text{ und } K' = wJ \operatorname{Sin} \alpha \ldots (9),$$

dabei ist R' zugleich auf der Richtung der Kraft R und der Achse AZ, und K' auf der Achse AJ (des Paares J) und derselben Achse AZ perpendikulär.

Zusatz. Geht die Rotationsachse AZ durch den Schwerpunct des rotirenden Körpers, so ist wegen $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$ sofort (Relat. (7)) $R' = 0$, folglich reduciren sich in diesem Falle die sämmtlichen Kräfte auf das Paar K'.

Ist ausserdem noch die Drehachse eine der drei Hauptachsen des Körpers, so ist wegen $\int xz\,dm = 0$ und $\int yz\,dm = 0$ sofort auch noch (Relat. (8)) $K' = 0$; es halten sich daher in diesem besondern Falle die sämmtlichen Centrifugalkräfte in A (wegen $R' = 0$) das Gleichgewicht, und da auch (wegen $K' = 0$) das Kräftepaar verschwindet, so hat die Umdrehungsachse von keiner Seite her irgend einen Druck zu erleiden; aus diesem Grunde wird sie in diesem Falle eine freie Achse genannt.

Umgekehrt besitzt nur eine solche freie Achse die Eigenschaft, dass sich alle die durch Umdrehung eines Körpers um diese Achse entstehenden Centrifugalkräfte das Gleichgewicht halten oder gegenseitig aufheben; denn es muss dafür sowohl $R' = 0$ als auch $K' = 0$ sein. Aus der erstern Bedingung folgen aber aus Relat. (7) die beiden Bedingungsgleichungen $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, welche aussagen, dass die Umdrehungsachse durch den Schwerpunct gehen muss, während aus der zweiten Bedingung, wegen Relat. (8), die beiden Gleichungen

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int yz\,dm = 0 \ldots (10)$$

folgen, welche anzeigen, dass die Umdrehungsachse eine sogenannte **Hauptachse** des Körpers sein muss.

Anmerkung. Verschwindet zwar das Kräftepaar K', nicht aber auch die Resultirende R', d. h. wird $K' = 0$, nicht aber auch zugleich $R' = 0$, so ist zwar die Umdrehungsachse wegen $\int xz\,dm = 0$ und $\int yz\,dm = 0$ eine Hauptachse, jedoch, da sie nicht durch den Schwerpunct geht, nicht auch zugleich eine sogenannte freie Achse, indem der Punct A der Achse in jedem Augenblick einen Druck R' zu erleiden hat. Diese Hauptachse kann jedoch die Eigenschaft einer freien Achse erhalten, wenn man diesen Punct A festmacht.

34. Fasst man endlich das Ganze übersichtlich zusammen, so ergeben sich aus den vorhergehenden Betrachtungen und Entwickelungen für die Centrifugalkräfte der Körper, materiellen Ebenen und Linien die nachstehenden Sätze und Eigenschaften.

1. Im Allgemeinen besteht die Centrifugalkraft eines um eine Achse rotirenden Körpers aus der Centrifugalkraft (R' in Relat. (7')) seiner im Schwerpunct vereinigt gedachten Masse und einem Kräftepaar (K'), dessen Ebene durch die Umdrehungsachse geht; die erstere Kraft sucht den Körper von der Achse zu entfernen, das Paar dagegen die Lage dieser Achse zu verändern.

Unabhängig von der obigen Entwickelung lässt sich dieser Satz auch auf folgende Weise ableiten.

Man lege durch den Schwerpunct O des Körpers eine Ebene senkrecht auf die Umdrehungsachse, projicire irgend ein materielles Theilchen dm des Körpers auf diese Ebene und verlege zugleich auch die diesem Theilchen entsprechende Centrifugalkraft (nach Nr. **11**) mit sich parallel in diese Ebene, so erhält man erstlich eine in der Projectionsebene liegende, mit jener p gleichen und gleichgerichteten Kraft p', als Centrifugalkraft des projicirten Elementes dm', und ausserdem noch ein Kräftepaar (p, p'') vom Momente pz, wenn z der Abstand des Theilchens dm von dieser Ebene ist; die Kraft p' hat ihren Angriffspunct im Durchschnitt der Achse mit der Ebene, während das Paar auf der Achse senkrecht steht.

Verfährt man mit allen übrigen materiellen Puncten des Körpers auf dieselbe Weise, so erhält man sowohl ein System von Kräften p', welche in der genannten Ebene liegen und durch den Durchschnittspunct der Achse mit der Ebene, als auch zugleich eine Gruppe von Paaren, deren Ebenen sämmtlich durch die Umdrehungsachse gehen. Die Resultirende R' der Kräfte p', welche natürlich denselben Angriffspunct hat, geht (Dynamik Nr. **132**) durch den Schwerpunct aller dieser projicirten Massentheilchen dm', welcher zugleich auch der Schwerpunct O des Körpers ist, und hat dieselbe Grösse, wie die Centrifugalkraft der in diesem Puncte O

vereinigt gedachten Masse m der materiellen Ebene, welche Masse keine andere als die des Körpers selbst ist.

Was die Gruppe der Kräftepaare betrifft, so lassen sich diese (Nr. 9, Zusatz 3) in ein einziges Paar K' vereinigen, dessen Ebene also wieder durch die Achse geht. Diese Ebene wird jedoch im Allgemeinen nicht in die Richtung der Centrifugalkraft R' fallen, also eine Vereinigung der Kraft R' mit dem resultirenden Paar K' (Nr. **10**, Zusatz) nur in besonderen Fällen möglich sein.

Bezieht man, um noch eine zweite Methode anzuführen, die materiellen Puncte des Körpers anstatt auf die durch den Schwerpunct O gehende, auf eine mit ihr parallele Ebene in einem beliebigen Abstand, welche Ebene man sofort für die coordinirte Ebene der xy nehmen kann, und zerlegt jede Centrifugalkraft $p = rw^2 dm$ in zwei Seitenkräfte, welche beziehungsweise in die Ebenen der xz und yz fallen und mit den Achsen X und Y des rechtwinkeligen Achsensystemes parallel sind; so hat man beziehungsweise $p_x = xw^2 dm$ und $p_y = yw^2 dm$, folglich rücksichtlich der sämmtlichen materiellen Puncte des Körpers zwei Gruppen paralleler, in den Ebenen der xz und yz liegender, auf der Umdrehungsachse Z perpendikulärer, unendlich kleiner Kräfte, deren Resultanten beziehungsweise:

$$R_x = \int (x w^2 dm) = w^2 \int x\, dm \quad \text{und} \quad R_y = w^2 \int y\, dm \ldots (a)$$

sind.

Bezeichnet man die Abstände ihrer Angriffspuncte in der Achse Z von der Ebene der xy (d. i. ihre Ordinaten nach Z) mit Z_x und Z_y, so ist:

$$Z_x R_x = w^2 \int xz\, dm \quad \text{und} \quad Z_y R_y = w^2 \int yz\, dm \ldots (b).$$

Offenbar lassen sich die beiden Seitenkräfte R_x und R_y nur dann zu einer einzigen Kraft R' vereinigen, wenn sie in der Achse AZ denselben Angriffspunct haben, d. h. wenn

$$Z_x = Z_y \ldots (c)$$

ist.

Handelt es sich in der Praxis blos um die Bestimmung des Druckes auf die Umdrehungsachse oder Welle (oder deren Zapfen), so ist diese Vereinigung auch nicht nöthig.

Ist aber die durch die Relation (c) ausgedrückte Bedingung vorhanden, so entsteht die im Puncte N der Achse Z angreifende Centrifugalkraft:

$$R' = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

wofür $AN = Z_x = Z_y$ ist.

Wird die Achse AZ in diesem Puncte N festgemacht, so wird der Druck R' auf dieselbe aufgehoben und sie besitzt dann die Eigenschaft einer freien Achse.

Findet in besonderen Fällen die Bedingung Statt, dass

$$\int xz\, dm = 0 \quad \text{und} \quad \int yz\, dm = 0 \ldots (n)$$

wird, so folgt aus den Relationen (b) sofort auch: $Z_x = 0$ und $Z_y = 0$, zum Beweis, dass jetzt die Resultirenden R_x und R_y in der Ebene der xy selbst liegen und beziehungsweise mit den Achsen AX und AY zusammenfallen. Da man diese Achsen um den Ursprung A in ihrer Ebene xy beliebig (sich immer rechtwinkelig schneidend) herum drehen kann, so folgt, dass in diesem speciellen Falle die materiellen Puncte des Körpers gegen diese Ebene zu beiden Seiten, d. i. ober- und unterhalb (xy horizontal gedacht), symmetrisch liegen, diese Ebene also zugleich auch durch den Schwerpunct geht.

Bekanntlich entspricht die durch Relation (n) ausgedrückte Bedingung der drehenden Bewegung des Körpers um eine seiner Hauptachsen; es ist also jede auf einer durch den Schwerpunct des Körpers gehenden Symmetrie-Ebene senkrechte Gerade eine Hauptachse desselben.

Da in diesem Falle die Centrifugalkraft in dieser Ebene der xy liegt und durch den Schwerpunct geht, also nach dieser Richtung auf die Drehachse Z den Druck R' ausübt, so braucht man nur den Anfangspunct A (als Angriffspunct von R') festzumachen, um diesen Druck aufzuheben.

Geht die Umdrehungsachse zugleich auch durch den Schwerpunct des Körpers, fällt also der Ursprung A mit diesem Punct zusammen, ist also ausser den Relationen (n) auch noch $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, folglich (Relat. (a)) $R_x = 0$ und $R_y = 0$, also auch $R' = 0$; so hört jeder Druck auf die Umdrehungsachse von selbst auf und sie wird daher zur eigentlichen freien oder natürlichen Achse.

Hieraus folgt also, dass für jeden Körper, welcher eine (natürlich durch den Schwerpunct gehende) Symmetrie-Ebene besitzt, eine auf derselben durch den Schwerpunct gehende senkrechte Gerade eine freie Achse ist.

So ist z. B. im Würfel jede der sechs Diagonal-Ebenen eine Symmetrie-Ebene, daher sind für diesen, ausser den drei Geraden, welche die Mittelpuncte der Gegenflächen verbinden, auch noch die sechs Geraden, welche die Halbirungspuncte der parallelen Gegenkanten verbinden, freie Achsen.

Ein gerader Kegel hat ausser seiner geometrischen Achse (nach 4.) noch unzählig viele freie Achsen, welche sämmtlich in der durch den Schwerpunct auf der Achse perpendikulären Ebene liegen und auf der geometrischen Achse senkrecht stehen. Aehnliches gilt für gerade reguläre Prismen und Pyramiden, welche im Allgemeinen eben so viele durch die geometrische Achse gehenden Symmetrie-Ebenen besitzen, als die Grundflächen Seiten haben u. s. w.

2. Denkt man sich den rotirenden Körper durch Ebenen, welche auf der Rotationsachse senkrecht stehen, in unendlich dünne Schichten zerschnitten oder aufgelöst, und liegen die sämmtlichen Schwerpuncte dieser Körperelemente in ein und derselben durch die Achse gehenden Ebene; so ist dessen Centrifugalkraft eben so gross, als ob die gesammte Masse in seinem Schwerpunct concentrirt oder vereinigt wäre; die Richtung dieser Kraft aber geht im Allgemeinen nicht durch den Schwerpunct.

In diesem Falle ist es eben so, als ob eine materielle Ebene um eine in ihr liegende Gerade als Achse rotirte. Mit dem vorigen Fall verglichen, reducirt sich die Projectionsebene hier auf eine gerade, auf der Achse perpendikulären Linie, und man erhält bei demselben Verfahren die durch den Schwerpunct der Ebene gehende Centrifugalkraft R' von derselben Grösse, als ob die gesammte Masse der Ebene in diesem Puncte vereinigt wäre, so wie das Paar K', welches jetzt mit R' in einerlei (d. i. in der rotirenden) Ebene liegt und sich daher mit dieser Kraft vereinigen lässt. Durch diese Verbindung entsteht aber (Nr. **10**) eine mit jener R' gleiche und parallele Kraft, welche jedoch einen andern Angriffspunct hat, folglich nicht mehr durch den Schwerpunct der materiellen Ebene (also auch nicht des rotirenden Körpers) geht.

Nach der vorigen zweiten Methode lasse man die materielle Ebene mit jener der xz, und die Umdrehungsachse mit jener der z zusammenfallen, so reduciren sich die vorigen Relationen (a) und (b), da hier die Ordinaten y Null sind, auf jene:

$$R' = R_x = w^2 \int x \,\mathrm{d}m \ldots (\alpha) \quad \text{und} \quad Z_x = \frac{\int xz \,\mathrm{d}m}{\int x \,\mathrm{d}m} \ldots (\beta),$$

wobei, wenn Z die Ordinate des Schwerpunctes O (nach der Achse der z) ist, im Allgemeinen Z_x von Z verschieden sein wird.

3. Liegen die vorhin (in 2.) genannten Schwerpuncte der Schichten sämmtlich in einer mit der Umdrehungsachse parallelen Geraden, so geht die Centrifugalkraft des Körpers R' zugleich auch durch den Schwerpunct desselben.

Dieser Fall entspricht zugleich der Rotation einer (im Allgemeinen heterogenen) materiellen geraden Linie um eine mit ihr parallelen Achse.

Ist a der Abstand dieser Geraden von der Achse, so hat man nach der vorigen zweiten Methode ganz einfach aus den Relationen (α) und (β), da $x = a$ constant ist:

$$R' = a w^2 \int \mathrm{d}m = a w^2 m \quad \text{und} \quad Z_x = \frac{a \int z \,\mathrm{d}m}{a \int \mathrm{d}m} = \frac{\int z \,\mathrm{d}m}{m},$$

mithin ist (Statik Nr. **32**) $Z_x = Z$ gleich der Ordinate des Schwerpunctes.

Dieser Fall tritt bei allen Rotationskörpern ein, deren geometrische Achsen mit der Umdrehungsachse parallel sind.

4. Geht in diesem letztern Falle die Umdrehungsachse zugleich durch den Schwerpunct des Körpers, so wird die Centrifugalkraft (wegen $a = 0$) $R' = 0$, und die Achse wird, da jetzt jeder Druck auf dieselbe aufhört, zur freien oder natürlichen Achse.

Aus diesem Grunde sind die Achsen der Rotationskörper, ferner die geometrischen Achsen von regulären Prismen, Pyramiden u. s. w. freie Achsen.

Da man nun in der Anwendung, besonders im Maschinenwesen, jeden aus den Centrifugalkräften entstehenden Druck auf die Wellzapfen zu vermeiden hat, so erkennt man leicht, wie wichtig bei drehenden Bestandtheilen, wie Räder, Scheiben u. s. w., das richtige Centriren der betreffenden Massen ist.

Eigenschaften der freien und Hauptachsen.

35. Um diese Achsen noch speciell in's Auge zu fassen, so folgt aus den bisherigen Entwickelungen, dass man bei der Definition der freien oder sogenannten natürlichen Achsen von einem doppelten Gesichtspuncte ausgehen könne. Man kann nämlich erstens die Frage stellen, um welche Achse ein Körper oder festes System materieller Puncte sich drehen müsse, damit die in demselben thätigen Tangentialkräfte $p = rw\,\mathrm{d}m$ sich auf ein einziges Kräftepaar L reducire, dessen Ebene auf dieser Achse senkrecht steht? oder sich zweitens die Aufgabe stellen, jene Drehungsachse zu finden, auf welche bezogen die entstehenden Centrifugalkräfte $f = rw^2\,\mathrm{d}m$ sich gegenseitig aufheben oder im Gleichgewichte halten; denn in beiden Fällen hat die Drehungsachse keinen Druck zu erleiden, also auch keinen Widerstand zu leisten, und das System bewegt sich, auch wenn es vollkommen frei ist, um diese genau so, als ob die Achse fest wäre, d. h. sie wird weder irgend eine fortschreitende Bewegung annehmen, noch sonst, wenn sie auch durch Nichts gehalten ist, ihre Lage gegen den Körper oder das System verändern; endlich wird, dieses System einmal um diese Achse in drehende Bewegung versetzt, und wenn keine äussern Kräfte auf dasselbe einwirken, dabei die Winkelgeschwindigkeit w constant, also die drehende Bewegung eine gleichförmige.

36. Man mag nun die Umdrehungsachse nach der einen oder andern der beiden Bedingungen bestimmen, so kommt man in beiden Fällen (Nr. **29**, Zusätze 1 und 2 und Nr. **33**, Zusatz) zu den Bedingungsgleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0,\ \int y\,\mathrm{d}m = 0 \ldots (1)$$

und

$$\int xz\,\mathrm{d}m = 0,\ \int yz\,\mathrm{d}m = 0 \ldots (2),$$

wenn nämlich die Coordinatenachse Z die gesuchte Drehungsachse ist.

Diese gesuchte Achse muss also erstlich (wegen Relat. (1)) durch den Schwerpunct des Systemes gehen und ausserdem noch eine bedingte, durch die Gleichungen (2) zu bestimmende (in 2tens von Nr. **34** näher erörterte) Lage erhalten.

Werden von diesen vier Bedingungsgleichungen nur jene (2) erfüllt, so ist die, offenbar mit der Coordinatenachse Z parallele, jedoch nicht durch den Schwerpunct gehende, Drehungsachse eine sogenannte Hauptachse des Systems oder Körpers, für welche die Centrifugalkraft sofort durch den Schwerpunct geht.

Werden allgemein (da man statt der Achse Z eben so gut die beiden andern Coordinatenachsen Y oder X als Drehungsachsen wählen kann) für irgend einen Punct A eines Systemes oder Körpers bezüglich dreier, durch diesen Punct auf einander rechtwinkelig gelegte Achsen AX, AY, AZ die drei Bedingungsgleichungen:

$$\int xy\,\mathrm{d}m = 0,\ \int xz\,\mathrm{d}m = 0,\ \int yz\,\mathrm{d}m = 0$$

erfüllt, so ist jede dieser drei Achsen eine Hauptachse des Systems. Bestehen aber ausserdem noch die drei Gleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0,\ \int y\,\mathrm{d}m = 0,\ \int z\,\mathrm{d}m = 0,$$

d. h. gehen diese Coordinatenachsen zugleich durch den Schwerpunct, so gehen diese Hauptachsen in freie Achsen über.

Anmerkung. Es lässt sich beweisen, dass es in jedem Puncte eines Körpers oder festen Systemes materieller Puncte drei unter sich rechtwinkelige Hauptachsen, folglich auch (wenn dieser Punct der Schwerpunct ist) drei auf einander senkrechte freie oder natürliche Achsen gibt.

Auch besitzen die drei durch irgend einen Punct N eines Körpers gehenden Hauptachsen noch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass wenn man auf diese das Moment der Trägheit des Körpers bezieht, unter allen Trägheitsmomenten dieses Körpers, welche sich auf beliebige, durch denselben Punct N gehende Achsen beziehen, das erste ein Maximum, das zweite ein Minimum und das dritte jedoch keines von beiden ist.

Rad an der Welle.

37. Als weitere Anwendung der Kräftepaare wollen wir noch mit Hilfe derselben für das Rad an der Welle sowohl die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kraft und Last, als auch die Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Legt man durch den Punct C (Fig. 15), in welchem die Achse DE des Wellenrades von der Rad- oder Umdrehungsebene der Kraft P geschnitten wird, zwei der Kraft P gleiche, parallele und entgegengesetzt wirkende Kräfte $P' = P'' = P$, d. h.

ersetzt man die Kraft P durch die ihr gleiche und gleichgerichtete Achsenkraft P' und das Paar (P, P'') vom Arm $CA = R$ gleich dem Halbmesser des Rades (oder verschiebt man die Kraft P nach Nr. **11** aus ihrem Angriffspunct A mit sich parallel nach dem Punct C).

Verfährt man ferner eben so mit der Kraft oder Last Q, indem man durch den Durchschnittspunct C' der Umdrehungsebene der Last mit der Achse die zwei der Last Q gleiche, parallele Kräfte Q', Q'' legt oder die Kraft Q in die mit ihr gleiche, parallele Kraft Q' und das Kräftepaar (Q, Q'') vom Arm $C'B = r$, als Halbmesser der Welle, auflöst; so haben die beiden Achsenkräfte P' und Q', da sie von der Achse DE aufgehoben werden, auf die Bedingung des Gleichgewichtes keinen Einfluss, und es kommen dafür nur noch die beiden, in parallelen Ebenen liegenden, nach entgegengesetzten Richtungen drehenden Kräftepaare (P, P'') und (Q, Q''), deren Momente PR und Qr sind, in Betracht. Nun müssen aber nach Nr. 8 (Zusatz) für das Gleichgewicht diese Momente einander gleich sein, folglich erhält man als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes die bekannte Relation:

$$PR = Qr \ldots (1),$$

wobei die Entfernung CC' der beiden Drehungsebenen ohne Einfluss ist.

Um ferner auch den Druck auf jeden der beiden Zapfen D und E zu finden, so zerlege man die beiden vorhin erhaltenen Achsenkräfte P' und Q', welche hierauf Einfluss haben, jede in eine verticale und horizontale Seitenkraft; seien diese beziehungsweise p und p' für P', so wie q und q' für Q'. Ist ferner O der Schwerpunct und G das Gewicht der Maschine, so ist der gesammte Zapfendruck nach verticaler Richtung, wenn man jenen Theil, welcher auf den Zapfen D kommt, durch x, und jenen, welchen der Zapfen E aufnimmt, durch y bezeichnet, sofort:

$$x + y = p + q + G.$$

Aus den beiden horizontalen Componenten q' und p' dagegen entstehen auf diese Zapfen D und E beziehungsweise die Seitendrücke x' und y', welche weiter unten bestimmt werden.

Sind α und β die Neigungswinkel der Kraft P und Last Q gegen eine Horizontale, so hat man für die erwähnten vier Seitenkräfte:

$$p = P \,Sin\, \alpha,\ p' = P \,Cos\, \alpha,\ q = Q \,Sin\, \beta,\ q' = Q \,Cos\, \beta.$$

Ist ferner die ganze Länge $DE = l$, die Entfernung $DC' = a$, jene $DC = b$ und $DO = c$, so ist für das Gleichgewicht (E als Stützpunct genommen):

$$x \,.\, DE = q \,.\, C'E + G \,.\, OE + p \,.\, CE,$$

d. i.:

$$l x = (l - a) q + (l - c) G + (l - b) p \ldots (n);$$

ferner (D als Stützpunct angesehen):

$$y \,.\, DE = p \,.\, DC + G \,.\, DO + q \,.\, DC',$$

d. i.:

$$l y = b p + c G + a q \ldots (o),$$

aus welchen Gleichungen (n) und (o) die verticalen Drücke in D und E gefunden werden. (Beide Gleichungen addirt geben, wie es sein soll, wieder $x + y = p + q + G$.)

Um ferner auch die horizontalen Drücke x' und y' in D und E zu bestimmen, hat man eben so (für den Stützpunct E):

$$x' \,.\, DE = q' \,.\, C'E \quad p' \,.\, CE,$$

d. i.:

$$l x' = (l - a) q' - (l - b) p' \ldots (p),$$

und (D als Stützpunct genommen):

$$y' \,.\, DE = p' \,.\, DC - q' \,.\, DC',$$

d. i.:

$$l y' = b p' - a q' \ldots (q),$$

aus welchen Gleichungen sofort x' und y' gefunden werden. (Dabei ist der Natur der Sache gemäss, wenn man (q) von (p) abzieht, $x' - y' = q' - p'$ oder umgekehrt $y' - x' = p' - q'$.)

Die Resultirenden s und s' aus x, x' und y, y' für die Zapfen D und E sind beziehungsweise:

$$s = \sqrt{x^2 + x'^2} \text{ und } s' = \sqrt{y^2 + y'^2}.$$

Bilden endlich diese Kräfte als die gesuchten Drücke der Zapfen in ihren Lagern mit der Horizontalen die Winkel φ und φ', so hat man noch:

$$tang\, \varphi = \frac{x}{x'} \text{ und } tang\, \varphi' = \frac{y}{y'}.$$

Wirkt wie gewöhnlich beim Rad an der Welle die Last Q nach verticaler Richtung, so ist wegen $\beta = 90^0$, sofort:

$$q = Q,\ q' = 0, \text{ folglich } l x' = (l - b) p' \text{ und } l y' = b p'.$$

Hat auch die Kraft P diese Richtung, so ist auch $\alpha = 90^0$ und daher:

$$p = P,\ p' = 0,\ x' = y' = 0 \text{ und } x + y = P + Q + G.$$

Anwendung der Paare auf einige Bewegungs-Erscheinungen.

38. Um schliesslich noch einige Bewegungs-Erscheinungen zu untersuchen, die sich ebenfalls am einfachsten aus den Eigenschaften der Kräftepaare erklären lassen, so wollen wir zuerst bemerken, dass wenn eine Kugel in irgend einer Richtung gestossen wird, der von der Kugel aufgenommene Stoss immer durch den Mittelpunct derselben geht.

Denn es lässt sich die Stosskraft immer in eine Componente zerlegen, welche in die an die Kugel am Stosspunct gelegten Tangentialebene fällt und sonach verloren geht, und in eine zweite darauf normale, also durch den Mittelpunct der Kugel gehende.

Es werde nun eine auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 16) ruhende Kugel vom Halbmesser $CA = r$ in der Richtung MN vorwärts gestossen und sei die durch den Mittelpunct C nach MN gerichtete Kraft (entweder die ursprüngliche oder durch Zerlegung erhaltene, wobei die darauf senkrechte zweite Componente unberücksichtigt bleibt) $= P$.

Die Kugel wird daher anfangs durch diese Kraft P eine fortschreitende Bewegung erhalten. Da sich jedoch durch die zwischen der Oberfläche der Kugel und jener der Unterlage stattfindende Reibung eine in entgegengesetzter Richtung NM wirkende Reibungskraft p entwickelt oder geltend macht; so verlege man diese nach C, d. h. man ersetze sie nach dem vorhergehenden Verfahren durch eine durch den Mittelpunct C gehende Kraft p', welcher jener p gleich, parallel und mit ihr gleich gerichtet ist, und ein Kräftepaar (p, p'') vom Arm $CA = r$. Dadurch wird aber die vorige Kraft P der progressiven Bewegung beständig um die Kraft $p' = p$ vermindert und endlich auf Null gebracht, während das Paar (p, p''), dessen Moment $= pr$ ist, eine (in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung) Drehung der Kugel nach vorwärts erzeugt.

39. Hat man der Kugel die drehende Bewegung in dieser Richtung nach vorwärts, noch bevor sie auf der Ebene MN (Fig. 17) aufliegt, beigebracht, so entwickelt sich wieder von dem Augenblicke an, in welchem die Kugel die Ebene berührt, die Kraft p der Reibung in der Richtung MN. Wird diese, wie vorhin, durch die mit p gleiche und gleichgerichtete Centralkraft p' und das Paar (p, p'') vom Momente pr ersetzt, so zeigt sich, dass die Kugel durch die Kraft $p' = p$ eine fortschreitende Bewegung in der Richtung MN und gleichzeitig durch das Paar (p, p'') ein Drehbestreben erhält, welches der ursprünglichen Drehbewegung entgegengesetzt ist, und diese daher vermindert.

40. Hat man einer auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 18) liegenden Kugel oder einem kreisförmigen Reife durch einen excentrischen Stoss eine fortschreitende Bewegung nach MN vorwärts und gleichzeitig eine drehende Bewegung nach rückwärts beigebracht, so wird bei der vorigen Zerlegung der hervorgerufenen Kraft p der Reibung, die der Kraft P entgegenwirkende Centralkraft $p' = p$ die fortschreitende Bewegung nach einer gewissen Zeit auf Null bringen, und das Paar (p, p'') vom Moment pr die ursprüngliche Drehbewegung vermindern.

Ist nun diese ursprüngliche Drehung bis zu dem Augenblicke, in welchem die fortschreitende Bewegung aufhört, nicht auch aufgehoben, so rollt die Kugel oder der Reifen wieder gegen M zurück.

41. Betrachtet man ferner die Wirkung der beiden Ruderräder in C und D eines Dampfschiffes AB (Fig. 19), so entwickelt sich bei der Rotation derselben für die Vorwärtsbewegung des Schiffes, durch die Reaction des Wassers gegen die Schaufeln derselben an jeder Seite, d. i. in C und D eine Kraft P, welche mit der Länge des Kiels AB parallel ist und eine im Allgemeinen nahezu durch den Schwerpunct O des Schiffes gehende Resultirende $R = 2P$ in der Richtung BA geben, mit welcher eben das Schiff vorwärts getrieben wird.

Rotirt dagegen von beiden Rädern nur das eine, z. B. jenes in C in der vorigen Richtung, während das zweite in D stille steht, so kann man die Kraft P wieder aus C nach O verlegen, d. h. nach dem Vorhergehenden diese Kraft P durch eine ihr gleiche, parallele und gleichgerichtete P' und das Paar (P, P'') vom Arm OC oder dem Momente $P.OC$ ersetzen. Die erstere Kraft $P' = P$ treibt das Schiff nach vorwärts (gegen vorhin mit der halben Stärke), während das Paar (P, P'') dem Schiffe um den Schwerpunct eine solche Drehung beibringt, dass die Spitze A desselben nach rechts abweicht.

Dieselbe Wirkung wird auch durch ein am Hintertheil des Schiffes angebrachtes Steuerruder hervorgebracht, dessen in das Wasser tauchende Fläche ab die angedeutete Lage hat. Wird die parallel mit AB gerichtete Componente des auf ab stattfindenden Wasserstosses mit p bezeichnet, so wirkt, wenn diese Kraft wieder nach O transferirt wird, die Kraft $p' = p$ der fortschreitenden Bewegung des Schiffes entgegen, während das Paar (p, p'') vom Momente $p.BE$ die genannte Drehung der Spitze A nach rechts bewirkt. Je schneller also das Schiff läuft (wodurch p grösser) und je breiter das Ruder in der Richtung ab ist (wodurch der Arm BE des Paares, also dessen Moment grösser wird), desto wirksamer wird bei derselben Stellung das Ruder.

42. Untersuchen wir endlich noch die Wirkung der Handruder bei der Lenkung eines Kahnes AB in Fig. 20.

Da sich der Kahnführer gewöhnlich am Hintertheile B des Kahnes oder in dessen Nähe befindet, so sei in den drei Figuren Fig. 20 a, b, c ab die Lage der Fläche des im Wasser nach der Richtung EC bewegten oder gestossenen Ruders. Hat nun das Ruder die in Fig. 20_a angedeutete Stellung, so wird durch die Reaction des Wassers eine Kraft P normal auf ab nach der Richtung CE gegen den Schwerpunct O des Kahnes hervorgerufen, deren eine Componente (§. 18, 1. Beispiel) den Kahn in der Richtung BA vorwärts treibt, ohne demselben eine merkliche Drehung zu geben.

Bei einer Ruderstellung wie in Fig. 20_b wirkt die hervorgerufene Kraft P excentrisch, und wenn man diese nach dem vorhergehenden Verfahren parallel nach O verlegt, d. i. diese in $P' = P$, und das Paar (P, P'') vom Moment $P.OE$ auflöst, so wird der Kahn durch die Kraft $P' = P$ nach vorwärts bewegt, dagegen durch das genannte Paar (P, P'') um den Schwerpunct O mit der Spitze A nach links gedreht.

Wird endlich das Ruder in der in Fig. 20_c angedeuteten Weise angewendet, so bringt, wenn man die durch den Stoss des Ruders hervorgerufene Reactionskraft P wieder parallel in den

Schwerpunct O verlegt, die Kraft $P' = P$ nur eine geringe seitliche Bewegung, dagegen das Kräftepaar (P, P'') vom Momente $P \,.\, OE$ eine desto kräftigere Drehung des Kahnes in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung (die Spitze A nach rechts) hervor, je grösser bei gleichem Werthe von P die Entfernung OE ist.

Die Folgerungen für das mehr oder weniger wirksame Lenken oder Steuern eines Kahnes mit solchen Handrudern ergeben sich jetzt von selbst.