Zusatz 3.

Ableitung der Simpson'schen Näherungsformel.

Um die in diesem Werke mehrere Male angewendete sogenannte Simpson'sche Regel auf eine einfache Weise abzuleiten, kann man folgenden geometrischen Weg einschlagen.

Bekanntlich beruht die Quadratur der ebenen Curven, d. h. die Bestimmung der krummlinigen ebenen Flächen, auf der Entwicklung des bestimmten Integrales $\int_{x'}^{x''} y\,dx$, wobei y die der allgemeinen Abscisse x entsprechende Ordinate der betreffenden Curve, und x', x'' die den beiden äussern Ordinaten, welche die zu bestimmende Fläche mit begrenzen, zugehörigen Werthe von x sind. Lässt sich nun y nicht als eine Function von x ausdrücken, oder ist die Curve nur eine empirische, für welche die, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten nur aus Beobachtungen gefunden wurden, oder ist endlich der Ausdruck $y\,dx$ überhaupt nicht integrabel; so muss man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen, nämlich die zu bestimmende Fläche durch nahe an einander liegende Ordinaten in schmale Trapeze, wovon eine Seite ein Theil der Curve ist, zerlegen und diese einzelnen Trapeze mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen suchen, indem dann ihre Summe sofort auch der näherungsweise Werth des obigen Integrales ist.

Man verfährt dabei am einfachsten, wenn man in allen diesen Fällen die betreffende Curve als eine gemeine oder Appollonische Parabel ansieht und die bekannten Eigenschaften dieser Curve dabei gehörig benützt.

Um nämlich die von den beiden Ordinaten pm, $p'm'$ (Fig. 21, Tab. VIII) der Abscisse pp' und dem Bogen mam' der Curve AaD' begrenzte ebene Fläche näherungsweise zu bestimmen, denke man sich den Bogen mam' als einer gemeinen Parabel angehörig, welche durch die drei Puncte m, a, m' geht und wobei die Ordinate aq in der Mitte zwischen jenen pm und $p'm'$ liegen soll. Da jedoch die völlige Bestimmung der Parabel (Lehrb. II. §. 135) vier Bedingungen erfordert, so kann man noch als vierte Bedingung hinzufügen, dass a der Scheitelpunct eines Durchmessers aq (Comp. §. 516) sein soll.

Dies vorausgesetzt, wird (Comp. §. 522) die Sehne mm durch die Ordinate aq im Puncte b halbirt und die zu mm' durch a gezogene parallele Gerade nan' bildet in diesem Puncte a eine Tangente an die Curve. Da nun bekanntlich das parabolische Segment $mam'm = \frac{2}{3}$ Parallelogramm mn', dieses also doppelt so gross als die Fläche $mnam'n'$ ist; so hat man, wenn man das Trapez $pmbm'p' = A$, jenes $pnn'p' = B$, die parabolische Fläche $pmam'p' = F$ und das parabolische Segment $mam'm = f$ setzt, sofort $f = F - A = 2(B - F)$ und daraus:

$$3F = A + 2B \ldots (1).$$

Nun ist aber $A = (pm + p'm')pq$ und $B = (pn + p'n')pq$ oder wegen $aq = \frac{pn + p'n'}{2}$ auch $B = 2aq \times pq$, folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation (1) substituirt:

$$F = \frac{pq}{3}(pm + p'm' + 4aq),$$

oder wenn man $pp' = a$ setzt, auch:

$$F = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}(pm + p'm' + 4aq) \ldots (2).$$

Halbirt man ferner auch noch pq und qp' in β und β', und zieht durch die Halbirungspuncte die Ordinaten $\beta\alpha$ und $\beta'\alpha'$, so ist, wenn man $pq = qp' = a'$ setzt, auf dieselbe Weise, die Fläche:

$$pmaq = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta)$$

und die Fläche

$$qam'p' = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(aq + m'p' + 4\alpha'\beta'),$$

folglich:

$$F = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta + aq + m'p' + 4\alpha'\beta')$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}[mp + m'p' + 4(\alpha\beta + \alpha'\beta') + 2aq],$$

oder wegen $a' = \frac{a}{2}$, und wenn man die Ordinaten pm, $\beta\alpha \ldots p'm'$ der Reihe nach mit $y_0, y_1, \ldots y_4$ bezeichnet, auch:

$$F = \frac{a}{3.4}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4),$$

eine Formel, welche sich leicht fortsetzen lässt, im Falle man die Intervalle $p\beta$, $\beta q \ldots$ abermals halbiren, d. i. die ursprüngliche Basis pp' in 8, und durch fortgesetztes Halbiren noch weiter in 16, 32 u. s. w. gleiche Theile theilen will.

Theilt man dagegen jedes der beiden vorigen Intervalle $pq = qp'$ in 3 gleiche Theile, bezeichnet die auf einander folgenden Theilungspuncte mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so wie die durch die Puncte p (oder 0) 1, 2 . . . 6 oder p' gezogenen Ordinaten der Reihe nach durch y_0, $y_1 \ldots y_6$ und setzt die Grösse der Intervalle $0,1 = 1,2 = \ldots = 5,6 = a''$; so hat man nach der durch die Relation (2) ausgedrückten Regel für die Flächen der auf einander folgenden Trapeze oder Streifen der Reihe nach:

$$\frac{a''}{3.2}(y_0 + y_2 + 4y_1),\ \frac{a''}{3.2}(y_2 + y_4 + 4y_3),\ \frac{a''}{3.2}(y_4 + y_6 + 4y_5),$$

folglich, wenn man diese Flächen summirt, sofort, wegen $a'' = \frac{a}{3}$:

$$F = \frac{a}{3.6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6).$$

Man sieht aus der bisherigen Entwicklung, dass wenn man die Basis $pp' = a$ überhaupt nur in eine g e r a d e Anzahl, z. B. in $2n$ gleiche Theile theilt, sofort allgemein:

$$F = \frac{a}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ist und dass man die gesuchte Fläche F um so genauer erhält, je grösser n ist.

Setzt man die Summe der beiden ä u s s e r n Ordinaten $y_0 + y_{2n} = S_{2n}$, jene der durch die u n g e r a d e n Theilungspuncte gehenden: $y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1} = S_{2n-1}$ und die Summe der durch die geraden Theilungspuncte gehenden Ordinaten (wobei die letzte sofort ausgeschlossen ist) $y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2} = S_{2n-2}$; so ist auch:

$$F = \frac{a}{3.2n}(S_{2n} + 4\,S_{2n-1} + 2\,S_{2n-2}).$$

Da nun aber nach der einleitenden Bemerkung diese Fläche nichts anderes als das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ ist, wenn man nämlich die den Ordinaten y_0 und y_{2n} entsprechenden Abscissen durch x' und x'' bezeichnet; so hat man endlich wegen $a = x'' - x'$, als einen Näherungswerth von beliebiger Genauigkeit:

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x'' - x'}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$= \frac{x'' - x'}{3.2n}(S_{2n} + 4\,S_{2n-1} + 2\,S_{2n-2}),$$

wobei es sich also nur darum handelt, die Differenz $x'' - x'$ in eine beliebige, jedoch g e r a d e Anzahl $(= 2n)$ gleicher Theile zu theilen, die durch die Theilungspuncte 0, 1, 2...2n gedachten Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \dots y_{2n}$ zu berechnen oder durch Beobachtung zu bestimmen und in die vorige Formel, welche eben die Simpson'sche ist und um so genauere Resultate gibt, je grösser man $2n$ nimmt, zu substituiren.

Zweite Näherungsformel.

Die in vielen Fällen eben so brauchbare (und in §. 214 gleichfalls angewendete) Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \dots$$
$$\dots + f[a+(n-1)\delta]\Big]\delta,$$

wobei $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Lässt man die Grösse $x=a$ nach und nach um die kleine Grösse δ zunehmen, also x allmälig in a, $a+\delta$, $a+2\delta \dots$ $a+n\delta=b$ übergehen, so, dass zwischen den beiden Grenzwerthen a und b, $n-1$ Werthe oder Zwischenglieder liegen, und setzt man das allgemeine Integral:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x),$$

also das besondere:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \dots (1),$$

so hat man, wenn a in $a+\delta$ übergeht, nach dem Taylor'schen Theorem:

$$F(a+\delta) = F(a) + \frac{\mathrm{d}.F(a)}{\mathrm{d}a}\delta + \frac{\mathrm{d}^2.F(a)}{\mathrm{d}a^2}\frac{\delta^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3.F(a)}{\mathrm{d}a^3}\frac{\delta^3}{1.2.3} + \dots$$

Setzt man Kürze halber

$$\frac{\mathrm{d}.f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x),\quad \frac{\mathrm{d}^2.f(x)}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \text{ u. s. w.},$$

so ist wegen $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ sofort $\frac{\mathrm{d}.F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, also auch: $\frac{\mathrm{d}.F(a)}{\mathrm{d}a} = f(a)$, und eben so $\frac{\mathrm{d}^2.F(a)}{\mathrm{d}a^2} = f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}^3.F(a)}{\mathrm{d}a^3} = f''(a)$ u. s. w. fort, so, dass also der vorige Ausdruck auch die Form annimmt:

$$F(a+\delta)=F(a)+f(a).\delta+f'(a).\frac{\delta^2}{1.2}+f''(a).\frac{\delta^3}{1.2.3}+\dots$$

Analog mit diesem Ausdrucke erhält man für die folgenden Werthe:

$$F(a+2\delta)=F(a+\delta)+f(a+\delta).\delta+f'(a+\delta).\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$F(a+3\delta)=F(a+2\delta)+f(a+2\delta).\delta+f'(a+2\delta).\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

. . . .

$$F(a+n\delta)=F[a+(n-1)\delta]+f[a+(n-1)]\delta+f'[a+(n-1)\delta]\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

Werden diese Reihen addirt, so erhält man, wegen $a+n\delta=b$ sofort:

$$(2)\ F(b)-F(a)=\Sigma f(a+i\delta)\delta+\Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^3}{1.2.3}+\dots$$

wobei i der Reihe nach $=0,\ 1,\ 2\dots(n-1)$ zu setzen ist, so, dass z. B. $\Sigma f(a+i\delta)=f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\dots$ $+f[a+(n-1)\delta]$ wird.

Nimmt man ferner nach und nach $f(x)$, $f'(x)\dots$ statt $F(x)$ und $f'(x)$, $f''(x)\dots$ statt $f(x)$, so erhält man eben so:

$$f(b)-f(a)=\Sigma f'(a+i\delta)\delta+\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$f'(b)-f'(a)=\Sigma f''(a+i\delta)\delta+\Sigma f'''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$f''(b)-f''(a)=\Sigma f'''(a+i\delta)\delta+\dots$$

Vernachlässigt man nun die dritten und höhern Potenzen der kleinen Grösse δ, so kann man zufolge der vorstehenden Relationen in der obigen Gleichung (2) statt

$\Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{2}$ setzen: $[f(b)-f(a)]\frac{\delta}{2}-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{4}$

und statt $\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{6}$ setzen: $[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{6}$

(während alles Folgende nach der gemachten Voraussetzung wegfällt). Dadurch geht aber die genannte Gleichung (2) in die folgende über:

$$F(b)-F(a)=\Sigma f(a+i\delta)\delta+[f(b)-f(a)]\frac{\delta}{2}-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{12}$$

oder es ist (Relat. 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big\{\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\dots$$
$$\dots+f[a+(n-1)\delta]\Big\}\delta-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{12}\dots(A).$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Integrale um so genauer, je kleiner $\delta = \frac{b-a}{n}$, d. i. je grösser n ist, und je langsamer sich die Function $f(x)$ zwischen ihren Grenzen a und b ändert.

In den meisten Fällen wird man das letzte in δ^2 multiplicirte Glied auslassen können, wodurch diese Formel (A) in die einfachere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + f[a + (n-1)\delta]\Big\}\,\delta \ldots (B)$$

übergeht, so, dass diese letztere Formel nur die speciellen Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben sein können, ohne dass die Form dieser Function $f(x)$ selbst gegeben oder bekannt zu sein braucht.

Zusatz 4

zu §. 374.

1. Der von uns in dem hier angezogenen §. des Compendiums ausgesprochene Wunsch, dass über den Widerstand des Wassers in Canälen und Flussbetten zum Behufe der Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers noch vielseitigere und genauere Versuche von geschickten und umsichtigen Experimentatoren durchgeführt werden möchten, geht nun durch die unter der Leitung des Capitäns A. A. Humpherys und Lieutenant H. L. Abbot im Jahre 1850 begonnenen und kürzlich vollendeten topo- und hydrographischen Arbeiten behufs der Regulirung des ungeheuren Mississippi-Flusses zum Schutze der angrenzenden Niederungen gegen Ueberschwemmung in einer alle Erwartung übertreffenden Weise in Erfüllung.

Wir entnehmen aus dem uns eben noch vor Beendigung des Druckes unseres Buches zugekommenen (nur in verhältnissmässig wenigen Exemplaren gedruckten), vom Capitän Humphery und Lieutenant Abbot (*of the Corps of Topographical Engineers*, *United States Army*) in ausgezeichneter Weise verfassten und im Jahre 1861 zu Philadelphia unter Autorität des