Zusatz 1.

1. Projicirt man auf eine beliebige gerade Linie die Bewegung eines materiellen Punctes im Raume, so wie auch die Kraft, welche dessen Beschleunigung bewirkt, so besteht in jedem Augenblick zwischen der Projection dieser Kraft und der Projection der Bewegung, welche in der Projection sofort eine geradlinige ist, genau dieselbe Relation, wie zwischen der ursprünglichen Kraft und der im Allgemeinen krummlinigen Bewegung des materiellen Punctes im Raume.

Ist nämlich bei einer solchen Bewegung im Raume m die Masse des beweglichen Punctes und in einem bestimmten Augenblicke P die Intensität der variablen Kraft, so wie V die Grösse der veränderlichen Geschwindigkeit, und sind auf irgend eine Gerade (als Projectionsgerade) bezogen in dem nämlichen Augenblicke p und v die Projectionen von P und V, so findet eben so, wie (Nr. **125**) $P = m\frac{dV}{dt}$ ist, auch die Relation $p = m\frac{dv}{dt}$ Statt.

2. Um diesen in seiner Anwendung (Nr. **131**, 5) so wichtigen Satz zu beweisen, muss man sich für's Erste an die Fundamentalsätze der Projectionen von Puncten oder Linien im Raume auf gegebene Projectionsebenen oder Geraden erinnern.

Unter der Projection a eines Punctes A im Raume auf eine gegebene Gerade (Projectionsgerade) versteht man nämlich den Fuss- oder Durchschnittspunct jener geraden Linie, welche man mit einer gegebenen Ebene (Directionsebene) parallel aus dem zu projicirenden Puncte A an die Projectionsgerade gezogen hat.

Projicirt man nach derselben Methode die Endpuncte A und B irgend einer geraden Linie AB im Raume auf irgend eine Gerade, und sind a und b diese Projectionen, so ist die zwischen diesen Puncten liegende gerade Linie ab die Projection von AB auf diese nämliche Gerade. Zugleich folgt auch, dass, wenn man die Projection dieser Geraden AB auf was immer für eine andere mit der erstern Projectionsgeraden parallelen Geraden vornimmt, diese Projection ab (weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind) stets dieselbe Länge hat.

Jenachdem die genannte Directionsebene auf der Projectionsgeraden perpendikulär oder schief steht, sind diese Projectionen orthogonal oder schief.

3. Stellt am (Fig. 160′) eine Geschwindigkeit oder eine Kraft vor, welche man in drei auf einander senkrechte Componenten ab, ac, ad parallel mit den drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ zerlegt hat, und projicirt man diese Gerade am orthogonal auf eine mit der Achse AX parallele Gerade UV (wobei also die Ebene der yz die Directionsebene bildet), so ist, wie leicht zu sehen, $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ diese Projection und gleich der Componente ab, weil ab die Projection der Diagonale am auf die Kante ab als einer mit UV parallelen Geraden ist. (Vorige Bemerkung.)

4. Es sei nun $A'S$ (Fig. 166) die von dem materiellen Puncte, dessen Masse $= m$ sein soll, im Raume beschriebene Curve oder Trajectorie und M die Position oder Lage dieses Punctes in irgend einem Zeitmomente. Es bezeichne ferner MN die auf der in M an die Curve gezogene Tangente MT liegende Geschwindigkeit V, so wie MQ die Grösse der nach der Richtung MP wirkenden Kraft P in dem eben zu betrachtenden Augenblicke. Endlich sei UV jene Gerade, auf welche diese allgemeine Bewegung im Raume projicirt werden soll.

Wird diese Projection ausgeführt, so ist für den genannten Zeitmoment $mn = v$ die Projection der Geschwindigkeit $MN = V$, und $mq = p$ die Projection der Kraft $MQ = P$, folglich $\frac{dv}{dt}$ die in demselben Augenblicke stattfindende Beschleunigung der nach der geraden Linie UV gedachten Bewegung.

Legt man durch den Anfangspunct A der Bewegung ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ in der Weise, dass die Achse AX zu der gegebenen Geraden (als Projectionsgerade) parallel wird, so kann man die Bewegung des materiellen

Punctes m im Raume so ansehen, als wäre sie aus drei Seitenbewegungen nach diesen Achsen zusammengesetzt. Es wird daher die im Puncte M der Curve $A'S$ stattfindende Geschwindigkeit V die Resultante aus drei Seitengeschwindigkeiten nach den Achsen AX, AY, AZ sein. Von diesen drei Componenten ist die erstere nach der Bemerkung der vorigen Nr. nichts Anderes, als die Projection mn. Eben so erscheint die Kraft P als die Resultirende von drei Seitenkräften nach AX, AY, AZ, d. i. als die Diagonale des Parallelopipedes, dessen zusammenstossende Seiten mit diesen Achsen parallel sind und wobei die mit AX parallele Componente p wieder nichts Anderes als eben die Projection mq ist.

Dies vorausgeschickt und berücksichtigend, dass jede dieser drei geradlinigen Bewegungen genau so stattfindet, als ob sie allein und von den beiden übrigen unabhängig wäre, ist für jene nach der Richtung AX, so wie dies überhaupt für jede geradlinige Bewegung der Fall, nach Nr. **125** die bewegende Kraft in jedem Augenblicke gleich der Masse des bewegten Punctes, multiplicirt in die in diesem Augenblicke stattfindende Beschleunigung. Da nun hier die Beschleunigung nach AX oder UV gleich $\frac{dv}{dt}$ ist (wegen $ab = \alpha\beta = \alpha'\beta'$ in der vorigen Nr.), so folgt in der That, wie zu beweisen war, die Relation:

$$p = m\frac{dv}{dt} \ldots (1).$$

Anmerkung. Es ist einleuchtend, dass man statt der orthogonalen auch jede schiefe Projection hätte wählen können.

Folgerungen.

1. Ist als specieller Fall die im Raume betrachtete Bewegung geradlinig, und nimmt man diese gerade Linie (als Richtung der Bewegung) selbst für die Projectionsgerade UV, so wird offenbar $v = V$ und $p = P$, mithin geht die vorige Relation (1) in die ursprüngliche:

$$P = m\frac{dV}{dt}$$

selbst über.

2. Wirken auf den materiellen Punct m mehrere Kräfte, so darf man die vorige Kraft P nur als die Resultirende aus

allen diesen Kräften ansehen, um zu demselben Resultate zu gelangen.

3. Ist die hier angenommene variable Geschwindigkeit V die Resultirende aus den Seitengeschwindigkeiten u, u', u''..., welche mit der Achse der x oder AX beziehungsweise die Winkel α, α', α''... bilden, so wäre die obige Projection V (in einem bestimmten Augenblicke):

$$v = u \, Cos \, \alpha + u' \, Cos \, \alpha' + u'' \, Cos \, \alpha'' + \ldots$$

weil nach einem bekannten Satze der Geometrie die Schlussseite eines Polygones gleich ist der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf irgend eine Gerade.

Es ist daher auch die Beschleunigung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d \, . \, u \, Cos \, \alpha}{dt} + \frac{d \, . \, u' \, Cos \, \alpha'}{dt} + \frac{d \, . \, u'' \, Cos \, \alpha''}{dt} + \ldots$$

der projicirten Totalgeschwindigkeit V gleich der algebraischen Summe der Beschleunigungen aus den projicirten Seitengeschwindigkeiten.

Hieraus folgt auch ferner, dass die Projection der Intensität der Kraft P in irgend einem Augenblicke, d. i.

$$p = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d \, . \, u \, Cos \, \alpha}{dt} + m \frac{d \, . \, u' \, Cos \, \alpha'}{dt} + \ldots$$

ist.

Zusatz 2.

1. Es sind in der neuesten Zeit über die gleitende Reibung mit grossen Geschwindigkeiten, wie solche beim Eisenbahnbetriebe vorkommen, zahlreiche Versuche angestellt worden, welche geeignet sind, diesen Gegenstand in ein neues Licht zu setzen und die bisherigen Reibungsgesetze mehr oder weniger zu modificiren. Namentlich sind es die ganz kürzlich von dem *Ingénieur des mines* Hrn. Bochet, auf der französischen Westbahn in grosser Zahl und mit aller möglichen Genauigkeit und Vorsicht ausgeführten Experimente *), auf die wir hier aufmerksam machen und deren Resultate wir dem Wesentlichen nach anführen wollen.

*) *Nouvelles recherches expérimentales sur le frottement de glissement (Annales des mines*, *Tome XIX. Paris* 1861.)