zu theilen, die durch die Theilungspuncte 0, 1, 2...2n gedachten Ordinaten y_0, y_1, $y_2 \ldots y_{2n}$ zu berechnen oder durch Beobachtung zu bestimmen und in die vorige Formel, welche eben die Simpson'sche ist und um so genauere Resultate gibt, je grösser man $2n$ nimmt, zu substituiren.

Zweite Näherungsformel.

Die in vielen Fällen eben so brauchbare (und in §. 214 gleichfalls angewendete) Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots$$

$$\ldots + f[a + (n-1)\delta]\Big]\delta,$$

wobei $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Lässt man die Grösse $x = a$ nach und nach um die kleine Grösse δ zunehmen, also x allmälig in a, $a + \delta$, $a + 2\delta \ldots$ $a + n\delta = b$ übergehen, so, dass zwischen den beiden Grenzwerthen a und b, $n - 1$ Werthe oder Zwischenglieder liegen, und setzt man das allgemeine Integral:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x),$$

also das besondere:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ldots (1),$$

so hat man, wenn a in $a + \delta$ übergeht, nach dem Taylor'schen Theorem:

$$F(a+\delta) = F(a) + \frac{\mathrm{d}.F(a)}{\mathrm{d}a}\delta + \frac{\mathrm{d}^2.F(a)}{\mathrm{d}a^2}\frac{\delta^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3.F(a)}{\mathrm{d}a^3}\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man Kürze halber

$$\frac{\mathrm{d}.f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2.f(x)}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \text{ u. s. w.},$$

so ist wegen $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ sofort $\frac{\mathrm{d}.F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, also auch: $\frac{\mathrm{d}.F(a)}{\mathrm{d}a} = f(a)$, und eben so $\frac{\mathrm{d}^2.F(a)}{\mathrm{d}a^2} = f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}^3.F(a)}{\mathrm{d}a^3} = f''(a)$ u. s. w. fort, so, dass also der vorige Ausdruck auch die Form annimmt:

$$F(a+\delta) = F(a) + f(a).\delta + f'(a).\frac{\delta^2}{1.2} + f''(a).\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

Analog mit diesem Ausdrucke erhält man für die folgenden Werthe:

$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + f(a+\delta).\delta + f'(a+\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + f(a+2\delta).\delta + f'(a+2\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

. . . .

$$F(a+n\delta) = F[a+(n-1)\delta] + f[a+(n-1)]\delta + f'[a+(n-1)\delta]\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

Werden diese Reihen addirt, so erhält man, wegen $a + n\delta = b$ sofort:

$$(2)\quad F(b) - F(a) = \Sigma f(a+i\delta)\delta + \Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2} + \Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

wobei i der Reihe nach $= 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ zu setzen ist, so, dass z. B. $\Sigma f(a+i\delta) = f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f[a+(n-1)\delta]$ wird.

Nimmt man ferner nach und nach $f(x)$, $f'(x) \ldots$ statt $F(x)$ und $f'(x)$, $f''(x) \ldots$ statt $f(x)$, so erhält man eben so:

$$f(b) - f(a) = \Sigma f'(a+i\delta)\delta + \Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$f'(b) - f'(a) = \Sigma f''(a+i\delta)\delta + \Sigma f'''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$f''(b) - f''(a) = \Sigma f'''(a+i\delta)\delta + \ldots$$

Vernachlässigt man nun die dritten und höhern Potenzen der kleinen Grösse δ, so kann man zufolge der vorstehenden Relationen in der obigen Gleichung (2) statt

$\Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{2}$ setzen: $[f(b) - f(a)]\frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{4}$

und statt $\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{6}$ setzen: $[f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{6}$

(während alles Folgende nach der gemachten Voraussetzung wegfällt). Dadurch geht aber die genannte Gleichung (2) in die folgende über:

$$F(b) - F(a) = \Sigma f(a+i\delta)\delta + [f(b) - f(a)]\frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{12}$$

oder es ist (Relat. 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + f[a+(n-1)\delta]\Big\}\delta - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{12} \ldots (A).$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Integrale um so genauer, je kleiner $\delta = \frac{b-a}{n}$, d. i. je grösser n ist, und je langsamer sich die Function $f(x)$ zwischen ihren Grenzen a und b ändert.

In den meisten Fällen wird man das letzte in δ^2 multiplicirte Glied auslassen können, wodurch diese Formel (A) in die einfachere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + f[a + (n-1)\delta]\Big\}\,\delta \ldots (B)$$

übergeht, so, dass diese letztere Formel nur die speciellen Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben sein können, ohne dass die Form dieser Function $f(x)$ selbst gegeben oder bekannt zu sein braucht.

Zusatz 4

zu §. 374.

1. Der von uns in dem hier angezogenen §. des Compendiums ausgesprochene Wunsch, dass über den Widerstand des Wassers in Canälen und Flussbetten zum Behufe der Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers noch vielseitigere und genauere Versuche von geschickten und umsichtigen Experimentatoren durchgeführt werden möchten, geht nun durch die unter der Leitung des Capitäns A. A. Humpherys und Lieutenant H. L. Abbot im Jahre 1850 begonnenen und kürzlich vollendeten topo- und hydrographischen Arbeiten behufs der Regulirung des ungeheuren Mississippi-Flusses zum Schutze der angrenzenden Niederungen gegen Ueberschwemmung in einer alle Erwartung übertreffenden Weise in Erfüllung.

Wir entnehmen aus dem uns eben noch vor Beendigung des Druckes unseres Buches zugekommenen (nur in verhältnissmässig wenigen Exemplaren gedruckten), vom Capitän Humphery und Lieutenant Abbot (*of the Corps of Topographical Engineers*, *United States Army*) in ausgezeichneter Weise verfassten und im Jahre 1861 zu Philadelphia unter Autorität des