Vierter Abschnitt.

Aërodynamik.

Von dem Ausflusse der Luft aus Behältern.

(§. 474.)

315. Bei Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit der Luft oder irgend eines Gases wollen wir von der Voraussetzung ausgehen, dass sowohl der Druck als auch die Geschwindigkeiten in den sämmtlichen Luftschichten im Gefässe bereits constant geworden, was jedenfalls sehr bald eintritt, wenn man annimmt, dass das Gefäss mit einem Behälter in Verbindung steht, welcher das ausfliessende Gas beständig ersetzt, und am obern Theil des Gefässes einen constanten Druck bewirkt. Uebrigens soll auch hier die Hypothese des Parallelismus der Schichten angenommen, von der Schwere jedoch, welche auf den Druck des Gases keinen merkbaren Einfluss hat, gänzlich abstrahirt werden.

316. Es sei nun A der obere Querschnitt des Gefässes, P der an dieser Stelle Statt findende Druck des Gases auf die Flächeneinheit, und C die in dieser Schichte vorhandene Geschwindigkeit, sobald nämlich der erwähnte Beharrungsstand eingetreten; ferner sei a der Querschnitt der Ausflussöffnung, p der Druck oder die Spannung des Gases an dieser Stelle, so wie c die Ausflussgeschwindigkeit; endlich seien ϱ und ϱ' die den Spannungen P und p entsprechenden Dichtigkeiten des Gases oder der Luft, so wie v das Volumen der Gewichtseinheit der Luft oder des Gases bei der Dichte ϱ genommen.

Dies vorausgesetzt, entwickelt das Luftvolumen v bei dessen Ausdehnung, während die Luft von der Spannung P auf jene p herabgeht, nach Gleichung (9') in Nr. **312** die Arbeitsgrösse: $Pv\, logn. \frac{P}{p}$, und da diese blos dazu verwendet wird, die Luftmasse $v\varrho$ von der kleineren Geschwindigkeit C auf die grössere c zu bringen, so hat man (§. 227):

$$Pv\, logn. \frac{P}{p} = \tfrac{1}{2} v \varrho (c^2 - C^2).$$

Nun ist aber hier die Gleichung der Continuität: $AC\varrho = ac\varrho'$, woraus $C = \frac{a}{A} \frac{\varrho'}{\varrho} c$, oder wenn man (Nr. **286**, *m*) $P = k\varrho$ setzt und annimmt, dass sich die Temperatur des Gases während des Ausflusses nicht ändert, wodurch k constant bleibt, und daher auch $p = k\varrho'$, also $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{p}{P}$ wird, sofort $C = \frac{a}{A} \frac{p}{P} c$ folgt.

Setzt man diesen Werth für C in die vorige Gleichung und zugleich auch $\varrho = \frac{P}{k}$ (vorige Relation), so erhält man:

$$Pv\, logn. \frac{P}{p} = \frac{Pv}{2k} c^2 \left(1 - \frac{a^2 p^2}{A^2 P^2}\right) \ldots (f)$$

und aus dieser Gleichung die theoretische Ausflussgeschwindigkeit, wenn die Dichte des Gases dabei constant bleibt:

$$c = \sqrt{\frac{2k\, logn. \frac{P}{p}}{1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2}} \ldots (1).$$

Um auch die Geschwindigkeit C des Gases am obern Theil des Gefässes zu finden, darf man nur C aus der Bedingungsgleichung $APC = apc$ ausdrücken. Man erhält, wenn man zugleich für c den vorigen Werth aus (1) substituirt und reducirt:

$$C = \sqrt{\frac{2k\, logn. \frac{P}{p}}{\left(\frac{AP}{ap}\right)^2 - 1}} \ldots (2).$$

Soll der Ausfluss möglich sein, so muss $a < A$ und $p < P$, also auch $ap < AP$ sein, woraus sofort folgt, dass bei diesen Bedingungen die beiden vorigen Ausdrücke in reeller Form erscheinen, während sie im Gegentheile imaginär würden.

Anmerkung. Anstatt diese Formeln aus der Theorie der mechanischen Wärmelehre zu entwickeln, kann man auch ganz einfach und consequent von den allgemeinen Bewegungsgleichungen des zweiten Abschnittes ausgehen, und dabei genau so verfahren, wie dies bei der Ableitung der

Gleichungen in Nr. **189** u. f. für den Ausfluss tropfbar-flüssiger Körper geschehen ist.

Ist nämlich, wie dort, in dem Gefässe in Fig. 93, $CD = z$ die verticale Ordinate einer beliebigen horizontalen Gasschicht Mn, w ihre verticale Geschwindigkeit nach abwärts, p der in derselben auf die Flächeneinheit herrschende Druck und ϱ ihre Dichte, P der constante auf die Oberfläche A des Gases in AB ausgeübte Druck, so wie p' der an der Ausflussöffnung $ab = a$ Statt findende Druck (beide wieder auf die Flächeneinheit bezogen), wobei P immer grösser als p' sein soll; so hat man hier nur insbesondere zu bemerken, dass 1. die Dichte ϱ nicht constant ist, sondern von Schichte zu Schichte im Verhältniss des Druckes p variirt, so dass (Nr. **286**) $p = k\varrho$ gesetzt werden kann, und dass man 2. dabei von der Schwere abstrahiren, also das in den Gleichungen vorkommende Glied $\varrho g z$ (wegen des sehr geringen Werthes von ϱ) auslassen kann.

Dies vorausgesetzt, reduciren sich auch hier die allgemeinen Gleichungen (1) in Nr. **186** wieder auf die letzte, und zwar auf jene:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = g - w\frac{dw}{dz},$$

oder wegen $\varrho = \frac{p}{k}$ auf die Gleichung:

$$k\frac{dp}{p} = g\,dz - w\,dw.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt:

$$k\,logn.\,p = gz - \tfrac{1}{2}w^2 + C\ldots(m).$$

Zur Bestimmung der Constante C berücksichtige man, dass an der Oberfläche AB, d. i. für $z=0$, erstlich $p = P$ und $w = w'$ wird, wo w' aus der Gleichung der Continuität: $w'PA = wp\alpha$ den Werth $w' = \frac{p\alpha}{PA}w$ erhält; es folgt nämlich aus der vorigen Gleichung (m), wenn man diese Werthe substituirt, die Constante:

$$C = k\,logn.\,P + \tfrac{1}{2}\frac{p^2\alpha^2}{P^2A^2}w^2$$

und wenn man diesen Werth für C in (m) setzt und zugleich das Glied gz als unbedeutend klein gegen $k\,logn.\,\frac{P}{p}$ auslässt (indem k, Nr. **286**, eine sehr grosse Zahl gegen g ist) auch:

$$k\,logn.\,\frac{P}{p} = \tfrac{1}{2}w^2\left(1 - \frac{\alpha^2p^2}{A^2P^2}\right)\ldots(n).$$

Geht man nun auf die Ausflussöffnung selbst über, wofür in dieser Relat. (n) $p = p'$, $\alpha = a$ und $w = c$ zu setzen ist, so erhält man daraus die Ausflussgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{2k\,logn.\,\frac{P}{p'}}{1 - \frac{a^2p'^2}{A^2P^2}}}\ldots(\alpha),$$

so wie für die Geschwindigkeit in einem beliebigen Querschnitt von der Grösse α (vermöge der Continuitätsgleichung $w p \alpha = c p' a$):

$$w = \frac{a p'}{\alpha p} \sqrt{\frac{2k \, logn. \frac{P}{p'}}{1 - \frac{a^2 p'^2}{A^2 P^2}}} \ldots (\beta).$$

Ist die Oeffnung a bedeutend kleiner als der Querschnitt A, so kann man den Bruch $\frac{a^2 p'^2}{A^2 P^2}$ auslassen, und diese beiden Gleichungen erhalten die einfachere Form:

$$c = \sqrt{2k \, logn. \frac{P}{p'}} \ldots (\alpha'), \quad w = \frac{a p'}{\alpha p} \sqrt{2k \, logn. \frac{P}{p'}} \ldots (\beta')$$

und wenn man diesen Werth für w in der obigen Gleichung (n) substituirt, so erhält man zur Bestimmung des Druckes p:

$$\frac{logn. \frac{P}{p}}{logn. \frac{P}{p'}} = a^2 p'^2 \left(\frac{1}{\alpha^2 p^2} - \frac{1}{A^2 P^2} \right) \ldots (\gamma).$$

317. Ist, wie gewöhnlich, die Ausflussöffnung a gegen den Querschnitt A des Gefässes so klein, dass man die 2. Potenz des Bruches $\frac{a p}{A P}$ gegen die Einheit auslassen kann, so wird, während die Geschwindigkeit C nur sehr gering ausfällt, die Ausflussgeschwindigkeit c viel einfacher und für gewöhnlich genau genug durch die Formel:

$$c = \sqrt{2k \, logn. \frac{P}{p}} \ldots (3)$$

ausgedrückt.

Setzt man die Differenz $P - p = \mathrm{d}$, also $p = P - \mathrm{d}$, so wird (Comp. §. 290):

$$logn. \frac{P}{p} = logn. \frac{P}{P - \mathrm{d}} = - logn. \frac{P - \mathrm{d}}{P} = - logn. \left(1 - \frac{\mathrm{d}}{P} \right) = -$$

$$= - \left[- \frac{\mathrm{d}}{P} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}}{P} \right)^2 - \ldots \right]$$

oder für Werthe von d, welche kleiner als $\frac{1}{10} P$ sind, für welche man ohne merklichen Fehler die höheren Potenzen des Bruches $\frac{\mathrm{d}}{P}$ auslassen kann, auch: $logn. \frac{P}{p} = \frac{\mathrm{d}}{P} = \frac{P - p}{P}$; folglich ist, wenn man diesen Werth in der vorigen Formel (3) substituirt, annähernd:

$$c = \sqrt{2k \left(\frac{P - p}{P} \right)} \ldots (4).$$

Ist h die Höhe einer Luft- oder Gassäule von derselben Dichte ϱ der Luft oder des Gases im Gefässe, welche durch ihr Gewicht dem Drucke $P-p$ das Gleichgewicht hält, so, dass also $g\varrho h = P-p$ ist, so folgt, wegen (**316**) $P = k\varrho$, sofort $\frac{P-p}{P} = \frac{g\varrho h}{k\varrho} = \frac{gh}{k}$, und mit diesem Werthe aus der vorigen Gleichung (4) wieder annähernd:

$$c = \sqrt{2gh} \ldots (5),$$

welcher Ausdruck sofort mit jenem übereinstimmt, welcher (Nr. **189**) für den Ausfluss von tropfbaren oder incompressibeln Flüssigkeiten unter gleichen Bedingungen gefunden wurde.

Ist endlich γ das Gewicht der cubischen Einheit des Gases von der Dichte ϱ, also $\gamma = g\varrho$, so ist, wegen $h = \frac{P-p}{g\varrho} = \frac{P-p}{\gamma}$, auch:

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P-p)} \ldots (6).$$

318. Die für die Ausflussgeschwindigkeit c entwickelten Formeln gelten sowohl für den Ausfluss einer Luft- oder Gasart unter dem constanten Druck P, wenn an der Ausflussöffnung der Gegendruck p auf die Flächeneinheit besteht, als auch, wenn die Luft aus einem Gefässe mittelst eines Kolbens vom Querschnitt A mit dem auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke P aus einer Oeffnung vom Querschnitt a hinausgepresst wird, und dabei ein äusserer Gegendruck Statt findet, welcher ebenfalls auf die Flächeneinheit bezogen $= p$ ist.

Findet der Ausfluss, wie gewöhnlich, in die freie Luft Statt, so lässt man nach Navier für p den Druck der Atmosphäre gelten (obschon, vielleicht wie auch Holzmann bemerkt, dafür angemessener der Mittelwerth $\frac{1}{2}(P+p)$ genommen werden sollte) und man pflegt dann nicht den innern Druck P, sondern mittelst eines oben offenen Quecksilber- oder Wasser-Manometers (§. 467) sogleich die Differenz der Spannungen $P-p$ zu messen.

Ist dabei die sogenannte manometrische oder Sperr-Flüssigkeit Quecksilber, so ist der Druck $P-p$ gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Flächeneinheit und Höhe, die Manometerhöhe ist.

Ist daher h die Höhe der Manometersäule und q das Gewicht der cubischen Einheit (Volumeneinheit) der manometrischen Flüssigkeit, so ist also $P-p = qh$.

Ist ferner b der äussere Barometerstand und q' das Gewicht der Volumeneinheit Quecksilber, so ist eben so $p = q'b$, folglich

$$\frac{P}{p} = 1 + \frac{P-b}{p} = 1 + \frac{q}{q'}\frac{h}{b} = 1 + m\frac{h}{b},$$

wenn man nämlich Kürze halber den Quotienten oder das Verhältniss $\frac{q}{q'} = m$ setzt.

Dieser Werth für $\frac{P}{p}$ in der obigen Formel (3) gesetzt, gibt die Ausflussgeschwindigkeit unter der Form:

$$c = \sqrt{2k\, logn.\left(1 + \frac{mh}{b}\right)} \ldots (6').$$

319. Da bei Gebläsen, Gasometern u. dgl. der Bruch $\frac{mh}{b}$ selten den Werth von $\frac{1}{5}$ übersteigt, so kann man den Gebrauch der vorigen Formel (6) dadurch vereinfachen, dass man den Logarithmus des Binoms in die bekannte Reihe $\frac{mh}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{mh}{b}\right)^2 + \ldots$ auflöst und davon nur noch das 2. Glied beibehält, endlich auch die Wurzel aus diesen beiden ersten Gliedern nur bis zur 1. Potenz des Bruches $\frac{mh}{b}$ entwickelt; man erhält dadurch den genäherten Ausdruck:

$$c = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{mh}{b}\right)\sqrt{2k\frac{mh}{b}} \ldots (7).$$

320. Was die in allen diesen Formeln vorkommende Constante k betrifft, so muss man (Nr. **286**) dafür jedesmal den der betreffenden Gasart entsprechenden Werth setzen. Will man indess alle Gasarten auf die atmosphärische Luft beziehen, so muss man, wenn s das specifische Gewicht des betreffenden Gases auf den Normalzustand der Luft (0^0 und $\cdot 76^{m.}$ Barometerstand) bezogen ist (nach Nr. **287**) $\frac{k}{s}$ statt k und zugleich (Nr. **288**, (i)) $k = k_0(1 + \alpha t)$ setzen, wo dann k_0 den Werth von k für die a t m o s p h ä r i s c h e L u f t bei 0^0, ferner t die Temperatur und α den Ausdehnungscoefficienten des betreffenden Gases bezeichnet.

Werden diese Substitutionen in den beiden letzten Formeln (6) und (7) vorgenommen, so erhält man auch:

$$c = \sqrt{\frac{2k_0}{s}(1+\alpha t)\, logn.\left(1+\frac{mh}{b}\right)} \ldots (8)$$

und näherungsweise:

$$c = \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{mh}{b}\right)\sqrt{\frac{2k_0}{s}(1+\alpha t)\frac{mh}{b}} \ldots (9).$$

321. Mit Zugrundelegung des Wiener Masses und Gewichtes ist (Nr. **286**) $k_0 = 784383$, daher $\sqrt{2k_0} = 1252{\cdot}5$. Setzt man ferner als Mittelwerth für alle Gase den Ausdehnungscoefficienten $\alpha = {\cdot}00366$, so ist annähernd $\sqrt{1+\alpha t} = 1 + {\cdot}0018\, t$. Endlich ist für ein Quecksilbermanometer (bei einerlei Temperatur der Manometer- und Barometersäule) $m = \frac{q}{q_1} = 1$, hingegen für ein Wassermanometer: $m = \frac{1}{13{\cdot}598} = {\cdot}07354$, folglich dafür $\sqrt{2mk_0} = 322{\cdot}5$.

Mit diesen Zahlenwerthen erhält man aus den beiden vorigen Formeln (8) und (9), wenn man auch gleich statt der natürlichen die Tafellogarithmen, nach der Relation $logn.\, x = 2{\cdot}3026\, logv.\, x$ einführt, für jedes der beiden genannten Manometer die analogen, wovon daher die erstere immer die genauere, die letztere die genäherte darstellt, und zwar ist für ein Quecksilber-Manometer:

$$c = \frac{1900{\cdot}6}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\sqrt{logv.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (10)$$

und $$c = \frac{1252{\cdot}5}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{h}{b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}} \ldots (11)$$

und für ein Wasser-Manometer:

$$c = \frac{1900{\cdot}6}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\sqrt{logv.\left(1 + {\cdot}07354\frac{h}{b}\right)} \ldots (12)$$

und $$c = \frac{322{\cdot}5}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\left(1 - {\cdot}01838\frac{h}{b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}} \ldots (13).$$

Anmerkung. Da der in diesen 4 letztern Formeln näherungsweise eingeführte Factor $(1 + {\cdot}0018\, t)$ gegen den wahren Werth $\sqrt{1 + {\cdot}00366\, t}$ etwas zu gross ist, so müssen diese Formeln die Ausflussgeschwindigkeit, namentlich bei hohen Temperaturen, ebenfalls etwas zu gross geben. Will man daher die Ausflussgeschwindigkeit möglichst genau bestimmen, so muss man sich hiezu der Formel (8) bedienen.

Für atmosphärische Luft hat man in diesen Formeln $s = 1$, und da diese im Maximum der Feuchtigkeit nahe um $\frac{1}{100}$ leichter als vollkommen trockene Luft ist, so kann man für die gewöhnlich vorkommende

Luft den Mittelwerth $k_0 = 785370$ und überdies (Nr. **296**) $\alpha = \cdot 004$ setzen. Dadurch ändern sich indess die vorigen, davon abhängigen Zahlenwerthe nur sehr wenig, indem man statt der Zahlen ·0018, 1900, 1252·5 und 322·5 dafür beziehungsweise jene ·002, 1901, 1253 und 322·7 setzen kann.

Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, für das specifische Gewicht des Wasserdampfes den Bruch $\frac{5}{8} = \cdot 625$, so strömt derselbe $\sqrt{\frac{8}{5}} = 1 \cdot 2649$ Mal schneller als die Luft unter gleichem Druck und gleicher Temperatur aus, oder es wird der obige Coefficient $\frac{1900 \cdot 6}{\sqrt{s}} = 2404$. Setzt man dagegen nach Regnault (wie seine Versuche bei 100° ergaben) $s = \cdot 6219$, so erhält man für diesen Coefficienten die Zahl 2410. (Nach Zeuner's Berechnung in dessen Wärmetheorie wäre das specifische Gewicht des Wasserdampfes bei 100° C. $s = \cdot 6075$.)

Setzt man ferner für Leuchtgas (Kohlenwasserstoff), dessen specifisches Gewicht von ·4 bis ·6 variirt, als Mittelwerth $s = \cdot 5$, so verwandelt sich der genannte Coefficient in die Zahl 2687.

Beispiel. Um die hier entwickelten Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, soll die theoretische Ausflussgeschwindigkeit aus der Oeffnung eines grossen Behälters gefunden werden, in welchem sich atmosphärische Luft von 120° C. in einer solchen Spannung befindet, dass das Quecksilber-Manometer bei einem äussern Barometerstand von 28 Zoll, 5 Zoll Höhe zeigt.

Da für dieses Beispiel $b = 28$, $h = 5$ und $t = 120$ ist, so erhält man aus der genannten Formel (8), wenn man $\alpha = \cdot 00366$ setzt:

$$c = 1252 \cdot 5 \sqrt{1 \cdot 4392 \times 2 \cdot 3026 \; logv. \; 1 \cdot 17857} = 609 \cdot 06,$$

die gesuchte theoretische Ausflussgeschwindigkeit beträgt also 609 Fuss per Secunde.

Nach der genäherten Formel (9) erhält man:

$$c = 1252 \cdot 5 \times \cdot 95536 \sqrt{1 \cdot 4392 \times \cdot 17857} = 605 \cdot 81,$$

also ist nach dieser Formel die Geschwindigkeit nahe = 606 Fuss.

Etwas abweichende, und zwar nach der obigen Bemerkung etwas zu grosse Werthe, geben die beiden Formeln (10) und (11); es ist nämlich nach Formel (10):

$$c = 1900 \times 1 \cdot 216 \sqrt{logv. \; 1 \cdot 17857} = 617 \cdot 2$$

und nach jener (11):

$$c = 1252 \cdot 5 \times 1 \cdot 216 \times \cdot 95536 \sqrt{\cdot 17857} = 614 \cdot 9 \text{ F.}$$

322. Um nun auch die theoretische Ausflussmenge oder das per Secunde ausfliessende Gasvolumen zu finden, so wird dieses für gewöhnlich entweder unter dem an der Ausflussöffnung, oder unter dem im Behälter Statt findenden Drucke bestimmt, und zwar lässt man für den erstern immer den äussern Druck selbst gelten. Bezeichnet man das per Secunde ausfliessende Gasvolumen in diesen beiden Fällen beziehungsweise mit V_1 und V_2, so hat man bei Voraussetzung von gleichen Temperaturen:

$$V_1 = ac \text{ und } V_2 = ac\left(\frac{b}{b+h}\right)\ldots(\omega),$$

wobei a, b, h die vorige Bedeutung haben und für die Ausflussgeschwindigkeit c der Werth aus einer der obigen Formeln zu setzen ist.

Soll auch das Gewicht Q der per Secunde ausfliessenden Gasmenge angegeben werden, so muss man im ersten Falle das Volumen V_1 mit dem Gewichte q der Volumeneinheit des betreffenden Gases unter dem bestehenden äussern Drucke b und der Temperatur t multipliciren. Nun ist aber, wenn q_0 das Gewicht der Volumeneinheit des Gases im Normalzustand, d. i. unter dem Drucke von $b_0 = \cdot 76^{m\cdot}$ und der Temperatur 0^0, ferner s_0 und s_1 dessen specifisches Gewicht bei den Temperaturen 0^0 und t^0 bezeichnen, daher $q : q_0 = s : s_0$ ist, zufolge der Relation (ω) in Nr. **288**, sofort $q = \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1 + \alpha t}$, mithin ist:

$$Q = a \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1 + \alpha t} c \ldots (m).$$

Anmerkung 1. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man dasselbe Gewicht Q auch mit Zugrundelegung des unter dem innern Drucke bestimmten Volumens V_2 erhalten muss. Es ist in der That, wenn im Behälter die Temperatur t' und der Druck $b + h$, ausserhalb desselben aber die Temperatur t und der Druck b stattfindet, sofort nach der Relat. (ω) in Nr. **288**:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b+h}{b} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} \ldots (m),$$

und so wie das Gewicht von V_1, d. i. $Q = V_1 \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1 + \alpha t}$ ist, eben so ist auch jenes vom Volumen V_2 oder $Q' = V_2 \frac{b+h}{b_0} \frac{q_0}{1 + \alpha t'}$, daher:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{b+h}{b} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'},$$

oder mit Rücksicht auf die vorige Relation (m):

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1, \text{ d. i. } Q' = Q.$$

Anmerkung 2. Da beim Ausströmen eines comprimirten Gases in die freie Luft die in Nr. **314** erörterten Verhältnisse eintreten, so nimmt das ausströmende Gas in dem Momente, als seine Spannung jener der äusseren Luft gleich geworden ist, die durch die Relation (16) ausgedrückte Temperatur an, und dasselbe verrichtet bis zu diesem Zeitmomente eine Arbeit W, welche in den weiteren Relationen (19), (20), (21) der gedachten Nr. (**314**) angegeben sind. Allein da diese Ausgleichung der Spannung nicht unmittelbar vor der Ausflussöffnung, sondern erst in einer grösseren

Entfernung davon eintritt, so kennt man, streng genommen, das eigentliche Verhalten und die wahre Geschwindigkeit des Gases an der Mündung selbst nicht genau, was auch schon daraus hervorgeht, dass für den Gegendruck an der Mündung von Einigen (wie Navier) der äussere Druck der Atmosphäre, von Andern wieder (wie Holzmann) das Mittel zwischen diesem äussern und dem innern Druck des Gases genommen wird.

323. Um die vorige Formel (m) für den practischen Gebrauch bequem einzurichten, wird man für die Ausflussgeschwindigkeit c den Werth aus der Relation ($6'$) in Nr. **318** setzen, und um den Ausdruck zu vereinfachen, die Constante k durch k_0, b_0, q_0 u. s. w. ausdrücken. Es ist nämlich (Nr. **288**, (i)) $k = k_0(1+\alpha t)$ und wenn s_0, q_0, P_0 beziehungsweise die Dichte, das Gewicht der Volumeneinheit und die Spannung des Gases im Normalzustand bezeichnen, ferner P_0 durch die Höhe b_0 der Barometersäule und dem Gewichte Q_0 der cubischen Einheit Quecksilber ausgedrückt, d. i. $P_0 = Q_0 b_0$ und $q_0 = g s_0$ gesetzt wird, auch $k_0 = \frac{P_0}{s_0} = \frac{g b_0 Q_0}{q}$.

Mit diesen Werthen erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$c = \sqrt{2g\frac{b_0 Q_0}{q_0}(1+\alpha t)\, logn.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (14),$$

$$Q = ab\sqrt{2g\frac{q_0 Q_0}{b_0(1+\alpha t)}\, logn.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (15).$$

324. Ist s das specifische Gewicht des Gases, jenes der atmosphärischen Luft zur Einheit genommen, und γ_0 das Gewicht der cubischen Einheit der Luft bei 0^0 und $\cdot 76^{m\cdot}$ Barometerstand, so ist auch $q_0 = s\gamma_0$, und auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, für die mittlere Breite: $\gamma_0 = \cdot 0729134$, $g = 31\cdot 022$, $b_0 = 2\cdot 404$ und $Q_0 = 766\cdot 8$, folglich, wenn man diese Werthe in den beiden letztern Formeln substituirt und zugleich wieder die natürlichen durch die gemeinen Logarithmen (nach der Relation $logn.\, x = 2\cdot 3026\, logv.\, x$) ersetzt, sofort:

$$c = 1900\cdot 5\sqrt{\frac{1+\alpha t}{s}\, logv.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (16),$$

$$Q = 57\cdot 64\, ab\sqrt{\frac{s}{1+\alpha t}\, logv.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (17).$$

Will man dabei das französische Mass- und Gewichtssystem, d. i. den Meter und das Kilogramm, zum Grunde legen, so muss man statt der vorigen Coefficienten 1900·5 und 57·64 beziehungsweise jene 600·8 und 1021·9 setzen.

Da für atmosphärische Luft blos $s = 1$ zu setzen ist, so bleiben dafür die vorigen Coefficienten ungeändert.

Setzt man wieder wie in Nr. **321** für Wasserdampf und Leuchtgas beziehungsweise $s = \cdot 6219$ und $\cdot 5$, so gehen dafür die obigen Coefficienten 1900·5 und 57·64, wenn man damit gleich $\frac{1}{\sqrt{s}}$ und $\sqrt{s}$ verbindet, beziehungsweise in 2410 und 2687·7 für c, und in 45·46 und 40·76 für Q über.

Für das Metermass reduciren sich diese Coefficienten beziehungsweise auf 761·85 und 849·7 für c, so wie auch 805·94 und 722·60 für Q.

Was die Coefficienten für Wasserdampf betrifft, so sind dieselben in der Voraussetzung abgeleitet und in die genannten Formeln (16) und (17) zu setzen, dass der Dampf auch im gesättigten Zustande dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folge, eine Voraussetzung jedoch, welche sich auch nach der Wärmetheorie als unzulässig herausstellt, und zwar sind die dadurch entstehenden Abweichungen um so grösser, je mehr die Dampfspannung zunimmt.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass wenn zwei verschiedene Gase unter gleichem Drucke ausfliessen, sich die Geschwindigkeiten umgekehrt, die Gasgewichte dagegen gerade wie die Quadratwurzeln aus ihren specifischen Gewichten verhalten. (Siehe die Formeln (16) und (17).)

325. Um endlich aus der theoretischen die wirkliche Ausflussmenge zu erhalten, muss man die vorigen Ausdrücke (15) und (17) wieder mit dem betreffenden Ausfluss- oder Reductionscoefficienten μ multipliciren.

Was jedoch diesen Ausflusscoefficienten betrifft, so ist derselbe noch schwieriger als für den Ausfluss des Wassers zu ermitteln, indem nebst anderen Umständen vorzüglich auch die grössere oder geringere Spannung des ausströmenden Gases darauf Einfluss hat.

So ist, um nur einige Fälle anzuführen, der Ausflusscoefficient für die Luft aus Oeffnungen in dünnen Wänden nach Aubisson $\mu = \cdot 65$, nach Buff von ·50 bis ·60, nach Weisbach aus Koch's Versuchen von ·57 bis ·62.

Bei kurzen cylinderischen Ansatzröhren nach Aubisson $\mu = \cdot 93$, nach Buff ·72 bis ·74, nach Weisbach ·76.

Für kurze conische Ansatzröhren von 5 bis 15° Convergenz nach Aubisson $\mu = \cdot 92$, nach Buff von ·73 bis ·85, nach Weisbach, aus Koch's Versuchen abgeleitet, ·85 bis ·89.

Für Düsenöffnungen bei geringen Manometerständen von 1 Centimeter Quecksilbersäule $\mu = \cdot 910$, für 20 Centimeter $\mu = \cdot 928$.

Saint-Venant und Wautzel fanden für ein kurzes, inwendig abgerundetes Mundstück $\mu = \cdot 98$, dagegen für eine gleiche Mündung in einer dünnen Wand $\mu = \cdot 61$.

Die neueren, von Prof. Weisbach angestellten Versuche über den Ausfluss der Luft unter hohem Druck ergaben für μ folgende Werthe.

Für kreisförmige Mündungen von 1 bis 2·4 Centimeter Durchmesser in einer dünnen Wand und für Quecksilberstände von ·05 bis ·85 Meter variirte der Coefficient von ·555 bis ·787.

Für kurze cylinderische Ansatzröhren bei 1 bis 2·4 Centimeter Weite und dreifacher Länge nahm dieser mit dem Drucke zu von ·730 bis ·833.

Für solche, jedoch Innen abgerundete Röhren, war $\mu = \cdot 927$. Innen abgerundete kurze conische und längere düsenförmige Mundstücke von verschiedenen Weiten gaben $\mu = \cdot 95$ bis ·97.

Für ein abgerundetes conoidisches Mundstück von 1 Centimeter Weite, wobei die Contraction gänzlich beseitigt war und μ sonach nur mehr als der Geschwindigkeitscoefficient anzusehen ist (während er sonst §. 348, Anmerk., als das Product aus dem Contractions- in den Geschwindigkeits-Coefficienten angesehen wird), ergaben sich für μ die Werthe von ·965 bis ·985 u. s. w.

Uebrigens hält es Herr Prof. Weisbach für gerathen, bis nicht ganz verlässliche Versuchsreihen vorliegen, sich lieber auch hier noch der für den Ausfluss des Wassers geltenden Widerstandscoefficienten zu bedienen, und für Mündungen in der dünnen Wand $\mu = \cdot 60$, für kurze cylinderische Ansatzröhren $\mu = \cdot 80$ und für kurze conische, bei 5 bis 10° Seitenconvergenz, $\mu = \cdot 90$, so wie endlich für gut abgerundete conoidische Mundstücke $\mu = \cdot 98$ zu setzen.

Beispiel. In einem grossen Behälter befindet sich erhitzte Luft von 120° C., deren Druck oder Spannung durch ein oben offenes Quecksilber-Manometer angezeigt wird; wenn nun bei einem äussern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ Zoll die Manometersäule $6\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, so ist die Frage, welche Luft- oder Windmenge durch eine 2 Zoll weite, runde Düsenöffnung ausströmt?

Nimmt man an, dass, wenn das Quecksilber im Manometer keine höhere Temperatur als im äussern Barometer hätte, dasselbe nur 6 Zoll hoch stände, setzt daher in der Formel (16) $h = 6$, $b = 27 \cdot 5$, $t = 120$, $a = \frac{3 \cdot 1416}{144}$, und da hier die Luft als vollkommen trocken vorausgesetzt werden kann, $\alpha = \cdot 00366$, so wie endlich $s = 1$; so erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit $c = 667 \cdot 25$ Fuss.

Ferner für die theoretische Ausflussmenge (Nr. **322**) $V_1 = ac = 14 \cdot 557$, so wie für die wirkliche Ausflussmenge, wenn man für den vorliegenden Fall den Reductionscoefficienten $\mu = \cdot 92$ nimmt:

$$\mu V_1 = 13 \cdot 392 \text{ Kubikfuss.}$$

Zur Bestimmung des Gewichtes dieses Luftquantums erhält man nach der Formel (17) für die theoretische Ausflussmenge $Q = {}^{\cdot}7036$, und für die wirkliche $\mu Q = {}^{\cdot}6473$ Pfunde per Secunde.

326. Mit Ausnahme der Relation (1) in Nr. **316** sind alle folgenden für die Ausflussgeschwindigkeit c aufgestellten Formeln in aller Strenge nur genau, wenn $\frac{ap}{AP} = 0$ oder $\frac{AP}{ap} = \infty$, folglich in Relation (2) Nr. **316** $C = 0$ ist, oder die Luft- oder Gasart in dem Behälter keine Bewegung besitzt; eine Voraussetzung, welcher man sich um so mehr nähert, je grösser A gegen a ist, wie dies auch bereits (Nr. **317**) bemerkt worden.

Wird daher der Gasdruck P nicht an einer Stelle gemessen, wo das Gas vollkommen ruhig oder nur sehr wenig bewegt ist, sondern, wie dies öfter bei Gebläsen geschieht, wo man das Manometer auf die Windleitung aufsetzt, an Stellen, wo die Geschwindigkeit c der Luft- oder Gasschichten nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf; so muss man zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit c die ursprüngliche oder genauere Formel (1) in Nr. **316** anwenden, oder man muss, wenn man auch in diesem Falle die einfacheren Formeln, wie jene (3), (4)...(16) benützen will, zuerst den auf der Windleitung beobachteten Manometerstand h auf jenen h' (oder den Druck P auf jenen P') reduciren, wie dieser nämlich im Behälter, wo die Luft nur eine sehr geringe Geschwindigkeit besitzt, Statt finden würde. Ein Beispiel wird diesen Vorgang erläutern.

Beispiel. Das auf eine $3\frac{1}{2}$ Zoll weite cylinderische Windleitung B (Fig. 164) aufgesetzte Quecksilber-Manometer M zeigt bei einem äussern Barometerstande von 28 Zoll eine Höhe $h = ab = 2\frac{1}{2}$ Zoll, während der vor der Manometeröffnung i vorbeistreichende Wind mit einer Temperatur von 10^0 C. durch eine 2 Zoll weite Düsenöffnung C ausströmt. Wie gross ist dabei die theoretische Ausflussgeschwindigkeit?

Da hier der Manometerstand h an einer Stelle gemessen wird, an welcher die Luft schon eine grössere Geschwindigkeit besitzt, so muss man die allgemeine Formel (1) in Nr. **316** anwenden und für den vorliegenden Fall:

$\frac{P}{p} = \frac{30{\cdot}5}{28}$, $t = 10$, $\frac{a}{A} = \frac{16}{49}$ und (Nr. **321**, Anmerk.) $k_0 = 785370$, folglich $k = k_0 (1 + \alpha t) = 785370 \times 1{\cdot}04 = 816784{\cdot}8$ setzen. Dadurch wird $logn. \frac{P}{p} = 2{\cdot}3026\ logv. \frac{30{\cdot}5}{28}$, und wenn man diese Werthe in die genannte Formel (1) einsetzt und die ganz einfache Rechnung ausführt, sofort die theoretische Ausflussgeschwindigkeit $c = 391{\cdot}8$ Fuss.

Um in dem vorliegenden Falle die Manometerhöhe $a'b' = h'$ eines am Behälter A selbst angebrachten Manometers M' zu finden, welche der vorigen Höhe h des Manometers M äquivalent ist, oder was dasselbe, um den Druck P in der Windleitung B auf jenen P' im Behälter A zu reduciren, so folgt mit diesem letztern Drucke für dieselbe Ausflussgeschwindigkeit c aus der Formel (3) in Nr. **317**: $c = \sqrt{2k\, logn. \frac{P'}{p}}$, so dass also, wenn man die allgemeine Formel (1) (Nr. **316**) berücksichtiget, sofort:

$$log. \frac{P'}{p} = log. \frac{P}{p} : \left[1 - \left(\frac{a\,p}{A\,P}\right)^2\right] \text{ oder } log. P' = log. p + N$$

ist, wenn man Kürze halber den zweiten Theil dieser Gleichung durch N bezeichnet, und wobei die Logarithmen aus jedem, also auch dem Briggschen Systeme genommen werden können.

Nun ist für das gegenwärtige Beispiel:

$$log. P' = 1{\cdot}4471580 + \frac{{\cdot}0371418}{{\cdot}91014} = 1{\cdot}4879670,$$

folglich $P' = 30{\cdot}759$ und $h' = a'b' = 30{\cdot}759 - 28 = 2{\cdot}759$ Zoll, so, dass also das Manometer M' am Behälter A um $2{\cdot}759 - 2{\cdot}5 = {\cdot}259$ Zoll höher stehen würde, als jenes M auf der Windleitung B wirklich steht.

Lässt man den in §. 371 für die Bewegung des Wassers angeführten Bernoulli'schen Satz bezüglich des Unterschiedes zwischen dem hydraulischen und hydrostatischen Drucke auch für die Bewegung der Luft gelten, so müsste $h = h' - \frac{C^2}{2g}$ sein, wenn C die Geschwindigkeit der Luft in der Windleitung bezeichnet.

Nun ist im vorliegenden Falle $C = \frac{16}{49} c = \frac{16}{49} \times 391{\cdot}8 = 127{\cdot}9$, folglich die zugehörige Höhe in einer gleichartigen Luftsäule ausgedrückt: $\frac{C^2}{2g} = 263{\cdot}98$ Fuss, oder in einer äquivalenten Quecksilbersäule, welche $10517 \times 1{\cdot}04 = 10937{\cdot}7$ Mal schwerer als die Luft von 10^0 Wärme ist: $\frac{C^2}{2g} = \frac{263{\cdot}98}{10937{\cdot}7}$ Fuss $= {\cdot}289$ Zoll, welche Höhe von der vorhin gefundenen ${\cdot}259$ Zoll nur um ${\cdot}03$ Zoll abweicht. Mit diesem Werthe wäre daher in einer der genäherten, z. B. in der Formel (3) (Nr. **317**) wegen

$$h' = h + {\cdot}289 = 2{\cdot}5 + {\cdot}289 = 2{\cdot}789 \text{ Zoll},$$

sofort $\frac{P}{p} = \frac{30{\cdot}789}{28}$ zu setzen, womit man für die Ausflussgeschwindigkeit den Werth $c = 393{\cdot}8$ erhielte, welcher nur um 2 Fuss grösser als jener ist, welcher nach der genauern Formel (1) gefunden wurde.

Berücksichtigt man übrigens, dass das auf der Windleitung aufgesetzte Manometer durch die in derselben vorhandene Reibung der Luft etwas zu tief stehen wird $\left(\text{nahe um } \frac{1}{40} \frac{l}{d} \frac{C^2}{2g}\right)$, so kann gerade dieser letztere, etwas grössere Werth von c der Wahrheit näher liegen als der erstere.

327. Unter der Voraussetzung, dass die ausfliessende Luft- oder Gasart unvollkommen elastisch sei, also angenommen wird, dass es für eine bestimmte Menge dieser Flüssigkeit einen gewissen endlichen Grad der Ausdehnung gibt, bei welchem die Spannung Null ist (was wahrscheinlich bei allen unsern bekannten Gasen mehr oder weniger der Fall), findet Scheffler für die Ausflussgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$v = \sqrt{\left[2gb\, logn. \left(\frac{P+c}{p+c}\right)\right]} \ldots (\varepsilon),$$

wobei, wenn E den Elasticitätsmodul (d. i. die Kraft, welche fähig ist, das Luft- oder Gasprisma von der im natürlichen Zustande, nämlich bei einer Spannung gleich Null bestehenden Länge L auf die Hälfte oder $\frac{1}{2}L$ zusammen zu drücken) und w das Gewicht der Volumeneinheit des Luftprisma unter dem Drucke Null bezeichnen, sofort:

$$b = (1 + \cdot 00366\, t)\frac{E}{w} \text{ und } c = bw \text{ ist.}$$

In diesem Falle wäre nun für den äussern Druck $p = 0$ keineswegs mehr, wie nach den obigen Formeln, $v = \infty$ und $M' = 0$, sondern es wird dafür:

$$v = \sqrt{\left[2gb\, logn. \left(\frac{P+c}{c}\right)\right]} = \sqrt{\left(2gb\, logn. \frac{P}{c}\right)},$$

wenn man nämlich die sehr kleine Grösse c gegen P auslässt, und unter dem äussern Druck p gemessen:

$$M' = a\sqrt{\left(2gb\, logn. \frac{P}{c}\right)}.$$

Wird das Luftprisma, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Höhe im natürlichen Zustande, d. i. unter dem Drucke Null, gleich L ist, durch die Einwirkung der Schwere und ausserdem noch durch eine gegen das obere Ende wirkende Kraft p bis auf die Höhe h zusammengedrückt (wobei das Prisma am untern Ende durch die der Schwere entgegengesetzt wirkende Kraft P gestützt wird), so findet man:

$$h = b\, logn. \left(\frac{P+c}{p+c}\right), \text{ so, dass also auch } v = \sqrt{2gh},$$

nämlich die Ausflussgeschwindigkeit, gerade so, wie es bei unpressbaren Flüssigkeiten der Fall, die der Höhe h entsprechende Fallgeschwindigkeit ist.

Die Dichtigkeit des unter diesen Umständen ausfliessenden Gases ist jener gleich, welche dem äussern Drucke p

entspricht. Die unter diesem Drucke gemessene Ausflussmenge ist daher:

$$M' = a\sqrt{2gh}.$$

Diese hier vorkommende Höhe h ist also jene, welche ein verticales Prisma des betreffenden Gases, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Gewicht gleich $P - p$ ist, annehmen würde, wenn dasselbe nicht blos von dem Gewichte seiner eigenen Theile, sondern ausserdem noch durch die Kraft p comprimirt würde.

Wäre die mittlere Höhe unserer Atmosphäre genau bekannt, so liesse sich auch die Ausflussgeschwindigkeit der Luft von dem mittlern Druck P in den leeren Raum bestimmen. Diese Höhe wäre nach der vorigen Formel, wenn man $p = 0$ setzt und annimmt, dass die Temperatur durchaus $= 0$ ist, $h = b\ logn. \frac{P+c}{c}$ oder nahe $= b\ logn. \frac{P}{c}$, wobei P den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit an der Erdoberfläche bezeichnen würde. Die mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ in den leeren Raum strömende Luft würde dann jene Dichte annehmen, welche die an der Grenze der Atmosphäre befindliche Luftschichte, nämlich die vom Drucke Null besitzt.

Wäre die mittlere Höhe (wie Biot aus den Erscheinungen der Dämmerung schliessen zu können glaubt) wenigstens 47000 Meter, oder in runder Zahl 149000 W. Fuss hoch, so müsste diese Ausflussgeschwindigkeit v wenigstens $\sqrt{(62 \times 149000)} = 3039$ Fuss betragen. Da bei dieser angenommenen Höhe der Atmosphäre die Dichte der Luft in den obersten Schichten wenigstens 372 Mal geringer als auf der Oberfläche der Erde wäre, so würde sich auch die Atmosphäre, wenn sie nicht durch ihr eigenes Gewicht comprimirt würde oder ihre Dichte durchaus dem Drucke Null entspräche, wenigstens auf das 372fache ihrer jetzigen Höhe erheben. Wäre dagegen ihre Dichte durchaus gleich jener der untersten Schichten vom Drucke P, so würde ihre Höhe nur $\frac{P}{\gamma} = \frac{1844{\cdot}6}{{\cdot}0733} = 25165$ Fuss und bei dieser Höhe die Ausflussgeschwindigkeit in den leeren Raum nur 1249 Fuss betragen. (Vergleiche Comp. §. 480.)

328. Wir wollen schliesslich noch den Ausfluss einer vollkommen elastischen, schweren Flüssigkeit aus einem sich allmälig leerenden Gefässe durch eine kleine Oeffnung in einen Raum untersuchen, in welchem das Medium einen constanten Druck beibehält.

Es sei zu diesem Ende V das unveränderliche Volumen des Behälters oder Gasometers, aus welchem die Luft- oder Gasart ausfliesst, ohne wieder ersetzt zu werden; P der innere Druck im Anfange der Zeit t, p' der Druck am Ende der Zeit t, p der constante äussere Druck und a die sehr kleine, wirkliche Ausflussöffnung, so, dass wenn diese nach Innen nicht gehörig erweitert und abgerundet ist, a den Querschnitt der stärksten Contraction bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, hat man nach Relat. (3), Nr. **317**, für die am Ende der Zeit t Statt findende Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left(2k\, logn. \frac{p'}{p}\right)}$$

und da man diese Geschwindigkeit während der unendlich kleinen Zeit dt als constant ansehen kann, so ist die während diesem Zeitelemente ausfliessende und unter dem innern Drucke p' gemessene Ausflussmenge:

$$\mathrm{d}M = \frac{p}{p'}\, a\, \mathrm{d}t \sqrt{\left(2k\, logn. \frac{p'}{p}\right)},$$

wodurch sich also das Volumen V der Flüssigkeit vom Drucke p' auf jenes $V - \mathrm{d}M$ von demselben Drucke p' reducirt. Indem sich aber dieses letztere Volumen wieder auf das ursprüngliche V ausdehnt, geht der Druck oder die Spannung p' in jene $p' - \mathrm{d}p'$, oder wenn man p' als von der Zeit t abhängig darstellt, in die Spannung $p' - \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$ über, so dass man nach dem Mariotteschen Gesetze hat:

$$\frac{p' - \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t}{p'} = \frac{V - \mathrm{d}M}{V}$$

oder wenn man für dM den Werth setzt und gehörig reducirt:

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t} = p\frac{a}{V}\sqrt{\left(2k\, logn. \frac{p'}{p}\right)}.$$

Aus dieser Relation folgt, wenn man gleich, da p' abnimmt wenn t zunimmt, das Zeichen von dp' ändert:

$$\mathrm{d}t = -\frac{V}{ap} \cdot \frac{\mathrm{d}p'}{\sqrt{\left(2k\, logn. \frac{p'}{p}\right)}}$$

und aus dieser Differentialgleichung, wenn man den ersten Theil von 0 bis t und den zweiten von P bis p', oder bei verändertem Zeichen von p' bis P integrirt:

$$t = \frac{V}{ap\sqrt{2k}} \int_{p'}^{P} \frac{dp'}{\sqrt{\left(logn. \frac{P}{p}\right)}}.$$

Anmerkung. Da sich dieses Integral nur näherungsweise bestimmen lässt und hierzu die bekannte Simpson'sche Formel oder Regel für die Quadratur am einfachsten und genauesten ist, so wollen wir diese Formel hier aufstellen und für den vorliegenden Fall einrichten.

Soll nämlich das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ genommen oder gefunden werden, und man theilt die Differenz $x'' - x'$ in n gleiche Theile, wobei jedoch n eine gerade Zahl sein soll, und bezeichnet die den Abscissen dieser Theilungspuncte $x = x'$, $x = x' + \frac{1}{n}(x'' - x')$, $x = x' + \frac{2}{n}(x'' - x')\ldots$ $x = x' + \frac{n}{n}(x'' - x') = x''$ entsprechenden Werthe von y (bei einer Curve die Ordinaten) der Reihe nach durch $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$; so ist der genäherte Werth dieses Integrales nach der Simpson'schen Regel bekanntlich (man sehe im Anhange):

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x'' - x'}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \; (A),$$

welcher Ausdruck um so genauer ist, je kleiner die Intervalle $\frac{x'' - x'}{n}$ sind.

Wäre z. B. $y = \frac{1}{x}$, so würde $\int_{x'}^{x''} y\,dx = \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x} = logn. \frac{x''}{x'}$ und wenn man in dieser Formel die Differenz $x'' - x'$ nur in zwei gleiche Theile theilt, oder ganz einfach $n = 2$ setzt, wegen

$$y_0 = \frac{1}{x'}, \quad y_1 = \frac{1}{x' + \frac{1}{2}(x'' - x')} = \frac{2}{x' + x''} \quad \text{und} \quad y_2 = y_n = \frac{1}{x''}$$

sofort:

$$logn. \frac{x''}{x'} = \frac{x'' - x'}{6}\left(\frac{1}{x'} + \frac{8}{x' + x''} + \frac{1}{x''}\right).$$

Dieser Ausdruck ist um so genauer, je kleiner die Differenz $x'' - x'$ ist; wäre er nicht genau genug, so müsste man für n eine grössere Zahl wählen.

329. Wendet man zur näherungsweisen Bestimmung des letzten Integralausdruckes die eben aufgestellte Formel (A) an und theilt die Differenz $P - p'$ blos in zwei gleiche Theile, so wird wegen $x = p'$, $x' = p'$, $x'' = P$, $y = \frac{1}{\sqrt{\left(logn. \frac{p'}{p}\right)}}$, $y_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(logn. \frac{p'}{p}\right)}}$,

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(logn. \frac{P+p'}{2p}\right)}}$ und $y_2 = \frac{1}{\sqrt{logn. \frac{P}{p}}}$ sofort:

$$(g) \int_{p'}^{P} \frac{dp'}{\sqrt{logn. \frac{p'}{p}}} = \frac{P-p'}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{logn. \frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{logn. \left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{logn. \frac{P}{p}}} \right)$$

und wenn man diesen Ausdruck der Kürze wegen mit R bezeichnet, auch:

$$t = \frac{VR}{ap\sqrt{2k}} \ldots (18).$$

Theilt man dagegen die Differenz $P - p'$ in vier gleiche Theile, setzt also $n = 4$, so wird:

$$R = \frac{P-p'}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{log. \frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{log. \left(\frac{P+3p'}{4p}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{log. \left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \right.$$

$$\left. \frac{4}{\sqrt{log. \left(\frac{3P+p'}{4p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{log. \frac{P}{p}}} \right] \ldots (h).$$

330. In dieser, durch die Formel (18) ausgedrückten Zeit, in welcher der Druck im Gasometer von P auf p' herabsinkt, ist die ursprüngliche Gasmenge V um eine Quantität vermindert worden, welche unter dem Drucke P gemessen, das Volumen:

$$V' = V - \frac{p'}{P} V = \frac{P-p'}{P} V \ldots (19)$$

beträgt (weil $\frac{V-V'}{V} = \frac{P}{p'}$ sein muss).

Das Gewicht endlich dieser während der Zeit t ausgeflossenen Gasmenge ist, da die Volumeneinheit desselben unter dem Drucke P, $\gamma = g\varrho$ oder (Nr. **286**) $\frac{gP}{k}$ Pfunde oder Gewichtseinheiten wiegt,

$$= \frac{P-p'}{P} V . \frac{gP}{k} = \frac{g(P-p')}{k} V \ldots (20),$$

wobei, wenn s das specifische Gewicht des betreffenden Gases bezeichnet, sofort (Nr. **287** und **288** (i)): $k = \frac{k_0}{s}(1 + \alpha t)$, $k_0 = 784383$ und $\alpha = {\cdot}00366$ ist.

Beispiel. Der 982 Kubikfuss haltende Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen oben offenes Quecksilber-Manometer 10 Zoll und Thermometer 6° C. zeigt. Wenn nun dieser Wind durch eine 1 Zoll weite kreisrunde Oeffnung ohne Contraction in einen grossen oder freien Raum, in welchem der Barometerstand 27 Zoll beträgt, ausströmt, so entsteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerstand bis auf 7 Zoll herabsinkt und welches Luftquantum bis dahin ausfliesst?

Bezeichnet man die in Fussen ausgedrückten Manometer- und Barometersäulen durch h, h', b und das Gewicht von 1 Kubikfuss Quecksilber mit γ'', so ist $P = (h + b)\gamma''$, $p' = (h' + b)\gamma''$ und $p = b\gamma''$ oder für $h = \frac{10}{12}$, $h' = \frac{7}{12}$, $b = \frac{27}{12}$ und $\gamma'' = 766{\cdot}87$ Pf. auch $P = 2364{\cdot}5$, $p' = 2172{\cdot}8$ und $p = 1725{\cdot}4$ Pfund.

Die in der Reihe R in Relation (g) vorkommenden Quotienten werden $\frac{p'}{p} = 1 + \frac{h'}{b} = 1 + \frac{7}{27} = 1{\cdot}25926$, $\frac{P + p'}{2p} = 1 + \frac{h + h'}{2b} = 1{\cdot}31482$ und $\frac{P}{p} = 1 + \frac{h}{b} = 1{\cdot}37037$. Die genannte Reihe ist also:

$$R = 31{\cdot}955\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}64580 + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}805.$$

Nimmt man dagegen die noch mehr genäherte Reihe (h), so wird

$$R = 367{\cdot}7933\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}96280 + 3{\cdot}82290 + 7{\cdot}36948 + \\ + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}9775,$$

wodurch die bereits erreichte hinlängliche Genauigkeit ersichtlich wird.

Setzt man also $R = 367{\cdot}98$, so folgt aus der Relation (16), wegen $a = \frac{1}{4} \cdot \frac{3{\cdot}1416}{144} = \frac{{\cdot}1309}{24}$, $k = 801561$ und $s = 1$, sofort $t = 30{\cdot}397$, ferner aus (19) $V' = 79{\cdot}62$ und aus (20) Gewicht $= 7{\cdot}28$.

Das Manometer wird also in nahe 30·4 Secunden von 10 auf 7 Zoll herabsinken, und während dieser Zeit wird ein Volumen Luft oder Wind ausströmen, welches unter dem anfänglichen innern Druck gemessen 79·62 Kubikfuss (unter dem äussern Druck gemessen 109·11 Kubikfuss) und dem Gewichte nach nahe $7\frac{1}{4}$ Pfund beträgt.

Bewegung der Luft in Röhrenleitungen.

(§. 481.)

331. Bewegt sich die Luft aus dem Behälter A (Fig. 165) durch eine lange Röhre BC vom Durchmesser D und der Länge L mit der mittlern Geschwindigkeit C, so kann man den an der Röhrenwand Statt findenden Reibungswiderstand durch die Höhe z einer Luftsäule messen, wofür (auf ähnliche Weise wie bei Wasserleitungen) $z = \varepsilon \frac{L}{D} \frac{C^2}{2g}$ und der mittlere Reibungs- oder Widerstandscoefficient $\varepsilon = {\cdot}025$ ist. (Will man die Widerstandshöhe z durch eine Quecksilbersäule ausdrücken, so muss man

$$\varepsilon = \frac{{\cdot}025}{10517} = {\cdot}00000238$$