Vierter Abschnitt.

Aërodynamik.

Von dem Ausflusse der Luft aus Behältern.

(§. 474.)

315. Bei Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit der Luft oder irgend eines Gases wollen wir von der Voraussetzung ausgehen, dass sowohl der Druck als auch die Geschwindigkeiten in den sämmtlichen Luftschichten im Gefässe bereits constant geworden, was jedenfalls sehr bald eintritt, wenn man annimmt, dass das Gefäss mit einem Behälter in Verbindung steht, welcher das ausfliessende Gas beständig ersetzt, und am obern Theil des Gefässes einen constanten Druck bewirkt. Uebrigens soll auch hier die Hypothese des Parallelismus der Schichten angenommen, von der Schwere jedoch, welche auf den Druck des Gases keinen merkbaren Einfluss hat, gänzlich abstrahirt werden.

316. Es sei nun A der obere Querschnitt des Gefässes, P der an dieser Stelle Statt findende Druck des Gases auf die Flächeneinheit, und C die in dieser Schichte vorhandene Geschwindigkeit, sobald nämlich der erwähnte Beharrungsstand eingetreten; ferner sei a der Querschnitt der Ausflussöffnung, p der Druck oder die Spannung des Gases an dieser Stelle, so wie c die Ausflussgeschwindigkeit; endlich seien ϱ und ϱ' die den Spannungen P und p entsprechenden Dichtigkeiten des Gases oder der Luft, so wie v das Volumen der Gewichtseinheit der Luft oder des Gases bei der Dichte ϱ genommen.

Dies vorausgesetzt, entwickelt das Luftvolumen v bei dessen Ausdehnung, während die Luft von der Spannung P auf jene p herabgeht, nach Gleichung (9') in Nr. **312** die Arbeitsgrösse: $Pv\,logn.\frac{P}{p}$, und da diese blos dazu verwendet wird, die Luftmasse $v\varrho$ von der kleineren Geschwindigkeit C auf die grössere c zu bringen, so hat man (§. 227):

$$Pv\,logn.\frac{P}{p} = \tfrac{1}{2}v\varrho(c^2 - C^2).$$

Nun ist aber hier die Gleichung der Continuität: $AC\varrho = ac\varrho'$, woraus $C = \frac{a}{A}\frac{\varrho'}{\varrho}c$, oder wenn man (Nr. **286**, m) $P = k\varrho$ setzt und annimmt, dass sich die Temperatur des Gases während des Ausflusses nicht ändert, wodurch k constant bleibt, und daher auch $p = k\varrho'$, also $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{p}{P}$ wird, sofort $C = \frac{a}{A}\frac{p}{P}c$ folgt.

Setzt man diesen Werth für C in die vorige Gleichung und zugleich auch $\varrho = \frac{P}{k}$ (vorige Relation), so erhält man:

$$Pv\,logn.\frac{P}{p} = \frac{Pv}{2k}c^2\left(1 - \frac{a^2p^2}{A^2P^2}\right)\ldots(f)$$

und aus dieser Gleichung die theoretische Ausflussgeschwindigkeit, wenn die Dichte des Gases dabei constant bleibt:

$$c = \sqrt{\frac{2k\,logn.\frac{P}{p}}{1-\left(\frac{ap}{AP}\right)^2}}\ldots(1).$$

Um auch die Geschwindigkeit C des Gases am obern Theil des Gefässes zu finden, darf man nur C aus der Bedingungsgleichung $APC = apc$ ausdrücken. Man erhält, wenn man zugleich für c den vorigen Werth aus (1) substituirt und reducirt:

$$C = \sqrt{\frac{2k\,logn.\frac{P}{p}}{\left(\frac{AP}{ap}\right)^2 - 1}}\ldots(2).$$

Soll der Ausfluss möglich sein, so muss $a < A$ und $p < P$, also auch $ap < AP$ sein, woraus sofort folgt, dass bei diesen Bedingungen die beiden vorigen Ausdrücke in reeller Form erscheinen, während sie im Gegentheile imaginär würden.

Anmerkung. Anstatt diese Formeln aus der Theorie der mechanischen Wärmelehre zu entwickeln, kann man auch ganz einfach und consequent von den allgemeinen Bewegungsgleichungen des zweiten Abschnittes ausgehen, und dabei genau so verfahren, wie dies bei der Ableitung der

Gleichungen in Nr. **189** u. f. für den Ausfluss tropfbar-flüssiger Körper geschehen ist.

Ist nämlich, wie dort, in dem Gefässe in Fig. 93, $CD = z$ die verticale Ordinate einer beliebigen horizontalen Gasschicht Mn, w ihre verticale Geschwindigkeit nach abwärts, p der in derselben auf die Flächeneinheit herrschende Druck und ϱ ihre Dichte, P der constante auf die Oberfläche A des Gases in AB ausgeübte Druck, so wie p' der an der Ausflussöffnung $ab = a$ Statt findende Druck (beide wieder auf die Flächeneinheit bezogen), wobei P immer grösser als p' sein soll; so hat man hier nur insbesondere zu bemerken, dass 1. die Dichte ϱ nicht constant ist, sondern von Schichte zu Schichte im Verhältniss des Druckes p variirt, so dass (Nr. **286**) $p = k\varrho$ gesetzt werden kann, und dass man 2. dabei von der Schwere abstrahiren, also das in den Gleichungen vorkommende Glied $\varrho g z$ (wegen des sehr geringen Werthes von ϱ) auslassen kann.

Dies vorausgesetzt, reduciren sich auch hier die allgemeinen Gleichungen (1) in Nr. **186** wieder auf die letzte, und zwar auf jene:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = g - w\frac{dw}{dz},$$

oder wegen $\varrho = \frac{p}{k}$ auf die Gleichung:

$$k\frac{dp}{p} = g\,dz - w\,dw.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt:

$$k\;logn.\,p = gz - \tfrac{1}{2}w^2 + C \ldots (m).$$

Zur Bestimmung der Constante C berücksichtige man, dass an der Oberfläche AB, d. i. für $z = 0$, erstlich $p = P$ und $w = w'$ wird, wo w' aus der Gleichung der Continuität: $w'PA = wp\alpha$ den Werth $w' = \frac{p\alpha}{PA}w$ erhält; es folgt nämlich aus der vorigen Gleichung (m), wenn man diese Werthe substituirt, die Constante:

$$C = k\;logn.\,P + \tfrac{1}{2}\frac{p^2\alpha^2}{P^2A^2}w^2$$

und wenn man diesen Werth für C in (m) setzt und zugleich das Glied gz als unbedeutend klein gegen $k\;logn.\frac{P}{p}$ auslässt (indem k, Nr. **286**, eine sehr grosse Zahl gegen g ist) auch:

$$k\;logn.\frac{P}{p} = \tfrac{1}{2}w^2\left(1 - \frac{\alpha^2p^2}{A^2P^2}\right) \ldots (n).$$

Geht man nun auf die Ausflussöffnung selbst über, wofür in dieser Relat. (n) $p = p'$, $\alpha = a$ und $w = c$ zu setzen ist, so erhält man daraus die Ausflussgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{2k\;logn.\frac{P}{p'}}{1 - \frac{a^2p'^2}{A^2P^2}}} \ldots (\alpha),$$

so wie für die Geschwindigkeit in einem beliebigen Querschnitt von der Grösse α (vermöge der Continuitätsgleichung $wp\alpha = cp'a$):

$$w = \frac{ap'}{\alpha p}\sqrt{\frac{2k\,logn.\frac{P}{p'}}{1-\frac{a^2p'^2}{A^2P^2}}}\dots(\beta).$$

Ist die Oeffnung a bedeutend kleiner als der Querschnitt A, so kann man den Bruch $\frac{a^2p'^2}{A^2P^2}$ auslassen, und diese beiden Gleichungen erhalten die einfachere Form:

$$c = \sqrt{2k\,logn.\frac{P}{p'}}\dots(\alpha'),\quad w = \frac{ap'}{\alpha p}\sqrt{2k\,logn.\frac{P}{p'}}\dots(\beta')$$

und wenn man diesen Werth für w in der obigen Gleichung (n) substituirt, so erhält man zur Bestimmung des Druckes p:

$$\frac{logn.\frac{P}{p}}{logn.\frac{P}{p'}} = a^2p'^2\left(\frac{1}{\alpha^2p^2} - \frac{1}{A^2P^2}\right)\dots(\gamma).$$

317. Ist, wie gewöhnlich, die Ausflussöffnung a gegen den Querschnitt A des Gefässes so klein, dass man die 2. Potenz des Bruches $\frac{ap}{AP}$ gegen die Einheit auslassen kann, so wird, während die Geschwindigkeit C nur sehr gering ausfällt, die Ausflussgeschwindigkeit c viel einfacher und für gewöhnlich genau genug durch die Formel:

$$c = \sqrt{2k\,logn.\frac{P}{p}}\dots(3)$$

ausgedrückt.

Setzt man die Differenz $P - p = \mathrm{d}$, also $p = P - \mathrm{d}$, so wird (Comp. §. 290):

$$logn.\frac{P}{p} = logn.\frac{P}{P-\mathrm{d}} = -\,logn.\frac{P-\mathrm{d}}{P} = -\,logn.\left(1-\frac{\mathrm{d}}{P}\right) = -$$
$$= -\left[-\frac{\mathrm{d}}{P} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{P}\right)^2 - \dots\right]$$

oder für Werthe von d, welche kleiner als $\frac{1}{10}P$ sind, für welche man ohne merklichen Fehler die höheren Potenzen des Bruches $\frac{\mathrm{d}}{P}$ auslassen kann, auch: $logn.\frac{P}{p} = \frac{\mathrm{d}}{P} = \frac{P-p}{P}$; folglich ist, wenn man diesen Werth in der vorigen Formel (3) substituirt, annähernd:

$$c = \sqrt{2k\left(\frac{P-p}{P}\right)}\dots(4).$$

Ist h die Höhe einer Luft- oder Gassäule von derselben Dichte ϱ der Luft oder des Gases im Gefässe, welche durch ihr Gewicht dem Drucke $P-p$ das Gleichgewicht hält, so, dass also $g\varrho h = P-p$ ist, so folgt, wegen (**316**) $P = k\varrho$, sofort $\frac{P-p}{P} = \frac{g\varrho h}{k\varrho} = \frac{gh}{k}$, und mit diesem Werthe aus der vorigen Gleichung (4) wieder annähernd:

$$c = \sqrt{2gh} \ldots (5),$$

welcher Ausdruck sofort mit jenem übereinstimmt, welcher (Nr. **189**) für den Ausfluss von tropfbaren oder incompressibeln Flüssigkeiten unter gleichen Bedingungen gefunden wurde.

Ist endlich γ das Gewicht der cubischen Einheit des Gases von der Dichte ϱ, also $\gamma = g\varrho$, so ist, wegen $h = \frac{P-p}{g\varrho} = \frac{P-p}{\gamma}$, auch:

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P-p)} \ldots (6).$$

318. Die für die Ausflussgeschwindigkeit c entwickelten Formeln gelten sowohl für den Ausfluss einer Luft- oder Gasart unter dem constanten Druck P, wenn an der Ausflussöffnung der Gegendruck p auf die Flächeneinheit besteht, als auch, wenn die Luft aus einem Gefässe mittelst eines Kolbens vom Querschnitt A mit dem auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke P aus einer Oeffnung vom Querschnitt a hinausgepresst wird, und dabei ein äusserer Gegendruck Statt findet, welcher ebenfalls auf die Flächeneinheit bezogen $= p$ ist.

Findet der Ausfluss, wie gewöhnlich, in die freie Luft Statt, so lässt man nach Navier für p den Druck der Atmosphäre gelten (obschon, vielleicht wie auch Holzmann bemerkt, dafür angemessener der Mittelwerth $\frac{1}{2}(P+p)$ genommen werden sollte) und man pflegt dann nicht den innern Druck P, sondern mittelst eines oben offenen Quecksilber- oder Wasser-Manometers (§. 467) sogleich die Differenz der Spannungen $P-p$ zu messen.

Ist dabei die sogenannte manometrische oder Sperr-Flüssigkeit Quecksilber, so ist der Druck $P-p$ gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Flächeneinheit und Höhe, die Manometerhöhe ist.

Ist daher h die Höhe der Manometersäule und q das Gewicht der cubischen Einheit (Volumeneinheit) der manometrischen Flüssigkeit, so ist also $P-p = qh$.

Ist ferner b der äussere Barometerstand und q' das Gewicht der Volumeneinheit Quecksilber, so ist eben so $p = q'b$, folglich

$$\frac{P}{p} = 1 + \frac{P-b}{p} = 1 + \frac{q}{q'}\frac{h}{b} = 1 + m\frac{h}{b},$$

wenn man nämlich Kürze halber den Quotienten oder das Verhältniss $\frac{q}{q'} = m$ setzt.

Dieser Werth für $\frac{P}{p}$ in der obigen Formel (3) gesetzt, gibt die Ausflussgeschwindigkeit unter der Form:

$$c = \sqrt{2k\, logn. \left(1 + \frac{mh}{b}\right)} \ldots (6').$$

319. Da bei Gebläsen, Gasometern u. dgl. der Bruch $\frac{mh}{b}$ selten den Werth von $\frac{1}{5}$ übersteigt, so kann man den Gebrauch der vorigen Formel (6) dadurch vereinfachen, dass man den Logarithmus des Binoms in die bekannte Reihe $\frac{mh}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{mh}{b}\right)^2 + \ldots$ auflöst und davon nur noch das 2. Glied beibehält, endlich auch die Wurzel aus diesen beiden ersten Gliedern nur bis zur 1. Potenz des Bruches $\frac{mh}{b}$ entwickelt; man erhält dadurch den genäherten Ausdruck:

$$c = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{mh}{b}\right)\sqrt{2k\frac{mh}{b}} \ldots (7).$$

320. Was die in allen diesen Formeln vorkommende Constante k betrifft, so muss man (Nr. **286**) dafür jedesmal den der betreffenden Gasart entsprechenden Werth setzen. Will man indess alle Gasarten auf die atmosphärische Luft beziehen, so muss man, wenn s das specifische Gewicht des betreffenden Gases auf den Normalzustand der Luft (0^{0} und $\cdot 76^{m.}$ Barometerstand) bezogen ist (nach Nr. **287**) $\frac{k}{s}$ statt k und zugleich (Nr. **288**, (i)) $k = k_0(1 + \alpha t)$ setzen, wo dann k_0 den Werth von k für die atmosphärische Luft bei 0^{0}, ferner t die Temperatur und α den Ausdehnungscoefficienten des betreffenden Gases bezeichnet.

Werden diese Substitutionen in den beiden letzten Formeln (6) und (7) vorgenommen, so erhält man auch:

$$c = \sqrt{\frac{2k_0}{s}(1+\alpha t)\, logn. \left(1+\frac{mh}{b}\right)} \ldots (8)$$

und näherungsweise:

$$c = \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{mh}{b}\right)\sqrt{\frac{2k_0}{s}(1+\alpha t)\frac{mh}{b}} \ldots (9).$$

321. Mit Zugrundelegung des Wiener Masses und Gewichtes ist (Nr. **286**) $k_0 = 784383$, daher $\sqrt{2k_0} = 1252{\cdot}5$. Setzt man ferner als Mittelwerth für alle Gase den Ausdehnungscoefficienten $\alpha = {\cdot}00366$, so ist annähernd $\sqrt{1+\alpha t} = 1 + {\cdot}0018\, t$. Endlich ist für ein Quecksilbermanometer (bei einerlei Temperatur der Manometer- und Barometersäule) $m = \frac{q}{q_1} = 1$, hingegen für ein Wassermanometer: $m = \frac{1}{13{\cdot}598} = {\cdot}07354$, folglich dafür $\sqrt{2mk_0} = 322{\cdot}5$.

Mit diesen Zahlenwerthen erhält man aus den beiden vorigen Formeln (8) und (9), wenn man auch gleich statt der natürlichen die Tafellogarithmen, nach der Relation $logn.\, x = 2{\cdot}3026\, logv.\, x$ einführt, für jedes der beiden genannten Manometer die analogen, wovon daher die erstere immer die genauere, die letztere die genäherte darstellt, und zwar ist für ein Quecksilber-Manometer:

$$c = \frac{1900{\cdot}6}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\sqrt{logv. \left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (10)$$

und $$c = \frac{1252{\cdot}5}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{h}{b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}} \ldots (11)$$

und für ein Wasser-Manometer:

$$c = \frac{1900{\cdot}6}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\sqrt{logv. \left(1 + {\cdot}07354\frac{h}{b}\right)} \ldots (12)$$

und $$c = \frac{322{\cdot}5}{\sqrt{s}}(1 + {\cdot}0018\, t)\left(1 - {\cdot}01838\frac{h}{b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}} \ldots (13).$$

Anmerkung. Da der in diesen 4 letztern Formeln näherungsweise eingeführte Factor $(1 + {\cdot}0018\, t)$ gegen den wahren Werth $\sqrt{1 + {\cdot}00366\, t}$ etwas zu gross ist, so müssen diese Formeln die Ausflussgeschwindigkeit, namentlich bei hohen Temperaturen, ebenfalls etwas zu gross geben. Will man daher die Ausflussgeschwindigkeit möglichst genau bestimmen, so muss man sich hiezu der Formel (8) bedienen.

Für atmosphärische Luft hat man in diesen Formeln $s = 1$, und da diese im Maximum der Feuchtigkeit nahe um $\frac{1}{400}$ leichter als vollkommen trockene Luft ist, so kann man für die gewöhnlich vorkommende

Luft den Mittelwerth $k_0 = 785370$ und überdies (Nr. **296**) $\alpha = \cdot 004$ setzen. Dadurch ändern sich indess die vorigen, davon abhängigen Zahlenwerthe nur sehr wenig, indem man statt der Zahlen ·0018, 1900, 1252·5 und 322·5 dafür beziehungsweise jene ·002, 1901, 1253 und 322·7 setzen kann.

Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, für das specifische Gewicht des Wasserdampfes den Bruch $\frac{5}{8} = \cdot 625$, so strömt derselbe $\sqrt{\frac{8}{5}} = 1\cdot 2649$ Mal schneller als die Luft unter gleichem Druck und gleicher Temperatur aus, oder es wird der obige Coefficient $\frac{1900\cdot 6}{\sqrt{s}} = 2404$. Setzt man dagegen nach Regnault (wie seine Versuche bei 100° ergaben) $s = \cdot 6219$, so erhält man für diesen Coefficienten die Zahl 2410. (Nach Zeuner's Berechnung in dessen Wärmetheorie wäre das specifische Gewicht des Wasserdampfes bei 100° C. $s = \cdot 6075$.)

Setzt man ferner für Leuchtgas (Kohlenwasserstoff), dessen specifisches Gewicht von ·4 bis ·6 variirt, als Mittelwerth $s = \cdot 5$, so verwandelt sich der genannte Coefficient in die Zahl 2687.

Beispiel. Um die hier entwickelten Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, soll die theoretische Ausflussgeschwindigkeit aus der Oeffnung eines grossen Behälters gefunden werden, in welchem sich atmosphärische Luft von 120° C. in einer solchen Spannung befindet, dass das Quecksilber-Manometer bei einem äussern Barometerstand von 28 Zoll, 5 Zoll Höhe zeigt.

Da für dieses Beispiel $b = 28$, $h = 5$ und $t = 120$ ist, so erhält man aus der genannten Formel (8), wenn man $\alpha = \cdot 00366$ setzt:

$$c = 1252\cdot 5 \sqrt{1\cdot 4392 \times 2\cdot 3026 \, logv. \, 1\cdot 17857} = 609\cdot 06,$$

die gesuchte theoretische Ausflussgeschwindigkeit beträgt also 609 Fuss per Secunde.

Nach der genäherten Formel (9) erhält man:

$$c = 1252\cdot 5 \times \cdot 95536 \sqrt{1\cdot 4392 \times \cdot 17857} = 605\cdot 81,$$

also ist nach dieser Formel die Geschwindigkeit nahe = 606 Fuss.

Etwas abweichende, und zwar nach der obigen Bemerkung etwas zu grosse Werthe, geben die beiden Formeln (10) und (11); es ist nämlich nach Formel (10):

$$c = 1900 \times 1\cdot 216 \sqrt{logv. \, 1\cdot 17857} = 617\cdot 2$$

und nach jener (11):

$$c = 1252\cdot 5 \times 1\cdot 216 \times \cdot 95536 \sqrt{\cdot 17857} = 614\cdot 9 \text{ F.}$$

322. Um nun auch die theoretische Ausflussmenge oder das per Secunde ausfliessende Gasvolumen zu finden, so wird dieses für gewöhnlich entweder unter dem an der Ausflussöffnung, oder unter dem im Behälter Statt findenden Drucke bestimmt, und zwar lässt man für den erstern immer den äussern Druck selbst gelten. Bezeichnet man das per Secunde ausfliessende Gasvolumen in diesen beiden Fällen beziehungsweise mit V_1 und V_2, so hat man bei Voraussetzung von gleichen Temperaturen:

$$V_1 = ac \text{ und } V_2 = ac\left(\frac{b}{b+h}\right) \ldots (\omega),$$

wobei a, b, h die vorige Bedeutung haben und für die Ausflussgeschwindigkeit c der Werth aus einer der obigen Formeln zu setzen ist.

Soll auch das Gewicht Q der per Secunde ausfliessenden Gasmenge angegeben werden, so muss man im ersten Falle das Volumen V_1 mit dem Gewichte q der Volumeneinheit des betreffenden Gases unter dem bestehenden äussern Drucke b und der Temperatur t multipliciren. Nun ist aber, wenn q_0 das Gewicht der Volumeneinheit des Gases im Normalzustand, d. i. unter dem Drucke von $b_0 = {\cdot}76^{m\cdot}$ und der Temperatur 0^0, ferner s_0 und s_1 dessen specifisches Gewicht bei den Temperaturen 0^0 und t^0 bezeichnen, daher $q : q_0 = s : s_0$ ist, zufolge der Relation (ω) in Nr. **288**, sofort $q = \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1+\alpha t}$, mithin ist:

$$Q = a \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1+\alpha t} c \ldots (m).$$

Anmerkung 1. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man dasselbe Gewicht Q auch mit Zugrundelegung des unter dem innern Drucke bestimmten Volumens V_2 erhalten muss. Es ist in der That, wenn im Behälter die Temperatur t' und der Druck $b+h$, ausserhalb desselben aber die Temperatur t und der Druck b stattfindet, sofort nach der Relat. (ω) in Nr. **288**:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b+h}{b} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} \ldots (m),$$

und so wie das Gewicht von V_1, d. i. $Q = V_1 \frac{b}{b_0} \frac{q_0}{1+\alpha t}$ ist, eben so ist auch jenes vom Volumen V_2 oder $Q' = V_2 \frac{b+h}{b_0} \frac{q_0}{1+\alpha t'}$, daher:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{b+h}{b} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'},$$

oder mit Rücksicht auf die vorige Relation (m):

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1, \text{ d. i. } Q' = Q.$$

Anmerkung 2. Da beim Ausströmen eines comprimirten Gases in die freie Luft die in Nr. **314** erörterten Verhältnisse eintreten, so nimmt das ausströmende Gas in dem Momente, als seine Spannung jener der äusseren Luft gleich geworden ist, die durch die Relation (16) ausgedrückte Temperatur an, und dasselbe verrichtet bis zu diesem Zeitmomente eine Arbeit W, welche in den weiteren Relationen (19), (20), (21) der gedachten Nr. (**314**) angegeben sind. Allein da diese Ausgleichung der Spannung nicht unmittelbar vor der Ausflussöffnung, sondern erst in einer grösseren

Entfernung davon eintritt, so kennt man, streng genommen, das eigentliche Verhalten und die wahre Geschwindigkeit des Gases an der Mündung selbst nicht genau, was auch schon daraus hervorgeht, dass für den Gegendruck an der Mündung von Einigen (wie Navier) der äussere Druck der Atmosphäre, von Andern wieder (wie Holzmann) das Mittel zwischen diesem äussern und dem innern Druck des Gases genommen wird.

323. Um die vorige Formel (m) für den practischen Gebrauch bequem einzurichten, wird man für die Ausflussgeschwindigkeit c den Werth aus der Relation ($6'$) in Nr. **318** setzen, und um den Ausdruck zu vereinfachen, die Constante k durch k_0, b_0, q_0 u. s. w. ausdrücken. Es ist nämlich (Nr. **288**, (i)) $k = k_0(1+\alpha t)$ und wenn s_0, q_0, P_0 beziehungsweise die Dichte, das Gewicht der Volumeneinheit und die Spannung des Gases im Normalzustand bezeichnen, ferner P_0 durch die Höhe b_0 der Barometersäule und dem Gewichte Q_0 der cubischen Einheit Quecksilber ausgedrückt, d. i. $P_0 = Q_0 b_0$ und $q_0 = g s_0$ gesetzt wird, auch $k_0 = \frac{P_0}{s_0} = \frac{g b_0 Q_0}{q}$.

Mit diesen Werthen erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$c = \sqrt{2g \frac{b_0 Q_0}{q_0}(1+\alpha t)\, logn.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (14),$$

$$Q = ab\sqrt{2g \frac{q_0 Q_0}{b_0(1+\alpha t)}\, logn.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (15).$$

324. Ist s das specifische Gewicht des Gases, jenes der atmosphärischen Luft zur Einheit genommen, und γ_0 das Gewicht der cubischen Einheit der Luft bei 0^0 und $\cdot 76^{m\cdot}$ Barometerstand, so ist auch $q_0 = s\gamma_0$, und auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, für die mittlere Breite: $\gamma_0 = \cdot 0729134$, $g = 31\cdot 022$, $b_0 = 2\cdot 404$ und $Q_0 = 766\cdot 8$, folglich, wenn man diese Werthe in den beiden letztern Formeln substituirt und zugleich wieder die natürlichen durch die gemeinen Logarithmen (nach der Relation $logn.\, x = 2\cdot 3026\, logv.\, x$) ersetzt, sofort:

$$c = 1900\cdot 5\sqrt{\frac{1+\alpha t}{s}\, logv.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (16),$$

$$Q = 57\cdot 64\, ab\sqrt{\frac{s}{1+\alpha t}\, logv.\left(1+\frac{h}{b}\right)} \ldots (17).$$

Will man dabei das französische Mass- und Gewichtssystem, d. i. den Meter und das Kilogramm, zum Grunde legen, so muss man statt der vorigen Coefficienten 1900·5 und 57·64 beziehungsweise jene 600·8 und 1021·9 setzen.

Da für atmosphärische Luft blos $s = 1$ zu setzen ist, so bleiben dafür die vorigen Coefficienten ungeändert.

Setzt man wieder wie in Nr. **321** für Wasserdampf und Leuchtgas beziehungsweise $s = \cdot 6219$ und $\cdot 5$, so gehen dafür die obigen Coefficienten 1900·5 und 57·64, wenn man damit gleich $\frac{1}{\sqrt{s}}$ und $\sqrt{s}$ verbindet, beziehungsweise in 2410 und 2687·7 für c, und in 45·46 und 40·76 für Q über.

Für das Metermass reduciren sich diese Coefficienten beziehungsweise auf 761·85 und 849·7 für c, so wie auch 805·94 und 722·60 für Q.

Was die Coefficienten für Wasserdampf betrifft, so sind dieselben in der Voraussetzung abgeleitet und in die genannten Formeln (16) und (17) zu setzen, dass der Dampf auch im gesättigten Zustande dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folge, eine Voraussetzung jedoch, welche sich auch nach der Wärmetheorie als unzulässig herausstellt, und zwar sind die dadurch entstehenden Abweichungen um so grösser, je mehr die Dampfspannung zunimmt.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass wenn zwei verschiedene Gase unter gleichem Drucke ausfliessen, sich die Geschwindigkeiten umgekehrt, die Gasgewichte dagegen gerade wie die Quadratwurzeln aus ihren specifischen Gewichten verhalten. (Siehe die Formeln (16) und (17).)

325. Um endlich aus der theoretischen die wirkliche Ausflussmenge zu erhalten, muss man die vorigen Ausdrücke (15) und (17) wieder mit dem betreffenden Ausfluss- oder Reductionscoefficienten μ multipliciren.

Was jedoch diesen Ausflusscoefficienten betrifft, so ist derselbe noch schwieriger als für den Ausfluss des Wassers zu ermitteln, indem nebst anderen Umständen vorzüglich auch die grössere oder geringere Spannung des ausströmenden Gases darauf Einfluss hat.

So ist, um nur einige Fälle anzuführen, der Ausflusscoefficient für die Luft aus Oeffnungen in dünnen Wänden nach Aubisson $\mu = \cdot 65$, nach Buff von ·50 bis ·60, nach Weisbach aus Koch's Versuchen von ·57 bis ·62.

Bei kurzen cylinderischen Ansatzröhren nach Aubisson $\mu = \cdot 93$, nach Buff ·72 bis ·74, nach Weisbach ·76.

Für kurze conische Ansatzröhren von 5 bis 15° Convergenz nach Aubisson $\mu = \cdot 92$, nach Buff von ·73 bis ·85, nach Weisbach, aus Koch's Versuchen abgeleitet, ·85 bis ·89.

Für Düsenöffnungen bei geringen Manometerständen von 1 Centimeter Quecksilbersäule $\mu = \cdot 910$, für 20 Centimeter $\mu = \cdot 928$.

Saint-Venant und Wautzel fanden für ein kurzes, inwendig abgerundetes Mundstück $\mu = \cdot 98$, dagegen für eine gleiche Mündung in einer dünnen Wand $\mu = \cdot 61$.

Die neueren, von Prof. Weisbach angestellten Versuche über den Ausfluss der Luft unter hohem Druck ergaben für μ folgende Werthe.

Für kreisförmige Mündungen von 1 bis 2·4 Centimeter Durchmesser in einer dünnen Wand und für Quecksilberstände von ·05 bis ·85 Meter varîrte der Coefficient von ·555 bis ·787.

Für kurze cylinderische Ansatzröhren bei 1 bis 2·4 Centimeter Weite und dreifacher Länge nahm dieser mit dem Drucke zu von ·730 bis ·833.

Für solche, jedoch Innen abgerundete Röhren, war $\mu = \cdot 927$. Innen abgerundete kurze conische und längere düsenförmige Mundstücke von verschiedenen Weiten gaben $\mu = \cdot 95$ bis ·97.

Für ein abgerundetes conoidisches Mundstück von 1 Centimeter Weite, wobei die Contraction gänzlich beseitigt war und μ sonach nur mehr als der Geschwindigkeitscoefficient anzusehen ist (während er sonst, §. 348, Anmerk., als das Product aus dem Contractions- in den Geschwindigkeits-Coefficienten angesehen wird), ergaben sich für μ die Werthe von ·965 bis ·985 u. s. w.

Uebrigens hält es Herr Prof. Weisbach für gerathen, bis nicht ganz verlässliche Versuchsreihen vorliegen, sich lieber auch hier noch der für den Ausfluss des Wassers geltenden Widerstandscoefficienten zu bedienen, und für Mündungen in der dünnen Wand $\mu = \cdot 60$, für kurze cylinderische Ansatzröhren $\mu = \cdot 80$ und für kurze conische, bei 5 bis 10° Seitenconvergenz, $\mu = \cdot 90$, so wie endlich für gut abgerundete conoidische Mundstücke $\mu = \cdot 98$ zu setzen.

Beispiel. In einem grossen Behälter befindet sich erhitzte Luft von 120° C., deren Druck oder Spannung durch ein oben offenes Quecksilber-Manometer angezeigt wird; wenn nun bei einem äussern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ Zoll die Manometersäule $6\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, so ist die Frage, welche Luft- oder Windmenge durch eine 2 Zoll weite, runde Düsenöffnung ausströmt?

Nimmt man an, dass, wenn das Quecksilber im Manometer keine höhere Temperatur als im äussern Barometer hätte, dasselbe nur 6 Zoll hoch stände, setzt daher in der Formel (16) $h = 6$, $b = 27\cdot 5$, $t = 120$, $a = \frac{3\cdot 1416}{144}$, und da hier die Luft als vollkommen trocken vorausgesetzt werden kann, $\alpha = \cdot 00366$, so wie endlich $s = 1$; so erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit $c = 667\cdot 25$ Fuss.

Ferner für die theoretische Ausflussmenge (Nr. **322**) $V_1 = ac = 14\cdot 557$, so wie für die wirkliche Ausflussmenge, wenn man für den vorliegenden Fall den Reductionscoefficienten $\mu = \cdot 92$ nimmt:

$$\mu V_1 = 13\cdot 392 \text{ Kubikfuss.}$$

Zur Bestimmung des Gewichtes dieses Luftquantums erhält man nach der Formel (17) für die theoretische Ausflussmenge $Q = \cdot 7036$, und für die wirkliche $\mu Q = \cdot 6473$ Pfunde per Secunde.

326. Mit Ausnahme der Relation (1) in Nr. **316** sind alle folgenden für die Ausflussgeschwindigkeit c aufgestellten Formeln in aller Strenge nur genau, wenn $\frac{ap}{AP} = 0$ oder $\frac{AP}{ap} = \infty$, folglich in Relation (2) Nr. **316** $C = 0$ ist, oder die Luft- oder Gasart in dem Behälter keine Bewegung besitzt; eine Voraussetzung, welcher man sich um so mehr nähert, je grösser A gegen a ist, wie dies auch bereits (Nr. **317**) bemerkt worden.

Wird daher der Gasdruck P nicht an einer Stelle gemessen, wo das Gas vollkommen ruhig oder nur sehr wenig bewegt ist, sondern, wie dies öfter bei Gebläsen geschieht, wo man das Manometer auf die Windleitung aufsetzt, an Stellen, wo die Geschwindigkeit c der Luft- oder Gasschichten nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf; so muss man zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit c die ursprüngliche oder genauere Formel (1) in Nr. **316** anwenden, oder man muss, wenn man auch in diesem Falle die einfacheren Formeln, wie jene (3), (4)...(16) benützen will, zuerst den auf der Windleitung beobachteten Manometerstand h auf jenen h' (oder den Druck P auf jenen P') reduciren, wie dieser nämlich im Behälter, wo die Luft nur eine sehr geringe Geschwindigkeit besitzt, Statt finden würde. Ein Beispiel wird diesen Vorgang erläutern.

Beispiel. Das auf eine $3\frac{1}{2}$ Zoll weite cylinderische Windleitung B (Fig. 164) aufgesetzte Quecksilber-Manometer M zeigt bei einem äussern Barometerstande von 28 Zoll eine Höhe $h = ab = 2\frac{1}{2}$ Zoll, während der vor der Manometeröffnung i vorbeistreichende Wind mit einer Temperatur von 10^0 C. durch eine 2 Zoll weite Düsenöffnung C ausströmt. Wie gross ist dabei die theoretische Ausflussgeschwindigkeit?

Da hier der Manometerstand h an einer Stelle gemessen wird, an welcher die Luft schon eine grössere Geschwindigkeit besitzt, so muss man die allgemeine Formel (1) in Nr. **316** anwenden und für den vorliegenden Fall:

$\frac{P}{p} = \frac{30 \cdot 5}{28}$, $t = 10$, $\frac{a}{A} = \frac{16}{49}$ und (Nr. **321**, Anmerk.) $k_0 = 785370$, folglich $k = k_0 (1 + \alpha t) = 785370 \times 1 \cdot 04 = 816784 \cdot 8$ setzen. Dadurch wird $logn. \frac{P}{p} = 2 \cdot 3026\ logv. \frac{30 \cdot 5}{28}$, und wenn man diese Werthe in die genannte Formel (1) einsetzt und die ganz einfache Rechnung ausführt, sofort die theoretische Ausflussgeschwindigkeit $c = 391 \cdot 8$ Fuss.

Um in dem vorliegenden Falle die Manometerhöhe $a'b' = h'$ eines am Behälter A selbst angebrachten Manometers M' zu finden, welche der vorigen Höhe h des Manometers M äquivalent ist, oder was dasselbe, um den Druck P in der Windleitung B auf jenen P' im Behälter A zu reduciren, so folgt mit diesem letztern Drucke für dieselbe Ausflussgeschwindigkeit c aus der Formel (3) in Nr. **317**: $c = \sqrt{2k\, logn. \frac{P'}{p}}$, so dass also, wenn man die allgemeine Formel (1) (Nr. **316**) berücksichtiget, sofort:

$$log. \frac{P'}{p} = log. \frac{P}{p} : \left[1 - \left(\frac{a\,p}{A\,P}\right)^2\right] \text{ oder } log. P' = log. p + N$$

ist, wenn man Kürze halber den zweiten Theil dieser Gleichung durch N bezeichnet, und wobei die Logarithmen aus jedem, also auch dem Briggschen Systeme genommen werden können.

Nun ist für das gegenwärtige Beispiel:

$$log. P' = 1{\cdot}4471580 + \frac{{\cdot}0371418}{{\cdot}91014} = 1{\cdot}4879670,$$

folglich $P' = 30{\cdot}759$ und $h' = a'b' = 30{\cdot}759 - 28 = 2{\cdot}759$ Zoll, so, dass also das Manometer M' am Behälter A um $2{\cdot}759 - 2{\cdot}5 = {\cdot}259$ Zoll höher stehen würde, als jenes M auf der Windleitung B wirklich steht.

Lässt man den in §. 371 für die Bewegung des Wassers angeführten Bernoulli'schen Satz bezüglich des Unterschiedes zwischen dem hydraulischen und hydrostatischen Drucke auch für die Bewegung der Luft gelten, so müsste $h = h' - \frac{C^2}{2g}$ sein, wenn C die Geschwindigkeit der Luft in der Windleitung bezeichnet.

Nun ist im vorliegenden Falle $C = \frac{16}{49}c = \frac{16}{49} \times 391{\cdot}8 = 127{\cdot}9$, folglich die zugehörige Höhe in einer gleichartigen Luftsäule ausgedrückt: $\frac{C^2}{2g} = 263{\cdot}98$ Fuss, oder in einer äquivalenten Quecksilbersäule, welche $10517 \times 1{\cdot}04 = 10937{\cdot}7$ Mal schwerer als die Luft von 10° Wärme ist: $\frac{C^2}{2g} = \frac{263{\cdot}98}{10937{\cdot}7}$ Fuss $= {\cdot}289$ Zoll, welche Höhe von der vorhin gefundenen ${\cdot}259$ Zoll nur um ${\cdot}03$ Zoll abweicht. Mit diesem Werthe wäre daher in einer der genäherten, z. B. in der Formel (3) (Nr. **317**) wegen

$$h' = h + {\cdot}289 = 2{\cdot}5 + {\cdot}289 = 2{\cdot}789 \text{ Zoll},$$

sofort $\frac{P}{p} = \frac{30{\cdot}789}{28}$ zu setzen, womit man für die Ausflussgeschwindigkeit den Werth $c = 393{\cdot}8$ erhielte, welcher nur um 2 Fuss grösser als jener ist, welcher nach der genauern Formel (1) gefunden wurde.

Berücksichtigt man übrigens, dass das auf der Windleitung aufgesetzte Manometer durch die in derselben vorhandene Reibung der Luft etwas zu tief stehen wird $\left(\text{nahe um } \frac{1}{40}\,\frac{l}{d}\,\frac{C^2}{2g}\right)$, so kann gerade dieser letztere, etwas grössere Werth von c der Wahrheit näher liegen als der erstere.

327. Unter der Voraussetzung, dass die ausfliessende Luft- oder Gasart unvollkommen elastisch sei, also angenommen wird, dass es für eine bestimmte Menge dieser Flüssigkeit einen gewissen endlichen Grad der Ausdehnung gibt, bei welchem die Spannung Null ist (was wahrscheinlich bei allen unsern bekannten Gasen mehr oder weniger der Fall), findet Scheffler für die Ausflussgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$v = \sqrt{\left[2gb\, logn.\left(\frac{P+c}{p+c}\right)\right]} \ldots (\varepsilon),$$

wobei, wenn E den Elasticitätsmodul (d. i. die Kraft, welche fähig ist, das Luft- oder Gasprisma von der im natürlichen Zustande, nämlich bei einer Spannung gleich Null bestehenden Länge L auf die Hälfte oder $\frac{1}{2}L$ zusammen zu drücken) und w das Gewicht der Volumeneinheit des Luftprisma unter dem Drucke Null bezeichnen, sofort:

$$b = (1 + \cdot 00366\, t)\frac{E}{w} \text{ und } c = bw \text{ ist.}$$

In diesem Falle wäre nun für den äussern Druck $p = 0$ keineswegs mehr, wie nach den obigen Formeln, $v = \infty$ und $M' = 0$, sondern es wird dafür:

$$v = \sqrt{\left[2gb\, logn.\left(\frac{P+c}{c}\right)\right]} = \sqrt{\left(2gb\, logn.\frac{P}{c}\right)},$$

wenn man nämlich die sehr kleine Grösse c gegen P auslässt, und unter dem äussern Druck p gemessen:

$$M' = a\sqrt{\left(2gb\, logn.\frac{P}{c}\right)}.$$

Wird das Luftprisma, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Höhe im natürlichen Zustande, d. i. unter dem Drucke Null, gleich L ist, durch die Einwirkung der Schwere und ausserdem noch durch eine gegen das obere Ende wirkende Kraft p bis auf die Höhe h zusammengedrückt (wobei das Prisma am untern Ende durch die der Schwere entgegengesetzt wirkende Kraft P gestützt wird), so findet man:

$$h = b\, logn.\left(\frac{P+c}{p+c}\right), \text{ so, dass also auch } v = \sqrt{2gh},$$

nämlich die Ausflussgeschwindigkeit, gerade so, wie es bei unpressbaren Flüssigkeiten der Fall, die der Höhe h entsprechende Fallgeschwindigkeit ist.

Die Dichtigkeit des unter diesen Umständen ausfliessenden Gases ist jener gleich, welche dem äussern Drucke p

entspricht. Die unter diesem Drucke gemessene Ausflussmenge ist daher:

$$M' = a\sqrt{2gh}.$$

Diese hier vorkommende Höhe h ist also jene, welche ein verticales Prisma des betreffenden Gases, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Gewicht gleich $P-p$ ist, annehmen würde, wenn dasselbe nicht blos von dem Gewichte seiner eigenen Theile, sondern ausserdem noch durch die Kraft p comprimirt würde.

Wäre die mittlere Höhe unserer Atmosphäre genau bekannt, so liesse sich auch die Ausflussgeschwindigkeit der Luft von dem mittlern Druck P in den leeren Raum bestimmen. Diese Höhe wäre nach der vorigen Formel, wenn man $p = 0$ setzt und annimmt, dass die Temperatur durchaus $= 0$ ist, $h = b\ logn.\frac{P+c}{c}$ oder nahe $= b\ logn.\frac{P}{c}$, wobei P den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit an der Erdoberfläche bezeichnen würde. Die mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ in den leeren Raum strömende Luft würde dann jene Dichte annehmen, welche die an der Grenze der Atmosphäre befindliche Luftschichte, nämlich die vom Drucke Null besitzt.

Wäre die mittlere Höhe (wie Biot aus den Erscheinungen der Dämmerung schliessen zu können glaubt) wenigstens 47000 Meter, oder in runder Zahl 149000 W. Fuss hoch, so müsste diese Ausflussgeschwindigkeit v wenigstens $\sqrt{(62 \times 149000)} = 3039$ Fuss betragen. Da bei dieser angenommenen Höhe der Atmosphäre die Dichte der Luft in den obersten Schichten wenigstens 372 Mal geringer als auf der Oberfläche der Erde wäre, so würde sich auch die Atmosphäre, wenn sie nicht durch ihr eigenes Gewicht comprimirt würde oder ihre Dichte durchaus dem Drucke Null entspräche, wenigstens auf das 372fache ihrer jetzigen Höhe erheben. Wäre dagegen ihre Dichte durchaus gleich jener der untersten Schichten vom Drucke P, so würde ihre Höhe nur $\frac{P}{\gamma} = \frac{1844{\cdot}6}{{\cdot}0733} = 25165$ Fuss und bei dieser Höhe die Ausflussgeschwindigkeit in den leeren Raum nur 1249 Fuss betragen. (Vergleiche Comp. §. 480.)

328. Wir wollen schliesslich noch den Ausfluss einer vollkommen elastischen, schweren Flüssigkeit aus einem sich allmälig leerenden Gefässe durch eine kleine Oeffnung in einen Raum untersuchen, in welchem das Medium einen constanten Druck beibehält.

Es sei zu diesem Ende V das unveränderliche Volumen des Behälters oder Gasometers, aus welchem die Luft- oder Gasart ausfliesst, ohne wieder ersetzt zu werden; P der innere Druck im Anfange der Zeit t, p' der Druck am Ende der Zeit t, p der constante äussere Druck und a die sehr kleine, wirkliche Ausflussöffnung, so, dass wenn diese nach Innen nicht gehörig erweitert und abgerundet ist, a den Querschnitt der stärksten Contraction bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, hat man nach Relat. (3), Nr. **317**, für die am Ende der Zeit t Statt findende Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left(2k\ logn.\frac{p'}{p}\right)}$$

und da man diese Geschwindigkeit während der unendlich kleinen Zeit dt als constant ansehen kann, so ist die während diesem Zeitelemente ausfliessende und unter dem innern Drucke p' gemessene Ausflussmenge:

$$dM = \frac{p}{p'} a\, dt \sqrt{\left(2k\ logn.\frac{p'}{p}\right)},$$

wodurch sich also das Volumen V der Flüssigkeit vom Drucke p' auf jenes $V - dM$ von demselben Drucke p' reducirt. Indem sich aber dieses letztere Volumen wieder auf das ursprüngliche V ausdehnt, geht der Druck oder die Spannung p' in jene $p' - dp'$, oder wenn man p' als von der Zeit t abhängig darstellt, in die Spannung $p' - \left(\frac{dp'}{dt}\right) dt$ über, so dass man nach dem Mariotte-schen Gesetze hat:

$$\frac{p' - \left(\frac{dp'}{dt}\right) dt}{p'} = \frac{V - dM}{V}$$

oder wenn man für dM den Werth setzt und gehörig reducirt:

$$\frac{dp'}{dt} = p\frac{a}{V}\sqrt{\left(2k\ logn.\frac{p'}{p}\right)}.$$

Aus dieser Relation folgt, wenn man gleich, da p' abnimmt wenn t zunimmt, das Zeichen von dp' ändert:

$$dt = -\frac{V}{ap} \cdot \frac{dp'}{\sqrt{\left(2k\ logn.\frac{p'}{p}\right)}}$$

und aus dieser Differentialgleichung, wenn man den ersten Theil von 0 bis t und den zweiten von P bis p', oder bei verändertem Zeichen von p' bis P integrirt:

$$t = \frac{V}{ap\sqrt{2k}} \int_{p'}^{P} \frac{dp'}{\sqrt{\left(logn.\ \frac{p'}{p}\right)}}.$$

Anmerkung. Da sich dieses Integral nur näherungsweise bestimmen lässt und hierzu die bekannte Simpson'sche Formel oder Regel für die Quadratur am einfachsten und genauesten ist, so wollen wir diese Formel hier aufstellen und für den vorliegenden Fall einrichten.

Soll nämlich das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ genommen oder gefunden werden, und man theilt die Differenz $x''-x'$ in n gleiche Theile, wobei jedoch n eine gerade Zahl sein soll, und bezeichnet die den Abscissen dieser Theilungspuncte $x=x'$, $x=x'+\frac{1}{n}(x''-x')$, $x=x'+\frac{2}{n}(x''-x')\ldots$ $x=x'+\frac{n}{n}(x''-x')=x''$ entsprechenden Werthe von y (bei einer Curve die Ordinaten) der Reihe nach durch $y_0,\ y_1,\ y_2\ldots y_n$; so ist der genäherte Werth dieses Integrales nach der Simpson'schen Regel bekanntlich (man sehe im Anhange):

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x''-x'}{3n}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\ (A),$$

welcher Ausdruck um so genauer ist, je kleiner die Intervalle $\frac{x''-x'}{n}$ sind.

Wäre z. B. $y=\frac{1}{x}$, so würde $\int_{x'}^{x''} y\,dx = \int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x} = logn.\ \frac{x''}{x'}$ und wenn man in dieser Formel die Differenz $x''-x'$ nur in zwei gleiche Theile theilt, oder ganz einfach $n=2$ setzt, wegen

$$y_0=\frac{1}{x'},\quad y_1=\frac{1}{x'+\frac{1}{2}(x''-x')}=\frac{2}{x'+x''}\quad \text{und}\quad y_2=y_n=\frac{1}{x''}$$

sofort:

$$logn.\ \frac{x''}{x'} = \frac{x''-x'}{6}\left(\frac{1}{x'}+\frac{8}{x'+x''}+\frac{1}{x''}\right).$$

Dieser Ausdruck ist um so genauer, je kleiner die Differenz $x''-x'$ ist; wäre er nicht genau genug, so müsste man für n eine grössere Zahl wählen.

329. Wendet man zur näherungsweisen Bestimmung des letzten Integralausdruckes die eben aufgestellte Formel (A) an und theilt die Differenz $P-p'$ blos in zwei gleiche Theile, so wird wegen $x = p'$, $x' = p'$, $x'' = P$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(logn.\frac{p'}{p}\right)}}$, $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\left(logn.\frac{p'}{p}\right)}}$,

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\left(logn.\frac{P+p'}{2p}\right)}}$ und $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{logn.\frac{P}{p}}}$ sofort:

$$(g) \int_{p'}^{P} \frac{dp'}{\sqrt{logn.\frac{p'}{p}}} = \frac{P-p'}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{logn.\frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{logn.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{logn.\frac{P}{p}}}\right)$$

und wenn man diesen Ausdruck der Kürze wegen mit R bezeichnet, auch:

$$t = \frac{VR}{ap\sqrt{2k}} \dots (18).$$

Theilt man dagegen die Differenz $P-p'$ in vier gleiche Theile, setzt also $n=4$, so wird:

$$R = \frac{P-p'}{12}\left[\frac{1}{\sqrt{log.\frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{log.\left(\frac{P+3p'}{4p}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{log.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{log.\left(\frac{3P+p'}{4p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{log.\frac{P}{p}}}\right] \dots (h).$$

330. In dieser, durch die Formel (18) ausgedrückten Zeit, in welcher der Druck im Gasometer von P auf p' herabsinkt, ist die ursprüngliche Gasmenge V um eine Quantität vermindert worden, welche unter dem Drucke P gemessen, das Volumen:

$$V' = V - \frac{p'}{P}V = \frac{P-p'}{P}V \dots (19)$$

beträgt (weil $\frac{V-V'}{V} = \frac{P}{p'}$ sein muss).

Das Gewicht endlich dieser während der Zeit t ausgeflossenen Gasmenge ist, da die Volumeneinheit desselben unter dem Drucke P, $\gamma = g\varrho$ oder (Nr. **286**) $\frac{gP}{k}$ Pfunde oder Gewichtseinheiten wiegt,

$$= \frac{P-p'}{P}V.\frac{gP}{k} = \frac{g(P-p')}{k}V \dots (20),$$

wobei, wenn s das specifische Gewicht des betreffenden Gases bezeichnet, sofort (Nr. **287** und **288** (i)): $k = \frac{k_0}{s}(1+\alpha t)$, $k_0 = 784383$ und $\alpha = {\cdot}00366$ ist.

Beispiel. Der 982 Kubikfuss haltende Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen oben offenes Quecksilber-Manometer 10 Zoll und Thermometer 6° C. zeigt. Wenn nun dieser Wind durch eine 1 Zoll weite kreisrunde Oeffnung ohne Contraction in einen grossen oder freien Raum, in welchem der Barometerstand 27 Zoll beträgt, ausströmt, so entsteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerstand bis auf 7 Zoll herabsinkt und welches Luftquantum bis dahin ausfliesst?

Bezeichnet man die in Fussen ausgedrückten Manometer- und Barometersäulen durch h, h', b und das Gewicht von 1 Kubikfuss Quecksilber mit γ'', so ist $P = (h + b)\gamma''$, $p' = (h' + b)\gamma''$ und $p = b\gamma''$ oder für $h = \frac{10}{12}$, $h' = \frac{7}{12}$, $b = \frac{27}{12}$ und $\gamma'' = 766{\cdot}87$ Pf. auch $P = 2364{\cdot}5$, $p' = 2172{\cdot}8$ und $p = 1725{\cdot}4$ Pfund.

Die in der Reihe R in Relation (g) vorkommenden Quotienten werden $\frac{p'}{p} = 1 + \frac{h'}{b} = 1 + \frac{7}{27} = 1{\cdot}25926$, $\frac{P + p'}{2p} = 1 + \frac{h + h'}{2b} = 1{\cdot}31482$ und $\frac{P}{p} = 1 + \frac{h}{b} = 1{\cdot}37037$. Die genannte Reihe ist also:

$$R = 31{\cdot}955\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}64580 + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}805.$$

Nimmt man dagegen die noch mehr genäherte Reihe (h), so wird

$$R = 367{\cdot}7933\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}96280 + 3{\cdot}82290 + 7{\cdot}36948 + \\ + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}9775,$$

wodurch die bereits erreichte hinlängliche Genauigkeit ersichtlich wird.

Setzt man also $R = 367{\cdot}98$, so folgt aus der Relation (16), wegen $a = \frac{1}{4} \cdot \frac{3{\cdot}1416}{144} = \frac{{\cdot}1309}{24}$, $k = 801561$ und $s = 1$, sofort $t = 30{\cdot}397$, ferner aus (19) $V' = 79{\cdot}62$ und aus (20) Gewicht $= 7{\cdot}28$.

Das Manometer wird also in nahe 30·4 Secunden von 10 auf 7 Zoll herabsinken, und während dieser Zeit wird ein Volumen Luft oder Wind ausströmen, welches unter dem a n f ä n g l i c h e n i n n e r n Druck gemessen 79·62 Kubikfuss (unter dem ä u s s e r n Druck gemessen 109·11 Kubikfuss) und dem Gewichte nach nahe $7\frac{1}{4}$ Pfund beträgt.

Bewegung der Luft in Röhrenleitungen.

(§. 481.)

331. Bewegt sich die Luft aus dem Behälter A (Fig. 165) durch eine lange Röhre BC vom Durchmesser D und der Länge L mit der mittlern Geschwindigkeit C, so kann man den an der Röhrenwand Statt findenden Reibungswiderstand durch die Höhe z einer Luftsäule messen, wofür (auf ähnliche Weise wie bei Wasserleitungen) $z = \varepsilon \frac{L}{D} \frac{C^2}{2g}$ und der mittlere Reibungs- oder Widerstandscoefficient $\varepsilon = {\cdot}025$ ist. (Will man die Widerstandshöhe z durch eine Quecksilbersäule ausdrücken, so muss man

$$\varepsilon = \frac{{\cdot}025}{10517} = {\cdot}00000238$$

setzen, und es würde ein in C angebrachtes Quecksilbermanometer M'' um diese Höhe z niedriger stehen, als ein in B befindliches derartiges Manometer M').

Strömt nun die Luft aus der verengten Oeffnung E vom Durchmesser d mit der Geschwindigkeit c aus, und nimmt man an, dass im Behälter A, im Anfang der Röhrenleitung bei B und am Ende derselben bei C (unmittelbar vor der Verengung) der Reihe nach P, P', P'' die Drücke oder Spannungen der Luft, h, h', h'' die entsprechenden Quecksilbersäulenhöhen der Manometer M, M', M'', so wie ϱ, ϱ', ϱ'' die entsprechenden Dichtigkeiten der Luft sind, und dass endlich p der äussere Druck der Atmosphäre, b der Barometerstand und ϱ_1 die entsprechende Dichte der äussern Luft ist; so folgt aus der Formel (1) in Nr. **316**, wenn man den durch das Manometer M'' angezeigten, in C Statt findenden Luftdruck in Rechnung bringen will, wozu man in dieser Formel nur P'' statt P und $\frac{a^2}{A^2} = \frac{d^4}{D^4}$ setzen darf, für die Ausflussgeschwindigkeit, wenn man auch gleichzeitig $\frac{P''}{p} = \frac{b + h''}{b}$ setzt:

$$c = \sqrt{\frac{2k \, logn. \left(\frac{b + h''}{b}\right)}{1 - \left(\frac{b}{b + h''}\right)^2 \frac{d^4}{D^4}}} \ldots (1).$$

In dieser Formel ist $k = \frac{P''}{\varrho''}$, so wie $\frac{p}{P} = \frac{p}{P''} = \frac{\varrho_1}{\varrho''}$.

Will man von dem Manometerstand h' des Manometers M' in B ausgehen, so muss man in die Grundgleichung (f) (Nr. **316**) zurückgehen und berücksichtigen, dass die im ersten Theile derselben ausgedrückte Arbeitsgrösse nicht blos wie dort die Luftmasse $v\varrho$ (jetzt $v\varrho'$) von der kleineren Geschwindigkeit C auf die grössere c zu bringen, sondern auch überdies noch die Reibung oder die Widerstände in der Leitung von der Länge L und dem Durchmesser D zu überwinden hat, wozu die Arbeit $gv\varrho'z$ erforderlich ist, wenn z die Widerstandshöhe bezeichnet, d. i. (Nr. **215**) $z = \varepsilon \frac{L}{D} \frac{C^2}{2g}$ ist.

Wird daher in der genannten Gleichung (f), in welcher P' statt P und wieder d^4 und D^4 statt a^2 und A^2 zu setzen ist, im zweiten Theil derselben dieses Glied, und zwar wegen $C = \frac{d^2}{D^2} c$

und $\varrho' = \frac{P'}{k}$ in der Form $P'v \,.\, \varepsilon \frac{L}{D} \frac{d^4}{D^4} \frac{c^2}{2k}$ hinzugefügt und die Gleichung durch $P'v$ abgekürzt, so erhält man:

$$logn. \frac{P'}{p} = \frac{c^2}{2k}\left(1 - \frac{p^2}{P'^2} \frac{d^4}{D^4}\right) + \varepsilon \,.\, \frac{L}{D} \frac{d^4}{D^4} \frac{c^2}{2k}$$

und daraus, wegen $\frac{P'}{p} = \frac{b+h'}{b}$, und wenn man nach den Versuchen von Girard, d'Aubuisson, Buff u. m. A. den Widerstands- oder Reibungscoefficienten $\varepsilon = {\cdot}025$ setzt, die Ausflussgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{2k\, logn. \left(\frac{b+h'}{b}\right)}{1 + \left[{\cdot}025 \frac{L}{D} - \left(\frac{b}{b+h'}\right)^2\right] \frac{d^4}{D^4}}} \ldots (2).$$

In dieser Gleichung ist $k = \frac{P'}{\varrho'}$.

Berücksichtigt man endlich den Manometerstand h des Manometers M im Behälter A, wo man die Luft fast als ruhend annehmen, also $C = 0$ setzen und daher in der genannten Grundgleichung (f) (Nr. **316**) den Bruch $\frac{ap}{AP}$ auslassen kann (indem in der Relat. (2) Nr. **316** für $C = 0$ sofort $\frac{AP}{ap} = \infty$ wird), so hat man, wieder mit Hinzufügung des vorigen Gliedes für den Röhrenwiderstand:

$$logn. \frac{P}{p} = \frac{c^2}{2k} + \varepsilon \frac{L}{D} \frac{d^4}{D^4} \frac{c^2}{2k}$$

oder, wenn man auch zugleich auf die Widerstände der Luft beim Ein- und Austritt Rücksicht nimmt und die betreffenden Widerstandscoefficienten (Nr. **191**) durch ε_1 und ε_2 bezeichnet, folglich im zweiten Theil der vorigen Gleichung noch die beiden Glieder $\varepsilon_1 \frac{d^4}{D^4} \frac{c^2}{2k}$ und $\varepsilon_2 \frac{c^2}{2g}$ hinzufügt (auf die Grundgleichung (f) (Nr. **316**) zurückgehend, müsste man ausser dem schon vorhin für die Formel (2) hinzugefügten Glied $gv\varrho'z$ hier noch jene $gv\varrho z'$ und $gv\varrho z''$ beifügen, wobei $\varrho = \frac{P}{k}$, $z' = \varepsilon_1 \frac{d^4}{D^4} \frac{c^2}{2g}$, $z'' = \varepsilon_2 \frac{c^2}{2g}$ ist, und die Gleichung wieder durch Pv abkürzen) und daraus c bestimmt, die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit, wegen $\frac{P}{p} = \frac{b+h}{b}$ und $\varepsilon = {\cdot}025$, sofort:

$$c = \sqrt{\frac{2k\,logn.\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+\varepsilon_2+\left(\varepsilon_1+\cdot025\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}} \ldots (3).$$

Um diese Formel für den Gebrauch bequemer einzurichten, kann man wieder, wie dies in Nr. **323** geschehen, $k = k_0(1+\alpha t)$, $k_0 = \frac{g Q_0 b_0}{q_0}$ und für g, Q_0, b_0 und $q_0 = s\gamma_0 = \gamma_0$ (wegen $s=1$) die in Nr. **324** angegebenen Werthe setzen, und zugleich statt der natürlichen die Tafellogarithmen einführen; dadurch erhält man, auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, denselben Coefficienten 1900·5, wie er in Nr. **324**, Formel (16) erhalten wurde, folglich für diese Ausflussgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$c = 1900{\cdot}5\sqrt{\frac{(1+\alpha t)\,logv.\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+\varepsilon_2+\left(\varepsilon_1+\cdot025\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}} \ldots (4).$$

Was die in dieser Formel vorkommenden Coefficienten betrifft, so kann man $\alpha = \cdot00366$ und für gewöhnlich (Nr. **191**) $\varepsilon_1 = \cdot5$, so wie für Düsenöffnungen $\varepsilon_2 = \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{\cdot85^2} - 1 = \cdot384$ setzen.

332. Um nun auch die theoretische Ausflussmenge der Luft per Secunde auszudrücken, so ist diese wie in Nr. **322** für den innern und äussern Druck beziehungsweise:

$$V_1 = \tfrac{1}{4} d^2 \pi \,.\, c \text{ und } V_2 = \tfrac{1}{4} d^2 \pi \,.\, c\left(1+\frac{h}{b}\right).$$

Anmerkung. Diese Relationen beziehen sich auf den Fall, in welchem in der Leitung weder plötzliche Erweiterungen noch Verengungen, Krümmungen u. s. w. vorkommen, indem durch solche Hindernisse die Formeln (auf ähnliche Weise wie bei den Wasserleitungen) zusammengesetzter werden. Auch müsste man, wenn die Ausmündung um ζ höher oder tiefer als die Einmündung liegt, streng genommen im Nenner der vorigen Formel (4) diese Höhe ζ beziehungsweise addiren oder abziehen; allein diese Grösse wird immer gegen die übrigen ohne Fehler vernachlässigt werden können.

Beispiel. In dem Regulator einer 320 Fuss langen und 4 Zoll weiten cylinderischen Windleitung steht das Quecksilbermanometer 3·1 und das äussere Barometer 27·2 Zoll hoch. Wenn nun der Wind bei einer Temperatur von 20° C. am Ende der Leitung durch eine conisch zulaufende Düsenöffnung von 2 Zoll Durchmesser ausströmt, so ist die Frage, welche Windmenge diese Leitung liefert?

Setzt man in der letzten Formel (4) $t = 20$, $b = 27{\cdot}2$, $h = 3{\cdot}1$, $L = 320$, $D = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$, $\alpha = {\cdot}00366$, $\varepsilon_1 = {\cdot}5$ und (wie oben bemerkt) $\varepsilon_2 = {\cdot}384$; so erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction die Ausflussgeschwindigkeit:

$$c = 1900{\cdot}5 \sqrt{\frac{1{\cdot}0732 \; logv. \frac{30{\cdot}3}{27{\cdot}2}}{2{\cdot}91525}} = 249{\cdot}65 \text{ Fuss.}$$

Ferner ist die theoretische Ausflussmenge unter dem innern Druck:

$$V = \tfrac{1}{4} d^2 \pi \,.\, c = 5{\cdot}45 \text{ Kubikfuss,}$$

dagegen unter dem äussern Druck:

$$V = 5{\cdot}45 \left(1 + \frac{3{\cdot}1}{27{\cdot}2}\right) = 6{\cdot}07 \text{ Kubikfuss.}$$

Hochofengebläse.

(§. 487.)

333. Zur Bestimmung der Arbeits- oder Wirkungsgrösse, welche bei einem Cylindergebläse erforderlich ist, um die in den Gebläscylinder von Aussen eintretende Luft in den Regulator zu drücken, der bereits mit einer höher gespannten Luft gefüllt ist, sei p die Spannung der äussern, p' jene der im Regulator enthaltenen Luft, F die Grösse der Kolbenfläche, s der ganze Kolbenlauf und s' jener Theil davon, welchen der Kolben zurücklegen muss, bis die im Cylinder befindliche Luft von der Spannung p auf die höhere p' zusammengedrückt ist, und von welchem Momente an erst diese comprimirte Luft in den Regulator hineingepresst wird. Dies vorausgesetzt, hat man zuerst für die zur Comprimirung der Luft nöthige Arbeit, wenn man dabei die Temperatur als constant voraussetzt, nach Relat. (9') in Nr. **312**, in welcher $p_2 = p$, $v_2 = Fs$ und $v_1 = F(s - s')$ zu setzen ist, und wegen (nach dem Mariotte'schen Gesetz) $p'(s - s') = ps$, sofort: $w_1 = Fsp \; logn. \left(\frac{p'}{p}\right)$.

Ferner ist die Arbeit, um die auf p' comprimirte Luft während des Kolbenganges $s - s'$ in den Regulator zu drücken, offenbar: $w_2 = Fp'(s - s') = Fps$.

Endlich drückt die Atmosphäre auf die Gegenseite des Kolbens mit der Kraft Fp und verrichtet während des ganzen

Kolbenganges die Gegenarbeit $w_3 = Fps$. Es ist daher die gesuchte Arbeitsgrösse, um das Luftvolumen $Fs = V$ in den Regulator zu pressen, oder was dasselbe, von der Spannung p auf jene p' zu comprimiren, sofort $W = w_1 + w_2 - w_3$, d. i. wenn man für w_1, w_2, w_3 die Werthe setzt und reducirt:

$$W = Fsp\, logn. \left(\frac{p'}{p}\right) = Vp\, logn. \left(\frac{p'}{p}\right) \ldots (1).$$

Ist b der äussere Barometer-, so wie h der Manometerstand (in Quecksilbersäulen) am Regulator, folglich $\frac{p'}{p} = \frac{b+h}{b}$, so ist auch: $W = Vp\, logn. \left(\frac{b+h}{b}\right) = 2{\cdot}3026\, Vp\, logv. \left(\frac{b+h}{b}\right) \ldots (2)$.

Anmerkung. So wie diese Formel die Arbeit ausdrückt, welche (ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse) erforderlich ist, um das Luftvolumen V in den Regulator zu pressen, oder von der niederen Spannung p auf die höhere p' zu bringen; eben so gibt auch dieselbe Formel (2) die nöthige Arbeitsgrösse, wenn man umgekehrt durch ein gleiches Kolbenspiel die im Regulator enthaltene Luft von einer Spannung p', die geringer als die äussere p ist, in die Atmosphäre schaffen will; man darf dazu in der genannten Formel nur $b - h$ statt $b + h$ setzen, d. i. h negativ nehmen (indem jetzt, immer Quecksilber als Sperrflüssigkeit vorausgesetzt, sowohl die dem Drucke p' im Regulator entsprechende Barometersäule b' als auch noch die, gleichsam angesogene, Manometersäule h von der äussern Barometersäule b getragen wird, oder $b = b' + h$, d. i. $b' = b - h$ und daher $\frac{p'}{p} = \frac{b-h}{b}$ ist). Man hat nämlich in diesem Falle zur Herausschaffung des Luftvolumens $V = Fs$ aus dem Regulator in die Atmosphäre als nöthige Arbeit:

$$W = Vp'\, logn. \left(\frac{b-h}{b}\right) \ldots (3).$$

334. Die in der vorigen Nummer abgeleiteten Formeln gewähren für den practischen Gebrauch nur dann die nöthige Genauigkeit, wenn der ihrer Entwicklung zu Grunde liegenden Voraussetzung gemäss bei der Dichtigkeitsveränderung der Luft (Comprimirung oder Ausdehnung) die Wärme möglichst constant erhalten wird; wenn also die Differenz $p' - p$ nicht sehr gross, etwa noch unter $\frac{1}{20}p$ ist, und die Kolbenbewegung so langsam Statt findet, dass die Wärme, welche beim Comprimiren frei, bei der Ausdehnung gebunden wird, Zeit hat, sich mit jener der äussern Luft ins Gleichgewicht zu setzen.

Kann man dies nicht voraussetzen, so muss man dem Einflusse der Wärme auf die Dichtigkeitsänderung der Luft Rechnung tragen und die Grundformeln in Nr. **313**, nämlich jene (15) für das Ausdehnen und jene (15′) für das Comprimiren der Luft anwenden.

So erhält man für die obige Aufgabe, das Luftvolumen $V = Fs$ von der Spannung p in den mit Luft von der höhern Spannung p' gefüllten Regulator mit Rücksicht auf die Temperatursveränderungen zu pressen, zuerst nach der erwähnten Relation (15′) als Arbeitsgrösse, um die Luft, während der Kolben den Weg s' zurücklegt, von p auf p' zu comprimiren, wenn man wieder, wie oben, $p_2 = p$, $v_1 = F(s - s')$ und nach dem Mariotte'schen Gesetze $p'(s - s') = ps$ setzt, sofort:

$$w_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} Fsp \left[\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right].$$

Für die weitere Arbeit, die so comprimirte Luft während des Kolbenweges $s - s'$ in den Regulator zu drücken, hat man $w_2 = Fp'(s - s') = p'v_1$, oder wegen $p_2 = p_1\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\varkappa = p_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{v_1}{v_2}$ (Nr. **313**, Relation (10) und (12′)), d. i. $p = p'\frac{v_1}{v_2}\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ oder $p' = p\frac{v_2}{v_1}\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$, sofort, wegen $v_2 = Fs$:

$$w_2 = p'v_1 = pFs\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Endlich drückt wieder die Atmosphäre mit der Kraft Fp auf den Kolben und verrichtet die Arbeit $w_3 = Fps$, so, dass wieder wie oben die gesuchte Arbeit durch $W = w_1 + w_2 - w_3$, oder wenn man für w_1, w_2, w_3 die gefundenen Werthe setzt und gehörig reducirt, durch die Formel:

$$W = Vp\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] \ldots (4)$$

ausgedrückt wird, wenn man wieder das Volumen $Fs = V$ setzt.

Es mag hier wiederholt werden, dass die Grösse $\varkappa = \frac{c}{c_1}$ das Verhältniss zwischen der specifischen Wärme c mit Ausdehnung zu jener c_1 ohne Ausdehnung bezeichnet, und für atmosphärische Luft bis auf Weiteres (Nr. **302**) $\varkappa = 1{\cdot}41$ gesetzt werden kann.

Anmerkung. Wird umgekehrt das Luftvolumen V' von der Spannung p' durch plötzliche Ausdehnung auf die geringere Spannung p zurückgeführt, so erhält man genau eben so (wobei jetzt statt der Relation (15') jene (15) in Nr. **313** anzuwenden ist) für die Arbeit, welche dasselbe verrichtet, den Ausdruck:

$$W' = V'p' \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] \ldots (5).$$

Ist nun $V = Fs$ und $V' = F(s - s')$, so ist, wie man sich leicht überzeugt, und in Uebereinstimmung mit dem Clausius'schen Grundsatz (Nr. **303**) $W' = W$.

Wäre die specifische Wärme der Luft mit und ohne Ausdehnung gleich gross, nämlich $\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1$, so würde die vorige Formel (4) den Werth von W in der Form $\frac{0}{0}$ geben. Bestimmt man aber den Werth dieser Bruchfunction nach der bekannten Regel mit Hilfe der Differentialrechnung (Comp. §. 685), so findet man ganz einfach für diesen Werth von $\varkappa = 1$:

$$W = Vp \, logn. \left(\frac{p'}{p}\right)$$

übereinstimmend mit dem Ausdrucke (1) in Nr. **333**, zum Beweise, dass dies mit der Annahme, es bleibe die Temperatur während der Ausdehnung oder Zusammendrückung der Luft ungeändert, im Einklange steht.

Für eine incompressible Flüssigkeit, wie z. B. Wasser, wäre in den vorhergehenden Formeln $v_2 = v_1$, mithin, da aus der Relation (10) in Nr. **313** $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$ folgt, $\varkappa = \infty$ zu setzen. Mit diesem letztern Werth folgt aber aus der vorigen Relation (4):

$$W = Vp\left(\frac{p'}{p} - 1\right) = V(p' - p) \ldots (6),$$

wie dies auch sein soll.

Beispiel. Ein Cylindergebläs arbeitet mit zwei doppelt wirkenden Kolben von 4 Fuss Durchmesser, wovon jeder per Minute 10 Spiele mit 4 Fuss Kolbengang macht. Wenn nun dieses Gebläse bei einem äussern Luftdruck von 28 Zoll einen Wind von 33 Zoll Pressung erzeugt, so ist die Frage, wie gross der theoretische Arbeitsaufwand per Secunde ist?

In Folge dieser Bedingungen ist $F = \frac{1}{4}\pi \,.\, 16 = 12{\cdot}566$ Quadratfuss, $s = 4$ Fuss, folglich die per Secunde erzeugte Windmenge:

$$V = Fs = 2 \times 8 \times \tfrac{16}{60} \times 12{\cdot}566 = 33{\cdot}51 \text{ Kubikfuss.}$$

Ferner ist $b = 28$ und $h = 33 - 28 = 5$ Zoll $= \frac{5}{12}$ Fuss, so wie p als Druck der Atmosphäre auf den Quadratfuss gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule von 1 Fuss Querschnitt und $\frac{28}{12}$ Fuss Höhe, d. i. von $\frac{28}{12} = \frac{7}{3}$ Kubikfuss, also $p = \frac{7}{3} \times 13{\cdot}596 \times 56{\cdot}4 = 1789{\cdot}27$ Pfund.

Mit diesen Werthen erhält man aus der obigen Formel (2) der vorhergehenden Nummer:

$$W = 2{\cdot}3026 \times 33{\cdot}51 \times 1789{\cdot}27\ logv.\left(\tfrac{33}{28}\right) = 9851{\cdot}4 \text{ Fusspfund}$$

oder nahe 23 Pferdekräfte.

Führt man dagegen die Rechnung nach der Formel (4) durch und setzt dabei (Nr. **302**) $\varkappa = 1{\cdot}41$, so erhält man:

$$W = 33{\cdot}51 \times 1789{\cdot}27 \times \frac{1{\cdot}41}{{\cdot}41}\left[\left(\frac{33}{28}\right)^{\frac{{\cdot}41}{1{\cdot}41}} - 1\right] = 10089 \text{ Fusspfund}$$

oder nahe $23\frac{1}{2}$ Pferdekräfte.

Betrachtet man endlich die atmosphärische Luft als eine unzusammendrückbare Flüssigkeit (wie z. B. Wasser), rechnet also nach der Formel (6); so wird, wenn man einfacher $\frac{p' - p}{p} = \frac{h}{b}$ setzt:

$$W = 33{\cdot}51 \times 1789{\cdot}27 \times \tfrac{5}{28} = 10707 \text{ Fusspfund}$$

oder nahe 25 Pferdekräfte.

335. Zur Bestimmung des Querschnittes eines Gebläsecylinders oder eines Gebläsekastens muss man berücksichtigen, dass die ausgeblasene Luftmenge immer kleiner als die eingesogene ist. Man nimmt für gewöhnlich an, dass diese bei eisernen Cylindergebläsen $\frac{3}{4}$ und bei hölzernen Kastengebläsen $\frac{3}{5}$ von der eingesaugten Luftmenge beträgt.

Setzt man daher den gesuchten Querschnitt eines Cylinders oder eines Kastens $= A$, das Luftvolumen, welches ein Cylinder oder ein Kasten per 1 Secunde ausblasen soll, auf 0^0 reducirt $= B$, die Temperatur der eingesaugten Luft $= t$, so wie die Geschwindigkeit des Kolbens $= v$; so ist für ein einfach wirkendes Kastengebläse: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} v A (1 + {\cdot}004\, t) B$, und für ein doppelt wirkendes Cylindergebläse: $\frac{3}{4} v A = (1 + {\cdot}004\, t) B$, folglich ist der Querschnitt für einfach wirkende Kastengebläse:

$$A = 2 \cdot \tfrac{5}{3}(1 + {\cdot}004 t)\frac{B}{v}$$

und für doppelt wirkende eiserne Cylindergebläse:

$$A = \tfrac{4}{3}(1 + {\cdot}004 t)\frac{B}{v}.$$

Anmerkung. Was die übrigen wesentlichen Dimensionen betrifft, so nimmt man für den Querschnitt der Saugventile bei Kastengebläsen $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{12} A$ und bei Cylindergebläsen $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{9} A$. Für den Querschnitt der Druckventile kann man $\frac{1}{22}$ bis $\frac{1}{20} A$ nehmen.

Für den Querschnitt der Windleitung nimmt man für kalte Luft $\frac{1}{20}$ von der Summe der Querschnitte sämmtlicher doppelt wirkender Cylinder oder $\frac{1}{10}$ von der Summe der Querschnitte sämmtlicher einfach wirkender Kasten. Für erhitzte Luft muss dieser Querschnitt, wenn T die

Temperatur der erhitzten Luft ist, noch im Verhältniss von 1 zu $(1 + \cdot 004\, T)$ vergrössert werden.

Benützt man einen Regulator von unveränderlichem Volumen (§. 488), so soll dieser 40 bis 60 Mal so gross sein als das Luftvolumen, welches derselbe in jeder Secunde aufzunehmen und abzugeben hat. (Ueber die Summe der Querschnitte sämmtlicher Düsenöffnungen findet man u. A. eine Tabelle in Redtenbacher's: „Resultate für den Maschinenbau", S. 309.)

Die Geschwindigkeit des Kolbens beträgt im Durchschnitt bei kleinen hölzernen Kastengebläsen 2·4 bis 3·2 und bei grösseren eisernen Cylindergebläsen 2·8 bis 3·8 Fuss (per Secunde).

Den Kolbenschub nimmt man bei Cylindergebläsen gleich dem Durchmesser des Cylinders und bei Kastengebläsen gleich $\frac{3}{4}$ von der Weite des Kastens.

Was den Luftbedarf eines Hochofens betrifft, so kann man diesen nach dem grössten horizontalen Durchmesser oder Querschnitt des Ofens bestimmen, und zwar beträgt diese Luftmenge im Durchschnitt für jeden Quadratfuss dieses grössten Querschnittes per Minute:

für Holzkohlenöfen 32 bis 40 und
„ Coaksöfen ..... 20 Kubikfuss.

Endlich beträgt die Pressung der Luft in der Windleitung in Quecksilberhöhen ausgedrückt sofort:

für leichte Kohlen aus Tannenholz	$\frac{3}{4}$	bis	1	Zoll,
„ Kohlen aus harzigem Holz	1	„	2	„
„ Kohlen aus hartem Holz	$1\frac{1}{2}$	„	$2\frac{1}{3}$	„
„ leichte Coaks	3	„	5	„
„ dichte Coaks	5	„	7	„

Von der geradlinigen Bewegung geworfener oder fallender Körper in widerstehenden Mitteln.

(§. 492.)

336. Sei der fallende Körper in Beziehung auf eine verticale Achse symmetrisch, so, dass dessen Schwerpunct oder Mittelpunct der Masse in dieser Achse liegt; in diesem Falle wird sowohl die Schwerkraft g in der einen, so wie die Resultirende R aus den partiellen Widerständen auf diesen Körper in der entgegengesetzten Richtung nach dieser Achse wirken.

Ist M die Masse des Körpers, also Mg dessen Gewicht (oder die durch die Schwere erzeugte bewegende Kraft), so ist $Mg - R$ die nach der Richtung der Bewegung wirksame bewegende, folglich (§. 186):

$$G = \frac{Mg - R}{M} = g - \frac{R}{M}$$

die beschleunigende Kraft.

Den hierüber angestellten Versuchen zufolge ist bei einer weder zu schnellen noch zu langsamen Bewegung der Widerstand R der Dichte des Mittels und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so, dass wenn ϱ die Dichte des Mittels, v die Geschwindigkeit des fallenden Körpers und a einen constanten Erfahrungscoefficienten bezeichnet, sofort:

$$R = a\varrho v^2$$

gesetzt werden kann.

Wird dieser Werth für R in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man auch:

$$G = g - \frac{a\varrho v^2}{M} \ldots (1).$$

337. Es sei nun z. B., um einen speciellen Fall zu behandeln, der fallende Körper eine Kugel vom Halbmesser r und der Dichte δ, so ist ihre Masse $M = \frac{4}{3} r^3 \pi \delta$, folglich die der Schwere entgegenwirkende verzögernde Kraft des Mittels:

$$\frac{R}{M} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\varrho v^2}{r^3 \pi \delta} \ldots (2).$$

Da ferner, wie die Versuche zeigen, der Widerstand des Mittels (Luft, Wasser etc.) der Kugeloberfläche, also dem Quadrate des Halbmessers proportional ist, so kann man den obigen unbestimmten Coefficienten $a = br^2$ setzen, wobei b abermals eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Dadurch erhält die vorige Relation (2) die Form:

$$\frac{R}{M} = \frac{3b}{4\pi} \cdot \frac{\varrho v^2}{r\delta},$$

oder wenn man $\frac{3b}{4\pi} = k$ setzt, auch:

$$\frac{R}{M} = \frac{k\varrho v^2}{r\delta} \ldots (2')$$

und da für dieselbe Kugel und dasselbe Mittel k, r, ϱ, δ constante Grössen sind, so kann man für den vorliegenden Fall passend

$$\frac{k\varrho}{r\delta} = \frac{g}{c^2} \ldots (m)$$

setzen, wodurch endlich

$$\frac{R}{M} = \frac{gv^2}{c^2} \ldots (3)$$

wird.

Um die Bedeutung der hier eingeführten Grösse c kennen zu lernen (die für jeden Werth von g constant ist), hat man für $c = v$ sofort $R = Mg$, d. h. c ist nichts anderes als jene Geschwindigkeit der fallenden Kugel, bei welcher der Widerstand des Mittels genau dem Gewichte der Kugel gleich ist; weil aber dann die Bewegung gleichförmig wird, so ist c zugleich auch die grösste Geschwindigkeit, welche die Kugel erreichen kann, oder es ist, mit anderen Worten, c die Grenze, welcher sich die Geschwindigkeit v ohne Ende nähert (wie sich weiter unten noch deutlicher ergeben wird).

338. Da man sich das Gewicht der Masse M im Schwerpunct oder Mittelpunct der Kugel vereint denken kann, so ist die Bewegung der Kugel durch jene ihres Mittelpunctes, mithin durch die Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{R}{M} = g - \frac{gv^2}{c^2} \ldots (4)$$

bestimmt (Nr. **124**, Relat. (1)).

Aus dieser Gleichung folgt: $\frac{2g\,dt}{c} = \frac{dv}{c+v} + \frac{dv}{c-v}$ und wenn man integrirt:

$$\frac{2gt}{c} = logn.\,(c+v) - logn.\,(c-v) + C.$$

Bestimmt man die Constante C der Integration so, dass die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt, also für $t = 0$ auch $v = 0$ wird, so wird auch $C = 0$ und daher:

$$t = \frac{c}{2g}\, logn.\left(\frac{c+v}{c-v}\right) \ldots (5).$$

Aus dieser Gleichung erhält man ferner ohne Schwierigkeit, wenn man Kürze halber den Quotienten $\frac{gt}{c} = \alpha$ setzt:

$$v = \frac{c(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \ldots (6),$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ($= 2{\cdot}7182818$) ist.

Anmerkung. Aus der vorigen Relation (5) ergibt sich nun deutlich, dass für $v = c$ die Zeit $t = \infty$, dagegen für $v > c$ imaginär wird; es ist also für jeden endlichen Werth von t immer $v < c$, oder c der Grenzwerth für v. In der Wirklichkeit kann indess, wenn nur t schon hinreichend gross wird, die Bewegung als eine gleichförmige erscheinen.

339. Zur Bestimmung des Fallraumes s hat man, wegen $v = \frac{ds}{dt}$

(Nr. **120**), wenn man für v den vorigen Werth aus (6) und dabei statt $\alpha = \frac{g}{c} t$ Kürze halber $\alpha = \beta t$ setzt:

$$ds = \frac{c(e^{\beta t} - e^{-\beta t})}{(e^{\beta t} + e^{-\beta t})} dt.$$

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Integration, wenn man die unbestimmte Constante so bestimmt, dass für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, wodurch diese den Werth $-\frac{c}{\beta}\, logn.\, 2$ erhält, sofort:

$$s = \frac{c}{\beta}\, logn.\, \tfrac{1}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \ldots (7),$$

wobei, wie bemerkt, $\beta = \frac{g}{c}$ ist.

340. Um endlich eine Relation zwischen s und v zu erhalten, hat man allgemein (Nr. **124**, Gleich. (1)) für die beschleunigende Kraft G den Ausdruck $G = \frac{dv}{dt}$ oder, wegen $dt = \frac{ds}{v}$, auch $G = \frac{v\,dv}{ds}$; da nun hier (Relation (4)) $G = g - \frac{gv^2}{c^2}$ ist, so folgt durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke:

$$ds = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{2v\,dv}{c^2 - v^2}$$

und daraus, wenn man integrirt und die Constante der Bedingung gemäss bestimmt, dass für $v = 0$ auch $s = 0$ ist (wofür $C = \frac{c^2}{2g}\, logn.\, c^2$ wird) sofort:

$$s = \frac{c^2}{2g}\, logn. \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right) \ldots (8).$$

Endlich folgt auch umgekehrt aus dieser Gleichung ganz einfach die Relation:

$$v = c\sqrt{1 - e^{-\gamma s}} \ldots (9),$$

wenn man nämlich der Kürze wegen $\frac{2g}{c^2} = \gamma$ setzt, und wobei wieder e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Anmerkung. Obschon streng genommen nur für $t = \infty$ die Grösse $e^{-\alpha} = e^{-\beta t} = 0$, also (Relation (6)) $v = c$ und daher $G = g - \frac{gv^2}{c^2} = 0$, d. i. die Bewegung in eine gleichförmige übergeht, so nähert sich doch, wenn t hinreichend gross wird, die Geschwindigkeit v immer mehr der Grenze c und die Beschleunigung jener Null, d. h. je länger die Bewegung dauert, desto gleichförmiger wird dieselbe.

Auch lässt sich noch bemerken, dass wegen $c^2 = \frac{g r \delta}{k \varrho}$ (Nr. **337**, Relat. (m)) das Quadrat der Geschwindigkeit jener gleichförmigen Bewegung, welcher sich die variable der fallenden Kugel ohne Ende nähert, dem Halbmesser und der Dichte der Kugel direct und der Dichte des widerstehenden Mittels umgekehrt proportional ist; Folgerungen, welche durch directe Versuche vollkommen bestätigt werden.

Zur Uebung suche man die Werthe für v, s u. s. w. für den besondern oder gewöhnlich behandelten Fall, in welchem der Widerstand $R = 0$ (also $c = \infty$) ist, die Kugel also im leeren Raume fällt, aus den obigen Formeln (6), (7) etc. abzuleiten.

341. Was nun den Coefficienten k betrifft, so ist für die Kugel, wenn ihre Bewegung in der atmosphärischen Luft Statt findet, nach Duchemin (§. 494) $R = \frac{2}{5} k' A q' \frac{v^2}{2g}$, wobei nach seinen Versuchen $k' = 1{\cdot}2824$, $A = r^2 \pi$ die grösste Kreisfläche der Kugel, q' das Gewicht der kubischen Einheit Luft, also, wenn ϱ ihre Dichte ist, sofort (wegen $P = Mg = VDg$, §. 38) $q' = 1 \,.\, \varrho g$ und v die Geschwindigkeit der fallenden Kugel in irgend einem Augenblick bezeichnet, derart, dass wenn man diese Werthe substituirt und reducirt, sonach:

$$R = {\cdot}00826\, r^2 \pi \varrho g v^2$$

ist. (Vergleiche §. 494, Gleich. (2).)

Nun ist aber auch (Nr. **337**, Relat. (2')):

$$R = \frac{k \varrho v^2}{r \delta} M = \frac{k \varrho v^2}{r \delta} \,.\, \tfrac{4}{3} r^3 \pi \delta = \tfrac{4}{3} k \pi r^2 \varrho v^2,$$

folglich, wenn man diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt und aus der entstehenden Gleichung k bestimmt, sofort:

$$k = \tfrac{3}{4} g \times {\cdot}00826 = {\cdot}19223,$$

wobei $g = 31{\cdot}03$ gesetzt wurde.

Beispiel 1. So ist für das in §. 494 behandelte Beispiel der in der atmosphärischen Luft fallenden gusseisernen Kugel, in welchem $r = {\cdot}15417$ (Fuss) und $\delta = 7{\cdot}2$ gesetzt wurde, wenn man zuerst oder vorläufig die Dichte der ruhigen Luft im gewöhnlichen Zustande in Rechnung bringt und dafür (auf die Dichte des Wassers bezogen) $\varrho = \frac{1}{850}$ setzt, sofort nach Relation (m) in Nr. **337** die grösste Geschwindigkeit oder vielmehr ihr Grenzwerth:

$$c = \sqrt{\frac{g \delta r}{k \varrho}} = \sqrt{\frac{31{\cdot}03 \times 7{\cdot}2 \times {\cdot}15417 \times 850}{{\cdot}19223}} = 390{\cdot}27,$$

d. i. nahe 390 Fuss. (Diese Zahl soll auch in §. 494 statt jener 370 stehen.)

Nimmt man jetzt, um den genauern Werth von c zu erhalten, nach der Bemerkung in §. 492 statt dem vorigen Werth von $\varrho = \frac{1}{850}$ jenen $\varrho' = \varrho\left(1 + \frac{390}{1317}\right) = \frac{1 \cdot 296128}{850}$, so wird:

$$c = \sqrt{\frac{31 \cdot 03 \times 7 \cdot 2 \times \cdot 15417 \times 850}{\cdot 19223 \times 1 \cdot 296128}} = 342 \cdot 8;$$

es ist also nahe genug 343 Fuss die Grenze, welcher sich die Geschwindigkeit der fallenden Kugel ohne Ende nähert.

Beispiel 2. Es soll für die nämliche Kugel sowohl die Fallzeit wie auch die Endgeschwindigkeit bestimmt werden, wenn diese von der Höhe des St. Stephansthurmes, dessen Höhe zu 72 Klafter angenommen, frei herabfällt.

Zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit v hat man nach der Relat. (9) (Nr. **340**), wegen $\gamma = \frac{2g}{c^2}$, $g = 31 \cdot 03$, $c = 342 \cdot 8$, $s = 6 \times 72 = 432$ und $e = 2 \cdot 7182818$ zuerst $e^{-\frac{2gs}{c^2}} = \cdot 79601$ und damit:

$$v = 342 \cdot 8 \sqrt{1 - \cdot 79601} = 342 \cdot 8 \sqrt{\cdot 20399},$$

d. i.

$$v = 154 \cdot 826 \text{ Fuss.}$$

Ferner ist nach Relat. (5) (Nr. **338**) wegen $c + v = 342 \cdot 8 + 154 \cdot 826 = 497 \cdot 626$ und $c - v = 342 \cdot 8 - 154 \cdot 826 = 187 \cdot 974$, so wie $logn.\, X = 2 \cdot 3026\, logv.\, X$, sofort:

$$t = \frac{342 \cdot 8}{62 \cdot 06} \times 2 \cdot 3026\, logv. \left(\frac{497 \cdot 626}{187 \cdot 974}\right) = 5 \cdot 3776,$$

also nahe genug $t = 5 \cdot 38$ Secunden.

Im luftleeren Raume würde diese Kugel die Endgeschwindigkeit $v' = 163 \cdot 73$ Fuss erlangt, und dazu die Zeit $t' = 5 \cdot 2767$ Secunden gebraucht haben; es ist also $v' - v = 8 \cdot 9$ Fuss und $t - t' = \frac{1}{10}$ Secunde.

Beispiel 3. In welcher Zeit erlangt eine hölzerne Kugel von der vorigen Grösse (3·7 Zoll Durchmesser) und dem specifischen Gewicht $= \cdot 9$ unter den vorigen Bedingungen (d. i. bei demselben Barometer- und Thermometerstand und demselben Grad der Feuchtigkeit) beim freien Falle eine Geschwindigkeit von 130 Fuss und durch welche Höhe muss die Kugel dabei fallen?

Da diese Kugel 8 Mal leichter als die vorige eiserne ist (wegen $\frac{7 \cdot 2}{\cdot 9} = 8$), so ist dafür $W = \frac{6 \cdot 228}{8} = \cdot 7785$, und wegen $B = 1 \cdot 0493546$ sofort: $m = \cdot 000056536$. Mit diesem Werthe und $v = 130$ folgt aus den obigen Formeln (13) und (14): $t = 9 \cdot 5988$ Secunden und $s = 887 \cdot 64$ Fuss.

Im luftleeren Raume würde die Kugel in dieser Zeit von nahe 9·6 Secunden eine Geschwindigkeit von 297·55 Fuss erlangt und dabei einen Weg von 1428 Fuss zurückgelegt haben, oder die Kugel würde diese gegebene Geschwindigkeit schon in Zeit von nahe 4·2 Secunden erlangt und dabei nur einen Weg von 272·58 Fuss zurückgelegt haben.

Anmerkung. Für Körper von einem geringen specifischen Gewichte und grossem Volumen muss auch noch der Umstand berücksichtigt werden, dass hinter den in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpern eine gewisse Menge dieser Flüssigkeit mit fortgerissen wird, welche z. B. bei kugelförmigen Körpern ·6 von dem Volumen des Körpers selbst ausmacht.

342. Um nun auch noch die Bewegung von vertical aufwärts steigenden Körpern in widerstehenden Mitteln kurz zu behandeln, so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen dafür $-Mg - R$ die bewegende, folglich

$$G = -g - \frac{R}{M} \ldots (m')$$

die beschleunigende Kraft, oder es geht die Gleichung (4) in Nr. **338** für den jetzt zu behandelnden Fall über in jene:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{R}{M} = -g - \frac{gv^2}{c^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\frac{g\,dt}{c} = -\frac{c\,dv}{c^2 + v^2}$$

und wenn man diese Differentialgleichung integrirt und gleich die Constante der Integration so bestimmt, dass für $t = 0$, $v = a$ wird, wenn nämlich a die Anfangsgeschwindigkeit des aufsteigenden Körpers ist, so erhält man:

$$t = \frac{c}{g}\left(arc\ tang. \frac{a}{c} - arc\ tang. \frac{v}{c}\right) \ldots (10).$$

343. Um aus dieser letztern Gleichung v durch t auszudrücken, setze man

$$arc\ tang. \frac{a}{c} = b \text{ und } arc\ tang. \frac{v}{c} = u \ldots (n),$$

so ist aus (10):

$$\frac{gt}{c} = b - u \text{ und daraus } u = b - \frac{gt}{c},$$

folglich (Comp. §. 22), wenn man Kürze halber $\frac{gt}{c} = z$ setzt:

$$tang.\, u = \frac{tang\, b - tang\, z}{1 + tang\, b\ tang\, z}.$$

Nun ist (Relat. (n)) $tang.\, u = \frac{v}{c}$ und $tang.\, z = \frac{Sin\, z}{Cos\, z}$, mithin, wenn man diese Werthe substituirt und reducirt, sofort:

$$v = \frac{c\,(a\ Cos\, z - c\ Sin\, z)}{a\ Sin\, z + c\ Cos\, z} \ldots (11),$$

wobei, wie bemerkt, $z = \frac{gt}{c}$ ist.

344. Um ferner die Steighöhe s durch die Zeit t auszudrücken, hat man wegen $ds = v\,dt$, wenn man die vorige Gleichung (11) mit dt multiplicirt und dann integrirt (nachdem für z der Werth hergestellt worden):

$$s = c \, . \, \frac{c}{g} \, logn. \, (a \, Sin \, z + c \, Cos \, z) + C$$

oder da für $t = 0$ (also auch $z = 0$) auch $s = 0$, daher $C = -\frac{c^2}{g} \, logn. \, c$ ist, auch:

$$s = \frac{c^2}{g} \, logn. \left(\frac{a}{c} \, Sin \, z + Cos \, z \right) \ldots (12),$$

wobei $z = \frac{gt}{c}$ ist.

345. Um endlich noch eine Relation zwischen s und v zu finden, benützen wir wieder, wie in Nr. **340**, die Gleichung $G = \frac{v\,dv}{ds}$ und setzen für G den obigen Werth (m'), d. i.

$$-g - \frac{R}{M} = -g - \frac{gv^2}{c^2}$$

so folgt: $$v\,dv = -\left(g + \frac{gv^2}{c^2} \right) ds = -g \left(\frac{c^2 + v^2}{c^2} \right) ds$$

oder $$2g\,ds = -\frac{2c^2 v\,dv}{c^2 + v^2}.$$

Diese Gleichung integrirt und die Constante so bestimmt, dass für $v = a$, $s = 0$ wird, erhält man ganz einfach:

$$s = \frac{c^2}{2g} \, logn. \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 + v^2} \right) \ldots (13).$$

346. Ist h die grösste Höhe, welche der Körper mit seiner Anfangsgeschwindigkeit $v = a$ erreichen kann, und T die hiezu nöthige Zeit, so hat man, da für diese Zeit T, $v = 0$ ist, aus den Relationen (11) und (13) beziehungsweise: $0 = a \, Cos \, z - c \, Sin \, z$, daraus $tang. \, z = \frac{a}{c}$, oder z, d. i. $\frac{gT}{c} = arc \, tang. \, \frac{a}{c}$, also:

$$T = \frac{c}{g} \, arc \, tang. \, \frac{a}{c} \ldots (14)$$

und $$h = \frac{c^2}{2g} \, logn. \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \right) \ldots (15).$$

347. Auf dieser Höhe angekommen, fällt der Körper wieder zurück und erreicht an dem Puncte, von welchem er zu steigen begann, die Geschwindigkeit a' und braucht hiezu die Zeit T'.

Um aber a' und T' zu bestimmen, erhält man durch Gleichsetzung der Relationen (8) (in welcher $s = h$ und $v = a'$ zu setzen) und (15):

$$\frac{c^2}{2g} \, logn. \left(\frac{c^2}{c^2 - a'^2}\right) = \frac{c^2}{2g} \, logn. \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2}\right) \text{ oder } \frac{c^2}{c^2 - a'^2} = \frac{c^2 + a^2}{c^2}$$

und daraus:

$$a' = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \ldots (16).$$

Diese Relation zeigt, dass immer $a' < a$ ist.

Zur Bestimmung von T' darf man nur in der Relation (5) (Nr. **338**) statt t und v beziehungsweise T' und a' setzen, und man erhält:

$$T' = \frac{c}{2g} \, logn. \left(\frac{c + a'}{c - a'}\right) = \frac{c}{g} \, logn. \sqrt{\frac{c + a'}{c - a'}},$$

oder wenn man für a' den Werth aus der vorigen Relation (16) setzt und gehörig reducirt, auch:

$$T' = \frac{c}{g} \, logn. \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c}\right) \ldots (17).$$

Bezeichnet daher Θ die ganze Zeit, welche der Körper braucht, um wieder bis zu dem Puncte des Aufsteigens zu kommen, so ist:

$$\Theta = T + T' = \frac{c}{g} \left[arc\ tang. \frac{a}{c} + logn. \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c}\right)\right] \ldots (18).$$

Anmerkung. Da man g und a als bekannt ansehen und Θ durch Versuche finden kann, so lässt sich diese Relation (18) zur Bestimmung der Constanten c für irgend einen in der Luft sich bewegenden Körper benützen.

Beispiel. Eine 4zöllige, 10 Pfund schwere eiserne Kugel wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 100 Fuss vertical aufwärts geworfen; es soll bei Voraussetzung des mittlern Zustandes der Luft sowohl die grösste Steighöhe als auch die Zeit gefunden werden, welche hiezu nöthig ist.

Sucht man zuerst wieder den Werth der Constanten c, so hat man wegen $r = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $Mg = 10$ und (wie in Nr. **341**) $k = \cdot 19223$, ferner $Mg = \frac{4}{3} r^3 \pi \delta g = 10$ oder $g \delta r = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{\pi r^2}$ und $\varrho = \frac{1}{850}$, also (Nr. **337**, Relat. (m)) wegen $c^2 = \frac{g \delta r}{k \varrho}$ sofort:

$$c^2 = \frac{30 \times 36 \times 850}{4 \times 3{\cdot}1416 \times {\cdot}19223} = 380024, \text{ also } c = 616{\cdot}46.$$

Nun ist (Relat. (15)) $h = \frac{c^2}{2g} \, 2{\cdot}3026 \, logv. \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)$, mithin, wenn man die Werthe setzt und die Rechnung durchführt:

$$h = \frac{380024}{62{\cdot}06} \, 2{\cdot}3026 \, logv. \left(1 + \frac{10000}{380024}\right) = 159{\cdot}05,$$

also genau genug $h = 159$ Fuss.

Ferner ist nach Relat. (14):

$$T = \frac{616\cdot46}{31\cdot03}\, arc\ tang. \left(\frac{100}{616\cdot46}\right) = \frac{616\cdot46}{31\cdot03}\, arc\,(9^0\ 12'\ 50''\cdot06) = \frac{616\cdot46}{31\cdot03} \times \cdot160814$$

(wegen $tang.\ 9^0\ 12'\ 50''\cdot06 = \frac{100}{616\cdot46} = \cdot1622165$) oder endlich $T = 3\cdot1948$ oder nahe 3·2 Secunden.

Im leeren Raume wäre $h = 161\cdot3$ Fuss und $T = 3\cdot226$ Secunden, also die Steighöhe um $161\cdot3 - 159\cdot1 = 2\cdot2$ Fuss und die Steigzeit um $3\cdot226 - 3\cdot195 = \cdot031$ Secunden grösser.

348. Da man bei geringen Geschwindigkeiten den Versuchen zufolge den Widerstand des Mittels der 1. Potenz der Geschwindigkeit proportional annehmen kann, so hat man in dieser Voraussetzung (anstatt der Relat. (4) in Nr. **338**) $\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv}{c}$ oder

$$\frac{g\,dt}{c} = \frac{dv}{c - v}.$$

Diese Gleichung integrirt und dabei die Constante so bestimmt, dass für $t = 0$ auch $v = 0$ ist, wodurch diese $= logn.\ c$ wird, erhält man:

$$t = \frac{c}{g}\, logn. \frac{c}{c - v} \ldots (1').$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner, wenn man der Kürze wegen den Quotienten $\frac{g}{c} = \alpha$ setzt, $e^{\alpha t} = \frac{c}{c - v}$ und daraus:

$$v = c\,(1 - e^{-\alpha t}) \ldots (2'),$$

wobei wieder e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Wird diese Gleichung mit dt multiplicirt und dann integrirt, so erhält man, wegen $v\,dt = ds$, sofort:

$$s = \int c\,(1 - e^{-\alpha t}) = c\left(t + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right) = ct - \frac{c^2}{g} \cdot e^{-\alpha t} + C$$

und da für $t = 0$ auch $s = 0$ sein soll, also $C = \frac{c^2}{g}$ wird, auch:

$$s = ct - \frac{c^2}{g}(1 - e^{-\alpha t}) \ldots (3),$$

wobei $\alpha = \frac{g}{c}$ ist.

Anmerkung. Will man anstatt der in diesem Kapitel behandelten speciellen Fälle des Fallens und Steigens von Kugeln in der Luft sich die Aufgabe allgemein so stellen, dass man annimmt, es erhalte ein Körper durch einen Impuls (eine Impulsion Nr. **123**) irgend eine Anfangsgeschwindigkeit und werde dann von zwei Kräften, einer constanten und einer variablen, welch' letztere dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportional ist, getrieben; so fällt diese Aufgabe überhaupt mit der Bewegung der Projectile oder Geschosse in der Luft zusammen, für welche dann die constante Kraft die Schwere oder das eigene Gewicht des Projectils und die variable Kraft der Widerstand der Luft ist.

1. Fällt nun zuerst der Impuls (die Stoss- oder Wurfkraft) mit der constanten Kraft der Richtung nach zusammen, so entsteht nothwendig eine geradlinige Bewegung. Ist AB die betreffende gerade (verticale) Linie und sind N, M zwei Puncte derselben, in deren erstern sich der Schwerpunct des Körpers beim Beginn der Bewegung, im zweiten oder tiefer liegenden M dagegen nach Verlauf irgend einer Zeit t befindet; ist ferner a die Anfangsgeschwindigkeit desselben in N und v die Geschwindigkeit in M; ist P die constante und $R = Av^2$ die variable Kraft, so wie m die Masse des Körpers; so kann man sich ganz einfach der allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) und (2) in 5. von Nr. **131** bedienen.

Die einzige hier nothwendige Gleichung ist daher wegen $X = P - Av^2$ sofort:

$$P - Av^2 = m\frac{dv}{dt},$$

und sie drückt aus, dass die Differenz zwischen der constanten und variablen Kraft dem Producte aus der Masse des Körpers in die Beschleunigung desselben gleich ist; dabei bezeichnet, wie man sieht, A den Widerstand für die Geschwindigkeit $v = 1$.

Ist, um die vorige Gleichung auf eine passendere Form zu bringen, c jene Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand Ac^2 genau gleich der Kraft P ist, so kann man A durch $\frac{P}{c^2}$, so wie die vorige Bewegungsgleichung durch jene:

$$P - \frac{P}{c^2}v^2 = m\frac{dv}{dt}$$

ersetzen. Dividirt man diese Gleichung durch m und setzt $\frac{P}{m} = p$, so ist einfacher:

$$p - pv^2 = \frac{dv}{dt} \ldots (\gamma),$$

woraus:

$$p\,dt = \frac{c^2 dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{2}\left(\frac{dv}{c+v} + \frac{dv}{c-v}\right),$$

oder wenn man integrirt und die Constante aus der Bedingung bestimmt, dass für $t = 0$, $v = a$ sein soll, sofort die Relation folgt:

$$pt = \tfrac{1}{2}c\, logn.\left(\frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{c+v}{c-v}\right).$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $a = 0$, so ist:

$$pt = \tfrac{1}{2}c\, logn.\left(\frac{c+v}{c-v}\right),$$

analog der obigen Gleichung (5), wobei, wenn P das Gewicht des vertical abwärts geworfenen Körpers bezeichnet, sofort $\frac{P}{m} = p = g$ ist.

Die übrigen Relationen ergeben sich wie Oben.

2. Wirkt die constante oder bewegende Kraft in gerade entgegengesetzter Richtung des ursprünglichen Impulses (wie wenn das Projectil vertical aufwärts geschleudert wird), so verwandelt sich die obige Bewegungsgleichung (γ) in die folgende:

$$-p-pv^2=\frac{dv}{dt}$$

und man erhält daraus durch dieselbe Transformation:

$$p\,dt=-\frac{c^2\,dv}{c^2+v^2},$$

so wie durch Integration dieser Gleichung, unter der Bedingung, dass die Anfangsgeschwindigkeit gleich a (also für $t=0$, $v=a$) ist:

$$\frac{pt}{c}=arc\ tang.\frac{a}{c}-arc\ tang.\frac{v}{c}.$$

(Vergl. obige Relat. 10.)

Eben so können auch die weitern Relationen wie Oben gefunden werden.

3. Ist endlich die Richtung des Impulses (der Wurfkraft) gegen jene der constanten Kraft (also gegen eine Verticale) schief, so ist die Bewegung eine krummlinige, dabei aber offenbar die Curve eine ebene (sie liegt, wenn P die Schwerkraft, in einer verticalen Ebene).

Legt man durch den Anfangspunct der Bewegung ein rechtwinkeliges Achsensystem, und zwar die Achse der x nach horizontaler, jene der y nach verticaler Richtung aufwärts, in der betreffenden verticalen Ebene, wie in Nr. **126**, so erhält man hier, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen, zwei Bewegungsgleichungen (aus den genannten allgemeinen Gleichungen in Nr. **131**), und zwar sind diese, wenn die Winkel, welche die Richtung des Widerstandes oder der variablen Kraft, welche mit jener des Impulses oder der Wurfkraft (zugleich Tangente der Trajectorie im Anfangspuncte) zusammenfällt, mit der Achse der x und y bildet, durch α, β bezeichnet werden, wodurch $Cos\,\alpha=\frac{dx}{ds}$ und $Cos\,\beta=\frac{dy}{ds}$ ist, sofort:

$$-\frac{P}{c^2}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot v^2=m\frac{d^2x}{dt^2}\text{ und }-P-\frac{P}{c^2}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot v^2=m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Dividirt man wieder durch m, und setzt wie oben $\frac{P}{m}=p$, bemerkt ferner, dass $v=\frac{ds}{dt}$ ist, so erhält man nach gehöriger Reduction die beiden Differentialgleichungen:

$$-\frac{p}{c^2}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\text{ und }-p-\frac{p}{c^2}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

In die weitere Behandlung dieser Gleichungen, welche sich übrigens unter keiner endlichen Form integriren lassen, können wir hier nicht eingehen und verweisen u. A. auf *Poisson, Traité de la Mécanique tom 1. p. 402* u. f.

Geschwindigkeit des ausströmenden Dampfes.

(§. 509.)

349. Nimmt man nach Regnault's Versuchen das specifische Gewicht des gesättigten Wasserdampfes mit ·6219 des specifischen Gewichtes der atmosphärischen Luft bei gleicher Spannung und Temperatur in Rechnung, so hat man für die theoretische Ausflussgeschwindigkeit des Dampfes aus einer Oeffnung des Dampfkessels nach Formel (8) in Nr. **320** mit Rücksicht auf die darauf bezügliche Bemerkung in Nr. **321** sofort:

$$c = 2410 \sqrt{(1+\alpha t)\, logv. \left(1 + \frac{mh}{b}\right)},$$

wobei für ein Quecksilbermanometer $m = 1$ und $1 + \frac{h}{b} = \frac{b+h}{b} = \frac{P}{p}$ ist, wo P die absolute Dampfspannung im Kessel und p jene der äussern Luft bezeichnet, wenn nämlich, wie fast immer, der Dampf in die freie Atmosphäre ausströmt.

Bringt man, wie es üblich, die effective Dampfspannung in Atmosphären ausgedrückt in die Rechnung und setzt diese $= n$, so ist $p = 1$ und $P = n + 1$, folglich die Ausflussgeschwindigkeit des Dampfes per Secunde in Wiener Fuss:

$$c = 2410 \sqrt{(1+\alpha t)\, logv. (n+1)} \ldots (1),$$

dabei ist die Temperatur t in Centigraden und der Ausdehnungscoefficient, bis auf Weiteres, $\alpha = \cdot 00366$ zu setzen.

So wäre z. B. für Dampf von $\frac{1}{4}$ und 6 Atmosphären Ueber- oder effectiven Druck, beziehungsweise $n + 1 = 1\frac{1}{4}$, $t = 106\cdot 5$ und $n + 1 = 7$, $t = 165\cdot 3$ (Tafel in Nr. **361**), folglich die theoretische Ausflussgeschwindigkeit des Dampfes in die freie Luft in diesen beiden Fällen: $c = 884\cdot 5$ und $c = 2806\cdot 7$ Fuss per Secunde.

Nach den bisher angenommenen Formeln fallen diese Geschwindigkeiten nicht unbedeutend kleiner aus.

Grösse der Sicherheitsventile bei Dampfkesseln.

(§. 528.)

350. Um die Grösse der Oeffnung zu bestimmen, welche bei einem Dampfkessel angebracht werden muss, um von einer gewissen Spannung angefangen allen Dampf in dem Masse, als er im Kessel erzeugt wird, auch gleichzeitig wieder durch diese Oeffnung entweichen zu lassen, sei a die Grösse dieser Oeffnung, so wie n die Anzahl der Atmosphären der effectiven Spannung, welche der Dampf im Kessel erreichen, aber nicht übersteigen soll. Ist ferner c die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf von dieser Spannung in die freie Atmosphäre ausströmt und μ der der betreffenden Oeffnung entsprechende Ausflusscoefficient, so ist dem Volumen nach die per Secunde aus dieser Oeffnung ausströmende Dampfmenge $M = \mu a c$.

Ist ferner Q das Gewicht dieses Volumens M, so hat man, da 1 Kubikfuss Dampf bei t^0 Temperatur und b Fuss Quecksilbersäule Spannung (und dem specifischen Gewicht von ·6219) $\cdot 018866 \frac{b}{1+\alpha t}$ Pfunde wiegt, sofort:

$$Q = \cdot 018866 \, \mu a \frac{b}{1+\alpha t} c,$$

oder wenn man für die Geschwindigkeit c den Werth (1) aus der vorigen Nummer setzt, in Pfunden:

$$Q = 45\cdot 467 \, \mu a b \sqrt{\frac{1}{1+\alpha t} \, logv. \, (n+1)} \ldots (2).$$

Dieselbe Relation hätte man auch unmittelbar aus der Formel (17) in Nr. **323** mit der dort bemerkten Umänderung des Coefficienten 57·64 in 45·46 erhalten.

Setzt man für kreisrunde Oeffnungen, wie solche bei den Ventilsitzen der Dampfkessel vorkommen, bis auf nähere Bestimmungen $\mu = \cdot 85$, so erhält man für die wirkliche per Secunde aus einer solchen Oeffnung ausströmende Dampfmenge dem Gewichte nach:

$$Q = 38\cdot 65 \, a b \sqrt{\frac{1}{1+\alpha t} \, logv. \, (n+1)} \ldots (3).$$

Will man in diese Formel den mittleren Barometerstand einführen, oder, wie es in der Regel immer geschieht, den mittlern Luftdruck voraussetzen, so wird noch einfacher, wegen $b = 2\cdot 4043$ Fuss:

$$Q = 92\cdot 93 \, a \sqrt{\frac{1}{1+\alpha t} \, logv. \, (n+1)} \ldots (4),$$

wobei man wieder $\alpha = \cdot 00366$ setzen kann.

351. Ist nun A die dampferzeugende oder die sogenannte Heizfläche des Dampfkessels und nimmt man an, dass jede

Flächeneinheit, hier also speciell jeder Quadratfuss dieser Heizfläche, bei einem normalen Betrieb per Secunde m Pfund Dampf erzeugt, so muss nach der obigen Bedingung $mA = Q$ sein. Setzt man in diese Relation für Q den Werth aus der vorigen Gleichung (4) und bestimmt dann die Ausströmungsöffnung a, so erhält man:

$$a = \frac{mA}{92{\cdot}93} \frac{\sqrt{1 + \alpha t}}{\sqrt{logv. (n + 1)}} \ldots (5).$$

Der Erfahrung zufolge geben die gewöhnlichen Dampfkessel per 1 Quadratfuss Heizfläche und per Stunde 5 bis 6, die Schiffskessel von 5·5 bis 6·5 und die Locomotivkessel während der Fahrt und einer Geschwindigkeit von mindestens 4 Meilen per Stunde von 4 bis 10 Pfund (beim Stillstehen kaum 2 Pfd.) Dampf von den betreffenden Spannungen. Nimmt man daher beispielsweise für einen Locomotivkessel die stündliche Dampferzeugung zu 9 Pfund für jeden Quadratfuss seiner Heizfläche (directe wie indirecte), setzt nämlich $m = \frac{9}{3600} = \frac{1}{400}$, so folgt aus der vorigen Relation (5) für die Grösse der nöthigen Ventilöffnung:

$$a = \frac{A\sqrt{1 + \alpha t}}{37172 \sqrt{logv. (n + 1)}}.$$

Soll ferner, wie jetzt gewöhnlich, der Dampf im Kessel eine effective Spannung von 7 (also eine absolute von 8) Atmosphären erhalten, so muss man in dieser letztern Relation $n = 7$ und $t = 172{\cdot}1$ (nach Regnault nur 170·8) setzen; dadurch erhält man, $\alpha = {\cdot}00366$ gesetzt:

$$a = \frac{A}{37172} \sqrt{\frac{1{\cdot}6299}{{\cdot}90309}} = \frac{1{\cdot}3434A}{37172} = \frac{A}{27670}.$$

Es ist daher für dieses Beispiel das Verhältniss zwischen den beiden Flächen a und A:

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{27670},$$

d. h. die Ventilöffnung ist zur Erfüllung der gestellten Bedingung schon gross genug, wenn sie den 27670sten Theil der Heizfläche des Kessels beträgt. Insoferne nun nach der frühern preussischen Verordnung bei jedem Dampfkessel die Ventilöffnung wenigstens $\frac{1}{3000}$ der Heizfläche betragen muss, wäre in dem vorliegenden Beispiele eine $\frac{27670}{3000} = 9{\cdot}2$fache, oder bei zwei Ventilen sogar (scheinbar) eine $18\frac{1}{2}$fache Sicherheit vorhanden.

Nach der neuern Verordnung (31. August 1861) müssen die Sicherheitsventile (deren auf den Schiffs-, Locomotiv- und Locomobil-Dampfkesseln wenigstens zwei vorhanden sein sollen) nach Abzug der Stiele und etwa vorhandenen Stege für jeden Quadratfuss der gesammten, vom Feuer berührten Kesselfläche im Ganzen mindestens die nachstehend bestimmte freie, zur Abführung des Dampfes dienende Oeffnung haben, nämlich bei einem Ueberdruck (effectiven Druck) von mehr als:

0 bis $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ bis 1	1 bis $1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$ bis 2	2 bis $2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$ bis 3	3 bis $3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$ bis 4	4 bis $4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$ bis 5	5 bis $5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$ bis 6	Atmosphäre
10·0	7·0	5·3	4·3	3·6	3·2	2·8	2·5	2·3	2·0	1·85	1·7	□Linien freie Oeffnung.

Nimmt man nach dieser Scala für den effectiven Druck von 7 Atmosphären 1·4 Quadratlinien Ventilöffnung auf 1 Quadratfuss Heizfläche, so hat man für das vorliegende Beispiel:

$$a = \frac{1{\cdot}4 A}{144 \times 144} \text{ d. i. } \frac{a}{A} = \frac{1}{14812}.$$

Nach der in Oesterreich bestehenden Anordnung muss jeder Dampfkessel mit zwei Sicherheitsventilen versehen sein, deren lichter Durchmesser aus der Formel:

$$d = {\cdot}312 \sqrt{\frac{A}{n + {\cdot}588}} \dots (\alpha)$$

in W. Zollen gefunden wird, in welcher, wie oben, A die Heizfläche des Kessels in Quadratfuss und n die effective Dampfspannung in Atmosphären bezeichnet. Für das vorliegende Beispiel wäre die kreisförmige Ventilöffnung in Quadratfuss $a = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{12}\right)^2 \pi = \frac{A}{14292}$, also bei zwei Ventilen eine $\frac{2 \times 27670}{14292} = 3{\cdot}872$fache Sicherheit vorhanden.

Ist z. B. in dem hier angenommenen Locomotivkessel die totale Heizfläche $A = 1200$ Quadratfuss, so genügte eine kreisförmige Ventilöffnung von 2·82 Zoll Durchmesser, während das Gesetz nach der Formel (α) einen Durchmesser von 3·92 Zoll verlangt, wodurch wieder bei dem Vorhandensein von 2 Ventilen die bereits erwähnte 3·872fache Sicherheit entsteht.

Allein alle diese über den Sicherheitsgrad gemachten Berechnungen setzen voraus, dass die Ventilöffnung vollkommen frei sei, oder dass sich wenigstens das die Oeffnung überdeckende Sicherheitsventil um den 4ten Theil des Durchmessers der Ventilöffnung hebe, damit die ringförmige Ausströmungsöffnung der kreisförmigen gleich werde. Da sich nun aber die Ventile nach den von uns zahlreich angestellten und in der k. Akademie der Wissenschaften erörterten Versuchen kaum um 1 Linie, häufig nur um einen kleinen Bruchtheil dieser Grösse heben, so sind in der That in dieser Beziehung alle bisher angenommenen und berechneten Sicherheitsgrade, und zwar ohne Ausnahme, nach allen in den verschiedenen Ländern erlassenen Verordnungen illusorisch.

So erfordert in dem vorigen Beispiele die eingangs gestellte Bedingung eine Ventilöffnung von 6·246 Quadratzoll, oder einen Durchmesser von 2·82 Zoll. Nimmt man nun aber wirklich, wie es das Gesetz vorschreibt, 2 Ventile, jedes von 3·92 Zoll Durchmesser oder von 12·069 Quadratzoll Fläche, und hebt sich beim Abblasen desselben das Ventil im besten Falle um 1 Linie oder $\frac{1}{12}$ Zoll, so bieten beide Ventile zusammen dem ausströmenden Dampfe blos eine ringförmige Oeffnung von $2 \times 12{\cdot}31 \times \frac{1}{12} = 2{\cdot}052$

Quadratzoll dar, welche also $\frac{6{\cdot}246}{2{\cdot}052} = 3$ Mal zu klein (und nicht, wie oben gerechnet, 3·87 Mal zu gross) ist; ja diese Zahl steigert sich sogar auf das Doppelte, da sich die Ventile in der That nicht übe $\frac{1}{2}$ Linie heben.

Hieraus folgt also, dass man entweder auf die oben gestellte Bedingung verzichten, oder die Ventile bei Weitem grösser als nach allen bisher gegebenen Vorschriften machen müsse. Da nun aber das Letztere in der Praxis seine Schwierigkeiten hat, so thut man wenigstens gut, sich stets gegenwärtig zu halten, dass die Sicherheitsventile allein, ohne gehörige Vorsicht von Seite der Heizer oder Maschinisten, keineswegs, wie so gerne angenommen wird, gegen Kesselexplosionen ohne Weiteres schützen können, indem unserer Ansicht nach diese Ventile nichts mehr und nichts weniger als Regulatoren sind, mittelst welchen es dem Heizer wenigstens viel leichter wird, jede Ueberspannung und Gefährdung des Kessels hintanzuhalten, als es ihm ohne diese Ventile mit blosser Beobachtung eines verlässlichen Manometers möglich wäre.

Wanddicke der cylinderischen Dampfkessel.

(§. 529.)

352. Bezeichnet D den Durchmesser des Dampfkessels, d die Wand- oder Blechdicke, p den Dampfdruck im Innern des Kessels auf die Flächeneinheit, so wie m den Modul der Trag- (Nr. **54**) oder (nach Relaux) der stabilen Festigkeit des betreffenden Materiales; so ist nach Relation (1) in Nr. **116**, wenn man m statt der absoluten Festigkeit F_a setzt und gleich die sogenannte additionelle Stärke hinzufügt (§. 160 und 161):

$$d = \frac{pD}{2m} + {\cdot}114,$$

wenn man nämlich den Wr. Zoll zur Einheit nimmt.

Beträgt die effective Dampfspannung, welche der Kessel aushalten soll, n, mithin die absolute Spannung $n + 1$ Atmosphären, und rechnet man den Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratzoll mit 12·8 Pfund, so ist in der vorigen Relation $p = 12{\cdot}8\,n$ zu setzen, wodurch auch

$$d = 6{\cdot}4\,n \,.\, \frac{D}{m} + {\cdot}114$$

wird.

Nimmt man nun für Eisenblech in runder Zahl die stabile Festigkeit (§. 129) $m = 20000$, so wird, d und D in Zollen ausgedrückt:

$$d = {\cdot}00032\,nD + {\cdot}114 \ldots (\alpha).$$

353. Die durch diese Formel (α) ausgedrückte Blechdicke würde allenfalls hinreichend sein, wenn der Kessel 1. vollkommen cylinderisch wäre, 2. aus einem einzigen Stück (wie aus Gusseisen) bestünde, 3. dem Feuer und sonstigen nachtheiligen Einflüssen nicht ausgesetzt wäre und endlich 4. die Wirkungen einer möglichen Explosion des Kessels nicht so verheerend und lebensgefährlich wären.

Aus allen diesen Gründen nimmt man die Bleche im Allgemeinen 4 Mal so stark, d. i. man nimmt den Coefficienten der Tragfähigkeit anstatt 20000 (wobei die Elasticitätsgrenze erreicht wird) nur mit 5000 Pfund in Rechnung (was bei einfacher Vernietung der Blechtafeln ungefähr $\frac{1}{7}$ der Bruchfestigkeit ist), wodurch man statt der Formel (α) die folgende:

$$d = \cdot 00128 nD + \cdot 114 \ldots (\beta)$$

erhält.

So müsste z. B. für einen Kessel von 3 Fuss Durchmesser, welcher zur Erzeugung von Dämpfen bestimmt ist, die eine effective Spannung von 4 Atmosphären haben sollen, die Blechdicke nach dieser Formel, wegen $D = 36$ und $n = 4$, sofort:

$$d = \cdot 00128 \times 4 \times 36 + \cdot 114 = \cdot 18432 + \cdot 114 = \cdot 2983 \text{ Zoll}$$

oder nahe 3·58 Linien betragen.

354. Wir haben bereits in der 1. Ausgabe dieses Werkes die Ansicht ausgesprochen, dass wir die in der Formel (β) vorkommende additionelle Stärke von ·114 Zoll, welche der eigenen Stabilität (für $n = 0$ oder sehr kleine Werthe von n) wegen dem 1. Glied hinzugefügt wird, nur für geringe Dampfspannungen als gerechtfertigt ansehen und dass dieses Glied nach einer gewissen Scala mit der Zunahme der Dampfspannung allmälig abnehmen und endlich ganz verschwinden sollte. Dieser Ansicht wurde nun auch seither in der neuern Verordnung (vom Jahre 1854) der zu beobachtenden Sicherheitsmassregeln gegen die Gefahr der Explosionen bei Dampfkesseln Rechnung getragen, indem nach dieser Verordnung die Blechdicke eiserner oder kupferner Dampfkessel nach der Formel:

$$d = \cdot 0189 nD + \alpha \ldots (1)$$

bestimmt werden müssen, in welcher D den in Wr. Zollen ausgedrückten Kesseldurchmesser, n die effective Dampfspannung, d die nöthige Blechdicke in Wr. Linien und α eine Zahl bezeichnet, welche für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ beziehungsweise gleich 1·37, 1·17, ·97, ·78, ·58, ·39, ·19, 0 ist.

So müsste also für das vorige Beispiel, wegen $n = 4$, $D = 36$ und $\alpha = \cdot 78$, sofort:

$$d = \cdot 0189 \times 4 \times 36 + \cdot 78 = 2\cdot 7216 + \cdot 78 = 3\cdot 5016,$$

d. i. $3\frac{1}{2}$ Linien betragen, während nach der vorigen Formel (β)

$$d = 2\cdot 21184 + 1\cdot 368 = 3\cdot 5798,$$

d. i. nahe $3\frac{4}{5}$ Linien war.

Obschon aber nach dieser Formel (β) für das vorliegende Beispiel ein stärkeres Blech als nach der vorgeschriebenen Formel (1) erforderlich wäre, so ist dieses doch nur durch die ungerechtfertigte grössere additionelle Dicke von 1·368 L. entstanden, während das erste rationelle Glied in der Formel (1) $= 2\cdot 7216$ grösser als jenes 2·21184 der Formel (β) erscheint; woraus sofort folgt, dass in der vorgeschriebenen Formel (1) der Coefficient der Tragfähigkeit oder der stabilen Festigkeit beinahe nur mit dem 5. Theil von der an der Elasticitätsgrenze liegenden Zahl von 20000, d. i. nur mit 4062 Pfd. in die Rechnung kommt; und diese Zahl ist es, welche auf den Grad der Sicherheit schliessen lässt, keineswegs aber jene durch das auf Gerathewohl hinzugefügte additionelle Glied vergrösserte Zahl.

355. Die zur Vergrösserung der Heizfläche bei Dampfkesseln häufig angewendeten cylinderischen Feuer- oder Rauchröhren (auch „Kanonen" genannt), so wie die bei Locomotiv- und überhaupt den Tubularkesseln vorkommenden Heizröhren, bei welchen der Druck auf die äussere oder convexe Umfläche stattfindet, werden auf ihre rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

Um auch für diesen Fall die Dicke der Röhrenwand abzuleiten, darf man nur in der in Nr. **116** durchgeführten Entwicklung die auf die Einheit der Wandfläche wirkende Kraft p anstatt von der Achse gegen den Umfang, umgekehrt vom Umfang der Röhre gegen den Mittelpunct (in jedem einzeln auf die Achse senkrechten Querschnitt) wirkend annehmen, und man erhält genau so wie dort die mit der Relation (1) analoge Formel:

$$\delta = \frac{rp}{F_r},$$

in welcher r den Röhrenhalbmesser und F_r die rückwirkende Festigkeit des betreffenden Materiales bezeichnet.

Legt man nun für Röhren aus gewalztem Eisenblech die von Fairbairn im Jahre 1845 zur Ermittelung der Form und Stärke der Britania- und Conway-Röhrenbrücke durchgeführten Versuche zu Grunde, nach welchen sich die absolute Festigkeit des Schmiedeisens zu 23, dagegen die rückwirkende Festigkeit blos zu 12 Tonnen, also nahe um die Hälfte geringer herausstellte; so würde allerdings wegen $F_r = \frac{1}{2} F_a$ ein Rohr, welches einen äussern Druck zu erleiden hat, die doppelte Wandstärke gegen jenes haben müssen, welches einen gleichen Druck im Innern auszuhalten hat. Allein da man die Stärke der Materialien weder nach ihrer absoluten noch rückwirkenden Festigkeit, sondern nach ihrem Tragmodul oder ihrer stabilen Festigkeit zu bestimmen hat, und diese trotz der Verschiedenheit von F_r und F_a beim Schmiedeisen sowohl für den Zug als den Druck ziemlich dieselbe ist, so würde auch für die hier in Betracht gezogenen Röhren die Blechstärke aus den obigen Formeln (β) oder (1) der beiden vorhergehenden Nummern zu berechnen sein, wenn hiebei nicht eine grössere Wanddicke aus anderen Ursachen geboten oder räthlich wäre.

Eine der vorzüglichsten Ursachen, aus welchen ein cylinderisches Rohr von einem Drucke, sobald dieser von Aussen nach Innen wirkt, flach gedrückt werden kann, während dasselbe dem nämlichen Drucke von Innen nach Aussen vollkommen widersteht, liegt wohl in dem Umstande, dass die Querschnitte des Rohres keine vollkommenen Kreise, sondern mehr oder weniger Ellipsen bilden, und dass ein äusserer Druck diese Ellipsen noch flacher zu drücken sucht, während der innere Druck eher dahin wirkt, diese Ellipsen der Kreisform, als der Linie des Gleichgewichtes näher zu bringen.

356. Um den Einfluss dieser Abweichung von der Kreisform näher kennen zu lernen, wollen wir annehmen, dass der Querschnitt einer solchen Röhre eine Ellipse $ABA'B'A$ (Fig. 167) von den Halbachsen $AC = a$ und $BC = b$ bilde und der Normaldruck auf die Flächeneinheit $= q$ sei.

Zerlegt man den in jedem Puncte M der Curve Statt findenden Normaldruck P in zwei Seitenkräfte p und p', beziehungsweise senkrecht auf die grosse und kleine Achse AA' und BB', so hat man für die Summe der aus dem Drucke auf den Quadranten AMB abgeleiteten Seitenkräfte p, d. i. $\Sigma(p)$ nach dem Satze in Nr. **176**: $\Sigma(p) = q \cdot AC = aq$ und eben so für die Kräfte p', $\Sigma(p') = q \cdot BC = bq$.

Betrachtet man für diesen Quadranten den Punct A als Stütz- oder Drehungspunct, so ist das statische Moment der im Puncte M wirkenden Kraft p in Beziehung auf diesen Punct, wenn man die Abscisse $AR = x$ setzt und diese um dx zunehmen lässt, wodurch (Nr. **176**) $p = q\,dx$ wird, sofort $px = qx\,dx$, folglich die Summe der statischen Momente aller auf den Quadranten wirksamen Seitenkräfte p:

$$M = q\int_0^a x\,dx = \tfrac{1}{2} q a^2.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die Summe der statischen Momente der Kräfte p' (wenn man $BS = y$ setzt):

$$M' = q\int_0^b y\,dy = \tfrac{1}{2} q b^2.$$

Diesen beiden, in demselben Sinne wirkenden Momenten wirkt das statische Moment $Q \,.\, BC$ aus der Kraft $Q = \Sigma(p') = bq$, welche aus dem Gesammtdruck auf den Quadranten $A'B$ entsteht, direct entgegen, so, dass wenn man dieses Moment mit M'' bezeichnet, also $b^2 q = M''$ setzt, sofort das statische Moment $M + M' - M'' = \frac{1}{2} q (a^2 - b^2)$ dahin strebt, einen Bruch in A zu bewirken, was sofort um so grösser, je mehr a von b verschieden ist und bei einer genauen cylinderischen Röhre, wegen $b = a$, gänzlich verschwindet.

So wie durch das genannte Moment, welches durch eine in B nach der Richtung des Pfeils angebrachte Kraft S erzeugt, und dadurch der Bruch des Quadranten AB im Puncte A bewirkt werden kann, eben so wird auch in B ein Bruch entstehen, so, als ob der Quadrant in B befestigt oder eingemauert und in A parallel mit CB eine Kraft S' angebracht wäre, deren statisches Moment ebenfalls $= \frac{1}{2} q (a^2 - b^2)$ ist.

Anmerkung 1. Der hier erörterte Umstand, dass bei einer ovalen Röhre das Materiale nicht blos auf seine rückwirkende Festigkeit, sondern auch in Beziehung auf dessen Widerstand gegen Biegung oder auf seine relative Festigkeit in Anspruch genommen wird, folglich eine grössere Wanddicke bedingt, gilt wohl eben so, wenn der Druck im Innern der Röhre Statt findet, nur dass dann statt der rückwirkenden, die absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird; allein es tritt dabei der wesentliche bereits erwähnte Unterschied ein, dass im erstern Falle, nämlich bei einem Drucke von Aussen, die elliptische Röhre noch mehr flach gedrückt wird (wie dies in Fig. 167, a versinnlicht ist), während im zweiten Falle der innere Druck eher dahin wirkt, die Ellipse der Kreisform als der Linie des Gleichgewichtes näher zu bringen.

Dass aber in diesem Falle der Kreis wirklich die Linie des Gleichgewichtes ist, lässt sich leicht auf folgende Weise zeigen.

Betrachtet man die ebene Curve MmN (Fig. 168), auf welche die sämmtlichen Kräfte normal wirken, als ein Polygon von unendlich vielen Seiten mm', mm''... in dessen Winkelpuncten diese Kräfte p angebracht sind, und bezeichnet man ein Element der Curve oder eine Polygonseite mm' durch ds, den Krümmungshalbmesser im Puncte m durch ϱ, die auf die Längeneinheit der Curve wirksame Normalkraft durch q und endlich die Kraft, mit welcher das Element mm' ausgedehnt (oder bei einem Drucke auf die convexe Seite zusammengedrückt) wird durch T; so hat man, wenn die im Puncte m wirkende, auf dem Curvenelement normal stehende Kraft $p = q\,ds$ in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen der Seiten mm' und mm'' zerlegt wird, welche offenbar, da der Winkel $m'mm''$ durch diese Kraft p halbirt wird, einander gleich sein werden, sofort $p : T = Sin\, m''mn : Sin\, Omm''$, oder wenn man Winkel $m''mn = i$ setzt, und da Winkel Omm'' nur unendlich wenig von einem rechten abweicht, $p : T = Sin\, i : 1 = i : 1$ und daraus $p = q\,ds = i\,T$ oder $T = \frac{ds}{i} q$.

Berücksichtigt man, dass auch Winkel $mOm' = i$ und $mm' = ds = \varrho i$, folglich $\frac{ds}{i} = \varrho$ ist, so hat man auch:

$$T = \varrho q \text{ oder } q = \frac{T}{\varrho}.$$

Ist nun die betreffende Curve absolut biegsam, so fordert das Gleichgewicht, dass erstens die Spannung T in jedem Puncte m, m', m''... dieselbe sei, und dass zweitens die normale Pressung q in jedem Punct $= \frac{T}{\varrho}$, d. h. der Spannung dividirt durch den betreffenden Krümmungshalbmesser gleich sei. (Wäre die Curve nicht geschlossen, so müssten die letzten Elemente $m''M$, $m'N$ ebenfalls nach diesen Richtungen jede von der Kraft T gezogen oder gespannt werden.)

Da nun aber der Druck einer Flüssigkeit in einer Röhre (oder wenn dieselbe von der Flüssigkeit umgeben ist, auf die Röhre) rund herum gleich, also q constant ist, so muss auch (da T ebenfalls constant) der Krümmungshalbmesser einen constanten Werth annehmen, die biegsame Curve MmN also fürs Gleichgewicht in einen Kreisbogen übergehen.

Während bei einem constanten Werth von q auch die Spannung T (oder bei einem äussern Drucke die Compression) in allen Puncten des Kreises dieselbe und gleich rq ist, variirt sie z. B. bei der Ellipse in Fig. 167 in jedem Quadranten von einem Puncte desselben zum andern und ist z. B. in A oder A' gleich aq, während sie in B und B' nur gleich bq ist. (Für irgend einen andern Punct M findet man diese Spannung, wenn man in M eine Tangente, damit parallel an den Quadranten $A'B'$ eine zweite Tangente und zwischen beiden ein Perpendikel zieht; ist $2c$ die Länge dieses Perpendikels, so ist die Spannung, oder im entgegengesetzten Falle die Compression in diesem Puncte M gleich cq.)

Anmerkung 2. Aus einem Berichte der französischen Centralcommission für Dampfmaschinen vom Jahre 1846 geht hervor, dass bei einem Tubularkessel nach dem Fol'schen Systeme (wobei die Röhren vertical stehen) bei drei verschiedenen Kesselproben (auf den 3fachen Druck) von den 11 Fuss langen, 2·28 Zoll weiten und ·057 Zoll dicken cylinderischen kupfernen Röhren, davon jedesmal eine, und zwar schon bei einem Drucke von 9 bis 12 Atmosphären zusammengedrückt wurde, während sie bei einem Drucke auf den concaven Theil von Innen nach Aussen wahrscheinlich erst einem Drucke von 96 Atmosphären nachgegeben hätte.

Eben so wurden bei einem Dampfschiffkessel mit kupfernen Röhren von $9\frac{1}{2}$ Fuss Länge, $5\frac{3}{4}$ bis $6\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und ·114 Zoll Wanddicke mehrere Röhren bei einem Drucke von 10 Atmosphären zerdrückt, während sie einem innern Drucke bis zu 77 Atmosphären Widerstand geleistet hätten.

Nach den Versuchen des Hrn. Mary (bei Gelegenheit, als der Artesische Brunnen zu Grenelle bei Paris gebohrt wurde) erwiesen sich die Röhren aus Eisenblech weit stärker und vortheilhafter als jene aus Kupferblech, indem sich die erstern erst bei einem Drucke abzuplatten anfingen, welcher ungefähr $\frac{1}{4}$ des Druckes beträgt, bei welchem die Röhren nachgegeben hätten, wenn der Druck von Innen nach Aussen vorhanden gewesen wäre, während sich die kupfernen Röhren schon beim 10. Theile jenes Druckes, welcher, im Innern angebracht, ein Zerreissen bewirkt haben würde, zu deformiren anfingen und bei einer Pressung, die noch nicht ganz $\frac{1}{5}$ dieses Druckes betrug, ganz zusammengedrückt wurden. (*Annal. des mines*, 4e *Ser. T.* 10. *Paris*, 1846.)

Aus dem hier erörterten Grunde macht man in Frankreich in der Regel jene Röhren, welche einem äussern Drucke ausgesetzt sind, noch einmal so dick, als im Falle, unter sonst gleichen Umständen, dieser Druck im Innern der Röhren Statt findet.

Obschon Fairbairn, durch seine Versuche dazu geleitet, für die Feuerrohre, wie sie namentlich bei den Cornwall-Kesseln (mit inwendiger Feuerung) vorkommen, zur Berechnung der Blechdicke die bereits in Nr. **116** angeführte Formel:

$$\delta = \left(\frac{PLD}{724620}\right)^{\frac{1}{2\cdot19}} \ldots (\alpha)\ ^{*)}$$

aufstellen zu können glaubt, in welcher auch die Länge des Rohres einen wesentlichen Einfluss hat, so lässt sich unserer Ansicht nach dieser Gegenstand keineswegs durch theoretische Formeln erledigen, sondern es können dabei nur Erfahrung und kunstgerechte Ausführung die nöthige Sicherheit gewähren.

Daher kommt es auch, dass Fairbairn selbst zugesteht, dass man bei der gewöhnlichen Blechdicke, die gegen die vorige Formel (α) jeden-

---

*) Statt der hier angegebenen Zahl 724620, die aus der Reduction des französischen in Nr. **116** angeführten Masses entsteht, erhält man die etwas kleinere 707240, wenn man die im englischen Original angegebene Zahl 806300 (statt der dort angegebenen Zahl 723830) zum Grunde legt. Fairbairn nimmt dann für eine 6fache Sicherheit von dieser Zahl den 6. Theil.

falls zu gering wäre, dennoch durch Versteifung des Rohres von Aussen mittelst Ringen aus Winkeleisen, welche in gewissen Entfernungen von einander angebracht, die Länge des Rohres bei n Ringen in $n+1$ Theile theilt, die nöthige Stärke erzielt werden könne.

Diesem nämlichen Umstande ist es wohl zuzuschreiben, dass das preussische Handels-Ministerium in dem neuen Regulativ (vom Jahre 1861) die Vorschriften über die Blechdicken, und zwar nicht blos für die hier in Rede stehenden Feuerröhren, wofür in dem frühern Reglement eigene (von jenen für die Dampfkessel verschiedene) Formeln aufgestellt waren, sondern sogar über jene der Dampfkessel, wofür bei uns die obige Formel (1) (Nr. **354**) besteht, fallen gelassen, und diese Stärke dem Verfertiger unter seiner eigenen Verantwortlichkeit überlassen hat. Bezüglich der Feuerrohre wird in einem Ministerialerlasse vom Jahre 1860 blos einfach darauf hingewiesen, wie es, um das Durchbiegen der Feuerrohre bei Cornwall-Kesseln und das dadurch mögliche theilweise Abreissen der Bodenfläche des Kessels zu verhindern, zu empfehlen sei, das Rohr, sobald dessen Länge 15 Fuss übersteigt, derart zu unterstützen und zu verstärken, dass ein Durchbiegen nicht erfolgen kann.

In der betreffenden belgischen Vorschrift (vom Jahre 1853), welche die Blechdicke der Dampfkessel ebenfalls normirt, wird ausdrücklich bemerkt, dass sich zur Bestimmung der Blechdicke für cylinderische, einem Drucke von Aussen nach Innen ausgesetzten Feuerrohre, keine allgemeinen Regeln aufstellen lassen.

Schliesslich bemerken wir noch, dass wenn man diese Rauch- oder Feuerröhren aus demselben Blech wie den Hauptkessel herstellt, dadurch die Blechdicke ohnehin in der Regel wenigstens $1\frac{1}{2}$ Mal so stark ausfällt, als man diese nach der vorgeschriebenen Formel (1) in Nr. **354**, wenn man für D den betreffenden Durchmesser, welcher immer kleiner als jener des Haupt- oder Dampfkessels ist, einsetzt, erhalten würde; auch schützt der vorgeschriebene doppelte Wasserdruck einigermassen gegen eine unsolide Ausführung solcher Rohre.

Die Messingröhren der Locomotivkessel von 2 Zoll äusserm Durchmesser und 15 Fuss Länge erweisen sich bei einer Wanddicke von $1\frac{1}{4}$ Linie als hinreichend stark, um einem äussern Drucke von 14 bis 16 Atmosphären widerstehen zu können.

Theorie der Dampfmaschinen.

a) Aeltere Theorie.

(§. 532.)

357. Nach dieser Theorie wird angenommen, dass der Dampf, von seinem Eintritte in die Maschine angefangen bis zu seinem Austritte oder bis zu seiner Condensirung, fortwährend jene Temperatur beibehält, welche er im Kessel bei seiner Erzeugung besitzt, so, dass sich also während seiner ganzen Bewegung das Mariotte'sche Gesetz in aller Strenge auf ihn anwenden lässt.

Dies vorausgesetzt, sei bei einer oscillirenden Maschine F die Grösse der Kolbenfläche, L die Länge des Kolbenschubes, l die Länge jenes Theiles davon, welcher bei einer Expansionsmaschine (§. 517) bei offener Communication mit dem Kessel zurückgelegt wird, p der Druck des Dampfes auf die Flächeneinheit im Kessel, p' der Druck desselben, nachdem der Kolben seinen Lauf vollendet hat, und q der auf die Flächeneinheit bezogene Gegendruck auf den Kolben von Seite des Condensators oder der atmosphärischen Luft; so ist die theoretische Arbeitsgrösse oder Wirkung des Dampfkolbens während des Weges l bei offener Communication $w = pFl$. Hat der Kolben einen Weg $x > l$ zurückgelegt, so sei in diesem Augenblicke der Dampfdruck auf die Einheit der Kolbenfläche $= z$ (also $< p$), so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze $p : z = x : l$ und daraus $z = p\,\frac{l}{x}$. Da man aber diesen Druck während des darauf folgenden unendlich wenigen Fortrückens um dx als constant anzusehen hat, so ist die entsprechende Wirkungsgrösse $dw' = z\,dx = pl\,\frac{dx}{x}$, folglich die Wirkung des Dampfkolbens von dem Augenblicke der Absperrung des Dampfes bis zum vollendeten Kolbenlauf:

$$w' = plF\int_l^L \frac{dx}{x} = plF\,logn.\,\frac{L}{l}.$$

Die theoretische Gesammtwirkung der Maschine ist daher während eines Kolbenganges, wenn der Gegendruck q dabei constant ist:

$$W = w + w' - qFL,$$

oder wenn man substituirt und zugleich für L den Werth $L = \frac{p}{p'}l$ aus der Proportion $p : p' = L : l$ setzt:

$$W = plF\left(1 + logn.\,\frac{L}{l} - \frac{q}{p'}\right) \ldots (1),$$

wobei man auch $logn.\,\frac{p}{p'}$ statt $logn.\,\frac{L}{l}$ setzen kann.

Kommen nun auf die Minute n solche Kolbengänge, d. h. tritt das Dampfvolumen Fl von der Spannung p per Minute n Mal in den Cylinder, so ist die Wirkung per Secunde oder der theoretische Effect in Fusspfund, wenn der Fuss und das Pfund als Einheiten zum Grunde gelegt werden, $E = \frac{n.W}{60}$, oder in Pferdekräfte, wenn man ihre Anzahl durch N bezeichnet, $N = \frac{E}{430}$, d. i.

$$N = \frac{n p l F}{60 \times 430}\left(1 + logn.\frac{L}{l} - \frac{q}{p}\right) \ldots (2)$$

(vergl. §. 505, Relat. 1.)

Bei n_1 Kolbenspiele per Minute, welche Zahl mit der Umdrehungszahl des Schwungrades zusammenfällt, ist wegen $n = 2n_1$ auch, wenn man Kürze halber den eingeklammerten Theil der Formel (2) mit K bezeichnet:

$$N = \frac{n_1 p l F}{30 \times 430} K = \frac{pV}{430} K = \frac{pFv}{430} K \ldots (3),$$

wobei V das per Secunde in den Cylinder tretende Dampfvolumen (von dem Verluste dabei abgesehen) und v die mittlere Kolbengeschwindigkeit bezeichnet.

358. Wird die Expansion des Dampfes, wie bei dem Woolfschen System, dadurch bewirkt, dass der Dampf aus dem Kessel mit voller Kraft in einen engeren Cylinder A (Fig. 169) und von da, nachdem er hier seine Wirkung vollendet, in einen weiteren Cylinder B tritt und sich hier expandirt, von wo der Dampf gewöhnlich dann in den Condensator abzieht; so sei, um die Wirkung einer solchen Maschine immer noch nach der erwähnten Theorie zu entwickeln, f die Kolbenfläche und l der Kolbengang für den kleinern, F und L dasselbe für den weitern Cylinder, p der Druck des Dampfes auf die Flächeneinheit des kleinen Kolbens, p' der Druck des expandirten Dampfes am Ende des Kolbenlaufes im grossen Cylinder, so wie endlich q der auf den grossen Kolben Statt findende Gegendruck (von Seite des Condensators). Dies vorausgesetzt, habe beim Hinabgehen beider Kolben der kleinere bereits den Weg x, also der grössere, wenn $L = ml$ ist (was von der Anordnung der Maschine abhängt), jenen mx zurückgelegt; so ist in diesem Augenblicke der Druck auf den grossen Kolben (gleich dem Gegendruck auf den kleinern) gleich z gesetzt, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$z : p = fl : [f(l - x) + F . mx], \text{ folglich } z = \frac{pfl}{fl + (mF - f)x}.$$

Während des Fortrückens des kleinen Kolbens um den Weg dx ist dessen Arbeitsgrösse $= f(p - z)\,\mathrm{d}x$, so wie jene des grossen

Kolbens, dessen gleichzeitiger Weg $m\,dx$ ist, $= F(z-q)\,m\,dx$; folglich hat man für die Gesammtwirkung beider Kolben:

$$dw = (fp - mFq)\,dx + (mF - f)\,z\,dx,$$

oder wenn man für z den vorigen Werth setzt und innerhalb der Grenzen von $x = 0$ bis $x = l$ integrirt, für die Wirkung während eines Kolbenschubes:

$$W = (fp - mFq)\int_0^l dx + pfl(mF - f)\int_0^l \frac{dx}{fl + (mF-f)x},$$

$$\text{d. i. } W = (fp - mFq)\,l + \frac{pfl(mF-f)}{mF-f}\,logn.\left[\frac{fl + (mF-f)\,l}{fl}\right],$$

oder wenn man reducirt und für ml den Werth L setzt:

$$W = pfl\left(1 + logn.\frac{FL}{fl}\right) - qFL \ldots (r),$$

oder, da aus der Proportion $p : p' = FL : fl$ sofort $FL = \frac{p}{p'}fl$ folgt, endlich:

$$W = pfl\left(1 + logn.\frac{FL}{fl} - \frac{q}{p'}\right).$$

Behält man die Bezeichnung der vorigen Nr. bei, so ist der theoretische Effect per Secunde:

$$(4) \ldots 430\,N = \frac{n_1 pfl}{30}\left(1 + logn.\frac{FL}{fl} - \frac{q}{p'}\right) \text{ Fusspfund.}$$

Auch ist noch, wenn man das in der Klammer stehende Trinom mit M bezeichnet:

$$430\,N = pVM = pfvM \ldots (5),$$

wobei v die Geschwindigkeit des kleineren Kolbens ist.

Anmerkung. Da man in diesen Formeln statt dem Quotienten $\frac{FL}{fl}$ und in den obigen (2) und (3) der vorigen Nr. statt jenem $\frac{L}{l}$ den gleichgeltenden Werth $\frac{p}{p'}$ setzen kann; so folgt, dass diese Formeln, wie es auch sein soll, identisch sind.

b) Pambour'sche Theorie.

(§. 540.)

359. Gestützt auf eigene Beobachtungen und Versuche, geht Pambour bei seiner Theorie der Dampfmaschinen unter Anderm von der Ansicht aus, dass der Dampf während seiner Wirkung im Dampfcylinder unter allen Umständen das Maximum seiner

Dichte beibehält und sich während dessen Ausdehnung kein Theil desselben niederschlägt. Obschon sich nun diese Annahme nach den neuesten Versuchen und der Wärmetheorie als unzulässig erweist, indem, während sich der Dampf expandirt ohne Wärmezuführung immer eine theilweise Condensation desselben eintritt; so ist dieser Umstand für die Brauchbarkeit der Pambour'schen Formeln gleichwohl von keinem so grossen Einflusse, als dass man dessen Theorie, welche wenigstens in jeder andern Beziehung von ganz richtigen mechanischen Grundsätzen ausgeht, nicht bis auf Weiteres beibehalten könnte. Die jetzt vielseitig in Angriff genommene Wärmetheorie dürfte allerdings sehr bald auch zu einer Theorie der Dampfmaschinen führen, welche, wenn auch vielleicht nicht in practischer Beziehung, so doch in streng wissenschaftlicher Hinsicht nicht unerhebliche Vorzüge gegen die Pambour'sche besitzen wird.

Was die in §. 541 angeführte, von Pambour aufgestellte empirische Formel $v = \frac{1}{m + np}$ betrifft, nach welcher sich das relative Volumen v aus seiner Expansiv- oder Spannkraft p (Druck auf die Flächeneinheit) direct bestimmen lässt, so gewährt diese natürlich, wie alle derlei empirische Formeln, nur innerhalb gewisser, für die Dampfmaschinen gegebener Grenzen eine grössere oder geringere Genauigkeit, je nachdem die Coefficienten m und n aus mehr oder weniger verlässlichen Versuchen abgeleitet sind.

Bekanntlich legt Pambour seiner Theorie der Dampfmaschinen die beiden Formeln:

$$v = \frac{20000000}{1200 + p} \text{ und } v = \frac{21232000}{3020 + p}$$

zu Grunde, in welchen p den Druck des Dampfes (im gesättigten Zustand) auf den Quadratmeter in Kilogramm und v das relative Volumen bezeichnet, und von denen sich die erstere auf Dampf von niederem, letztere auf Dampf von hohem Drucke bezieht.

Reducirt man beide Formeln auf das Wr. Mass und Gewicht, und versteht unter p den Druck des Dampfes auf den Quadratzoll in Pfunden, so erhält man, mit Beibehaltung dieser Form von

$$v = \frac{m}{n + p} \dots (1)$$

sofort für Dämpfe von niederem Drucke:

$$m = 24781{\cdot}4$$
$$n = 1{\cdot}48688 \ldots (a),$$

für Dämpfe von hohem Drucke:

$$m = 26308$$
$$n = 3{\cdot}7420 \ldots (a').$$

Versteht man dagegen unter p den Druck auf den Wr. Fuss in Pfunden, so findet man für niedern Druck:

$$m = 3568525$$
$$n = 214{\cdot}1115 \ldots (b)$$

und für hohen Druck:

$$m = 3788346$$
$$n = 538{\cdot}8474 \ldots (b').$$

Von den zahllosen Formeln, welche zur Darstellung der Abhängigkeit des Druckes oder der Spannkraft des Dampfes von seiner Temperatur vorgeschlagen wurden, wollen wir nur die vorzüglichsten hier anführen.

Bezeichnet A die Dampfspannung in Atmosphären ausgedrückt (zu $1{\cdot}033^{k.}$ auf den □Centimeter oder 12·794 Pfund auf den Wr. Quadratzoll), so setzt für Spannungen von 1 bis 4 Atmosphären,

Tredgold: $$A = \left(\frac{75 + t}{174{\cdot}964}\right)^6,$$

Pambour: $$A = \left(\frac{72{\cdot}67 + t}{172{\cdot}67}\right)^6.$$

Der „Artesian-Club" setzt für Dampf unter 100°:

$$A = \left(\frac{115 + t}{215}\right)^{7{\cdot}71507}, \text{ über } 100^0\text{: } A = \left(\frac{85 + t}{185}\right)^{6{\cdot}42}.$$

Nach Dulong und Arago ist für Spannungen über 4 Atmosphären:

$$A = ({\cdot}2847 + {\cdot}007153\,t)^5.$$

Da man durch Exponential- und logarithmische Formeln der Wahrheit näher kommt, so setzt man auch, wenn die Spannung durch eine Quecksilbersäule h ausgedrückt wird:

$$h = a b^{\frac{nt}{m+t}}, \text{ oder für } b = 10 \text{ auch } \log. \frac{h}{a} = \frac{nt}{m+t},$$

dabei setzt Magnus $a = 4{\cdot}525$, $b = 10$, $n = 7{\cdot}4475$, $m = 234{\cdot}69$ und erhält h in Millimeter. In Atmosphären ausgedrückt wäre $A = a b^{\frac{nt}{m+t}}$ und dabei $a = {\cdot}005954$, während b, n, m die vorigen Werthe behalten. Dies gibt, nach einer kleinen Reduction:

$$\log. A = \frac{5{\cdot}2223\,(t - 100)}{234{\cdot}69 + t}.$$

August schlägt die Formel vor:

$$A = \left[\frac{b\,(a + t)}{c}\right]^{\frac{m - t}{m + nt}},$$

wobei $a = 1028{\cdot}4$, $b = 6415$, $c = 10^9$, $m = 100$ und $n = \frac{3}{5}$ ist.

Regnault benützte bei seinen Versuchen über die Expansivkraft des Wasserdampfes folgende Formeln:

1. Für Dämpfe von -32^0 bis 0^0: $h = a + b\alpha^x$, dabei ist $a = -\cdot08038$, $log. b = \cdot6024724 - 1$, $log. \alpha = \cdot0333980$, $x = 32^0 + t^0$, wo b die (negative) Temperatur in Centigraden bezeichnet. (Regnault benützte hier insbesondere ein Luftthermometer.)
2. Für Dämpfe von 0^0 bis 100^0: $log. h = a + b\alpha^t - c\beta^{-t}$. Dabei ist $a = 4\cdot7384380$, $log. b = \cdot1340339 - 2$, $log. c = \cdot6116485$, $log. \alpha = \cdot006865036$, $log. \beta = \cdot9967249 - 1$ und t die Temperatur über 0^0 nach der 100theiligen Scala.
3. Für Dämpfe von 100^0 bis 230^0: $log. h = a - b\alpha^x - c\beta^x$. Dabei ist $a = 6\cdot2640348$, $log. b = \cdot1397743$, $log. c = \cdot6924351$, $log. \alpha = \cdot99404929 - 1$, $log. \beta = \cdot99834386 - 1$ und $x = 20^0 + t^0$, wo t die Temperatur über 100^0 C. angibt.
4. Eine zweite Formel für dieselbe Temperatur ist nach Regnault:
$$log. h = a - b\alpha^x + c\beta^x.$$
Dabei ist für ein Quecksilber-Thermometer (bekanntlich benützte R. auch ein Luft-Thermometer):
$$a = 5\cdot4882878,\ log. b = \cdot4163766,\ log. c = \cdot9731198 - 4,$$
$$log. \alpha = 1\cdot997443007,\ log. \beta = \cdot01182377 \text{ und } x = t^0 - 100.$$

In allen diesen Formeln bezeichnet h die Höhe der entsprechenden Quecksilbersäule in Millimeter.

Professor Rankine, welcher gegen diese Formeln in theoretischer Hinsicht einige Einwendungen macht, schlägt die folgenden für die Spannung und Temperatur vor:

$$log. p = A - \frac{B}{T} - \frac{C}{T^2},$$

$$T = 1 + \sqrt{\frac{A - log. p}{C} + \frac{B^2}{4C^2}} - \frac{B}{2C},$$

wobei $T = t^0 + 461\cdot2^0$ Fahr.,

$A = 8\cdot2591$, $log. B = 3\cdot43642$, $log. C = 5\cdot59873$ und p in engl. Pf. auf den englischen Quadratfuss zu verstehen ist; dagegen wenn p in Zollen der Quecksilbersäule ($= 29\cdot922$ für 1 Atmosphäre) ausgedrückt werden soll, $A = 6\cdot4095$, und wenn p in Pf. auf den Quadratzoll ausgedrückt wird, $A = 6\cdot1007$ ist.

360. Da die neueren, von Regnault mit vorzüglicher Genauigkeit über die Elasticität des Wasserdampfes durchgeführten Versuche *) Resultate liefern, die von jenen der Akademiker Dulong und Arago, welche bisher allgemein angenommen wurden, und die wir im Compendium von §. 501 bis §. 503 angeführt und in Tabellen zusammengestellt haben, in etwas abweichen, so

*) *Mémoirs de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Tome XXI. Paris* 1847.

führen wir von diesen Versuchen, welche die Dampfspannungen von — 32 bis 230 Grad Temperatur umfassen, den für uns wesentlichsten Theil, d. i. von 0 bis 215 Grad oder von nahe $\frac{1}{165}$ bis 21 Atmosphären in der nachstehenden Tabelle an; dabei bezeichnet h die der Temperatur von t^0 C. entsprechende Dampfspannung in Millimeter Quecksilbersäule (diese bei 0° verstanden) und A diese Spannung in Atmosphären.

t^0.	h mm.	A.	t^0.	h mm.	A.	t^0	h mm.	A.
0°	4·600	·0061	42°	61·055	·080	84°	416·298	·548
1	4·940	0065	43	64·346	·085	85	433·041	·570
2	5·302	·0070	44	67·790	·089	86	450·344	·593
3	5·687	·0075	45	71·391	·094	87	468·221	·616
4	6·097	·0080	46	75·158	·099	88	486·687	·640
5	6·534	·0086	47	79·093	·104	89	505·759	·665
6	6·998	·0092	48	83·204	·109	90	525·450	·691
7	7·492	·0199	49	87·499	·115	91	545·778	·719
8	8·017	·0107	50	91·982	·121	92	566·757	·746
9	8·574	·011	51	96·661	·127	93	588·406	·774
10	9·165	·012	52	101·543	·134	94	610·740	·804
11	9·792	·013	53	106·636	·140	95	633·778	·834
12	10·457	·014	54	111·945	·147	96	657·535	·865
13	11·162	·015	55	117·478	·155	97	682·029	·897
14	11·908	·016	56	123·244	·163	98	707·280	·931
15	12·699	·017	57	129·251	·170	99	733·305	·965
16	13·536	·018	58	135·505	·178	100	760·000	1·000
17	14·421	·019	59	142·015	·187	101	787·590	1·036
18	15·357	·020	60	148·791	·196	102	816·010	1·074
19	16·346	·022	61	155·839	·205	103	845·280	1·112
20	17·391	·023	62	163·170	·215	104	875·410	1·152
21	18·495	·024	63	170·791	·225	105	906·410	1·193
22	19·659	·026	64	178·714	·235	106	938·310	1·235
23	20·888	·028	65	186·945	·246	107	971·140	1·278
24	22·184	·029	66	195·496	·257	108	1004·910	1·322
25	23·550	·031	67	204·376	·267	109	1039·650	1·368
26	24·988	·033	68	213·596	·281	110	1075·370	1·415
27	25·505	·034	69	223·165	·294	111	1112·090	1·463
28	28·101	·037	70	233·093	·306	112	1149·830	1·513
29	29·782	·039	71	243·393	·320	113	1188·610	1·564
30	31·548	·042	72	254·073	·334	114	1228·470	1·616
31	33·406	·044	73	265·147	·349	115	1269·410	1·670
32	35·359	·047	74	276·624	·364	116	1311·470	1·726
33	37·411	·049	75	288·517	·380	117	1354·660	1·782
34	39·565	·052	76	300·838	·396	118	1399·020	1·841
35	41·827	·055	77	313·600	·414	119	1444·550	1·901
36	44·201	·058	78	326·811	·430	120	1491·280	1·962
37	46·691	·061	79	340·488	·448	121	1539·250	2·025
38	49·302	·065	80	354·643	·466	122	1588·470	2·091
39	52·039	·068	81	369·287	·486	123	1638·960	2·157
40	54·906	·072	82	384·435	·506	124	1690·76	2·225
41	57·910	·076	83	400·101	·526	125	1743·88	2·295

t^0.	h mm.	A.	t^0.	h mm.	A.	t^0.	h mm.	A.
126°	1798·35	2·366	156°	4196·59	5·522	186°	8644·35	11·374
127	1854·20	2·430	157	4306·88	5·667	187	8838·82	11·630
128	1911·47	2·515	158	4419·45	5·815	188	9036·68	11·885
129	1970·15	2·592	159	4534·36	5·966	189	9237·95	12·155
130	2030·28	2·671	160	4651·62	6·120	190	9442·70	12·425
131	2091·94	2·753	161	4771·28	6·278	191	9650·93	12·699
132	2155·03	2·836	162	4893·36	6·439	192	9862·71	12·977
133	2219·69	2·921	163	5017·91	6·603	193	10078·04	13·261
134	2285·92	3·008	164	5144·97	6·770	194	10297·01	13·549
135	2353·73	3·097	165	5274·54	6·940	195	10519·63	13·842
136	2423·16	3·188	166	5406·69	7·114	196	10745·95	14·139
137	2494·23	3·282	167	5541·43	7·291	197	10975·00	14·441
138	2567·00	3·378	168	5678·82	7·472	198	11209·82	14·749
139	2641·44	3·476	169	5818·90	7·556	199	11447·46	15·062
140	2717·63	3·576	170	5961·66	7·844	200	11688·96	15·380
141	2795·57	3·678	171	6107·19	8·036	201	11934·37	15·703
142	2875·30	3·783	172	6255·48	8·231	202	12183·69	16·031
143	2956·86	3·890	173	6406·60	8·430	203	12437·00	16·364
144	3040·26	4·000	174	6560·55	8·632	204	12694·30	16·703
145	3125·55	4·113	175	6717·43	8·839	205	12955·66	17·047
146	3212·74	4·227	176	6877·22	9·049	206	13221·12	17·396
147	3301·87	4·344	177	7039·97	9·263	207	13490·75	17·751
148	3392·98	4·464	178	7205·72	9·481	208	13764·53	18·111
149	3486·09	4·587	179	7374·52	9·703	209	14042·52	18·477
150	3581·23	4·712	180	7546·39	9·929	210	14324·80	18·848
151	3678·43	4·840	181	7721·37	10·150	211	14611·32	19·226
152	3777·74	4·971	182	7899·52	10·394	212	14902·22	19·608
153	3879·18	5·104	183	8080·84	10·633	213	15197·48	19·997
154	3982·77	5·240	184	8265·40	10·876	214	15497·17	20·391
155	4088·56	5·380	185	8450·23	11·123	215	15801·33	20·791

Die hier zusammengestellten Regnault'schen Zahlen für h stimmen von 0° bis 105° genau mit den gleichzeitig und unabhängig von Magnus gefundenen Werthen überein. In den höheren Temperaturen fallen diese mehr mit den von Dulong und Arago (welche von 0° bis 224° gehen) erhaltenen Zahlen zusammen.

Für Rechnungen, welche bei Dampfmaschinen noch häufig nach dem englischen Mass- und Gewichtssystem ausgeführt werden, und nach welchen der Druck der Atmosphäre oder die diesem Drucke entsprechende Dampfspannung bei einer Temperatur von 212° Fahr. mit 14·71 Pfund auf den Quadratzoll, oder gleich der Höhe einer Quecksilbersäule von 29·922 Zoll angenommen wird, ist es bequemer, diese Tabelle für das englische Mass umzurechnen.

Wir geben sofort diese Tabelle nach der von W. Fairbairn in dessen neuestem Werke (*Treatise on Mills and Millwork etc. Lond.* 1861) gewählten Einrichtung.

Druck in ℔. auf 1 □Zoll	Temperatur in Graden nach Fahr.	Temperaturs-Erhöhung für 1 ℔. Druck	Druck in ℔. auf 1 □Zoll	Temperatur in Graden nach Fahr.	Temperaturs-Erhöhung für 1 ℔. Druck	Druck in ℔. auf 1 □Zoll	Temperatur in Graden nach Fahr.	Temperaturs-Erhöhung für 1 ℔. Druck
1	101·98	24·28	31	252·09		70	302·71	
2	126·26	15·35	32	253·94	1·85	75	307·38	·93
3	141·61	11·47	33	255·70	1·76	80	311·83	·89
4	153·08	9·25	34	257·47	1·77	85	316·00	·85
5	162·33	7·76	35	259·15	1·68	90	320·03	·81
6	170·12	6·78	36	260·83	1·68	95	323·87	·77
7	176·90	6·00	37	262·44	1·61	100	327·56	·74
8	182·90	5·41	38	264·04	1·60	105	331·10	·71
9	188·31	4·92	39	265·58	1·54	110	334·51	·68
10	193·23	4·54	40	267·12	1·53	115	337·84	·66
11	197·77	4·19	41	268·60	1·49	120	340·99	·63
12	201·96	3·92	42	270·07	1·47	125	344·06	·61
13	205·88	3·67	43	271·50	1·43	130	347·05	·59
14	209·55		44	272·91	1·41	135	349·93	·57
14·7	212·00	3·47	45	274·30	1·39	140	352·76	·57
15	213·02		46	275·65	1·35	145	355·6	·56
16	216·29	3·27	47	276·99	1·34	150	358·3	·55
17	219·42	3·14	48	278·30	1·31	160	363·4	·51
18	222·37	2·96	49	279·59	1·29	170	368·2	·48
19	225·19	2·82	50	280·85	1·26	180	372·9	·47
20	227·91	2·72	51	282·60	1·25	190	377·5	·46
21	230·54	2·63	52	283·32	1·22	200	381·8	·43
22	233·08	2·54	53	284·53	1·21	210	386·0	·42
23	235·43	2·35	54	285·73	1·20	220	389·9	·39
24	237·75	2·32	55	286·90	1·17	230	393·8	·39
25	240·00	2·25	56	288·05	1·15	240	397·5	·37
26	242·16	2·16	57	289·19	1·14	250	401·1	·36
27	244·26	2·10	58	290·31	1·12	260	404·5	·34
28	246·32	2·04	59	291·42	1·11	270	407·9	·34
29	248·30	1·98	60	292·51	1·09	280	411·2	·33
30	250·23	1·93	65	297·77	1·05	290	414·4	·32
31	252·09	1·86	70	302·71	1·01	300	417·5	·31

Wir führen hier noch die Resultate der neuesten von W. Fairbairn und Tate gemeinschaftlich durchgeführten Versuche über das relative Volumen des gesättigten Wasserdampfes von Pfund zu Pfund (engl.) auf 1 Quadratzoll (engl.) in der folgenden Tabelle bis 250 Pfd. Druck an und bemerken, dass sie aus ihren erhaltenen Resultaten für das relative Volumen v folgende empirische Formel aufstellen:

$$v = 25{\cdot}62 + \frac{49513}{p - {\cdot}72},$$

woraus umgekehrt

$$p = \frac{49513}{v - 25{\cdot}62} + {\cdot}72$$

folgt, und wobei p die betreffende Dampfspannung in (engl.) Zollen der Quecksilbersäule bezeichnet.

Dampfdruck in ℔. auf 1 □Zoll	Relatives Volumen	Dampfdruck in ℔. auf 1 □Zoll	Relatives Volumen	Dampfdruck in ℔. auf 1 □Zoll	Relatives Volumen	Dampfdruck in ℔. auf 1 □Zoll	Relatives Volumen	Dampfdruck in ℔. auf 1 □Zoll	Relatives Volumen
1	17990·6	24	1024·1	47	539·5	70	371·2	93	286·1
2	10357·6	25	984·8	48	529·0	71	366·4	94	283·3
3	7276·6	26	948·4	49	518·6	72	361·7	95	280·6
4	5610·6	27	914·6	50	508·5	73	357·1	96	278·0
5	4568·1	28	883·2	51	499·1	74	352·6	97	275·4
6	3852·6	29	854·0	52	490·1	75	348·3	98	272·8
7	3331·6	30	826·8	53	481·4	76	344·1	99	270·3
8	2936·6	31	801·2	54	472·9	77	340·0	100	267·9
9	2625·4	32	777·2	55	464·7	78	336·0	110	246·0
10	2374·3	33	754·7	56	457·0	79	332·1	120	227·6
11	2167·4	34	733·5	57	449·6	80	328·3	130	212·2
12	1994·0	35	713·4	58	442·4	81	324·6	140	198·9
13	1846·7	36	694·5	59	435·3	82	320·9	150	186·9
14	1719·8	37	676·6	60	428·5	83	317·3	160	177·3
14·7	1641·5								
15	1609·4	38	659·7	61	422·0	84	313·9	170	168·3
16	1512·6	39	643·6	62	415·6	85	310·5	180	160·5
17	1426·9	40	628·2	63	409·4	86	307·2	190	153·3
18	1350·6	41	613·4	64	403·5	87	304·0	200	146·9
19	1282·1	42	599·3	65	397·7	88	300·8	210	141·2
20	1220·0	43	585·9	66	392·1	89	297·7	220	135·9
21	1164·4	44	573·8	67	386·6	90	294·7	230	131·2
22	1113·5	45	561·8	68	381·3	91	291·8	240	126·8
23	1066·9	46	550·4	69	376·1	92	288·9	250	122·7

361. Benützt man (da sich die letzteren Formeln zur Bestimmung von t nicht wohl eignen) die vorige Tabelle zur Bestimmung der den verschiedenen in Atmosphären ausgedrückten Spannkräften des Dampfes entsprechenden Temperaturen, indem man dabei gehörig interpollirt; so erhält man eine der in §. 501 angegebene, in ihren Zahlen jedoch gleichfalls etwas abweichende analoge Tabelle, welche wir ihres öfteren Gebrauches wegen ebenfalls mittheilen wollen.

In dieser Tabelle, welche die Temperaturen des Wasserdampfes für die Expansivkräfte von 1 bis 28 Atmosphären nach Regnault enthält, bezeichnet A die Expansivkraft in Atmosphären, h die entsprechende Höhe der Quecksilbersäule in Meter und t die zugehörige Temperatur in Centigraden.

A.	h m.	t⁰.	A.	h m.	t⁰.	A.	h m.	t⁰.
1	·76	100·0	11	8·36	184·5	21	15·96	215·5
2	1·52	120·6	12	9·12	188·4	22	16·72	217·9
3	2·28	133·9	13	9·88	192·1	23	17·38	220·3
4	3·04	144·0	14	10·64	195·5	24	18·14	222·5
5	3·80	152·2	15	11·40	198·8	25	19·00	224·7
6	4·56	159·2	16	12·16	201·9	26	19·76	226·8
7	5·32	165·3	17	12·92	204·9	27	20·52	228·9
8	6·08	170·8	18	13·68	207·7	28	21·28	230·9
9	6·84	175·8	19	14·44	210·4			
10	7·60	180·3	20	15·20	213·0			

362. Für Temperaturen von 0^0 bis 25^0 fand Regnault das Verhältniss zwischen dem gesättigten Wasserdampf und der atmosphärischen Luft bis auf ·01 constant und zwar gleich ·6221, dagegen bei den höheren Temperaturen die Dichte des Dampfes gegen jene der Luft oder eines Gases von gleichem Drucke überhaupt immer mehr zunehmend. Da diese Beobachtungen in neuester Zeit durch die auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie ausgeführten Rechnungen von Prof. Zeuner ihre volle Bestätigung finden, so kann die von Biot herrührende und von den Physikern bisher allgemein angenommene Tabelle über das specifische Gewicht des Wasserdampfes, welche auf Grundlage der Mariotte'schen, Gay-Lussac'schen, d. i. der Gasgesetze berechnet ist, heute nicht mehr für hinlänglich genau gelten. Wir theilen daher in der nachstehenden Tabelle diese Zeuner'schen Zahlen mit dem Bemerken mit, dass diese in den neuesten von Fairbairn und Tate (Civil. Ingen. August 1860) ausgeführten Versuchen ihre Bestätigung zu erhalten scheinen.

In dieser Tabelle bezeichnet s das Gewicht von 1 Kubikmeter Wasserdampf in Kilogramm, also (wenn man diese Zahlen mit 1000 dividirt) zugleich auch das specifische Gewicht oder die Dichte des gesättigten Dampfes auf Wasser bezogen, so wie $v = \frac{1}{s}$ das 1 Kilogramm wiegende Dampfvolumen in Kubikmeter und t die Temperatur nach Celsius.

t^0.	s kil.	v c. m.	t^0.	s kil.	v c. m.	t^0.	s kil.	v c. m.
0	·0048	207·365	70	·1991	5·0229	140	2·0137	·4966
5	·0067	148·612	75	·2435	4·1059	145	2·2957	·4356
10	·0093	107·787	80	·2960	3·3788	150	2·6082	·3834
15	·0126	79·117	85	·3574	2·7981	155	2·9525	·3387
20	·0170	58·704	90	·4289	2·3313	160	3·3311	·3002
25	·0227	44·028	95	·5119	1·9536	165	3·7467	·2669
30	·0300	33·370	100	·6075	1·6459	170	4·2000	·2381
35	·0391	25·542	105	·7172	1·3942	175	4·6949	·2330
40	·0507	19·736	110	·8426	1·1868	180	5·2328	·1911
45	·0650	15·390	115	·9849	1·0153	185	5·8140	·1720
50	·0826	12·106	120	1·1468	·8720	190	6·4474	·1551
55	·1041	9·6041	125	1·3277	·7532	195	7·1276	·1403
60	·1302	7·6788	130	1·5316	·6529	200	7·8616	·1272
65	·1616	6·1876	135	1·7596	·5638			

Nach dieser Tabelle wäre z. B. das specifische Gewicht des Dampfes bei 0^0, d. i. $s = {}$·0000048 und das relative Volumen $v = 207365$, dagegen nach der bisherigen Biot'schen Tafel: $s = {}$·0000054 und $v = 182323$.

Bei 100^0 wäre nach dieser Tabelle $s = {}$·0006075 und $v = 1645{\cdot}9$; dagegen ist nach Biot: .... $s = {}$·00058955 und $v = 1696$.

Stellen sich daher die in dieser Tabelle angeführten Zahlen durch weitere Versuche als richtig oder nahezu genau heraus, so bedürfen natürlich auch die in Nr. **359** von Pambour benützten Coefficienten n und m, namentlich für Dämpfe von hohem Drucke, eine entsprechende Correctur und Berichtigung, weil nach der obigen Bemerkung die Dichte des Dampfes bei höheren Temperaturen gegen die Biot'sche Tafel in einem grösseren Verhältniss zu-, also das relative Volumen abnimmt. So ist, um mit einer Dampfspannung von 10 Atmosphären die Vergleichung zu machen, nach der bisherigen Annahme nahezu $v = 207$, dagegen nach der vorigen Tabelle $v = 190{\cdot}6$.

Zeuner stellt zur Bestimmung des Volumens v der Gewichtseinheit gesättigten Dampfes von der Temperatur t und Spannung h in Millimeter Quecksilbersäule die Formel auf:

$$v = {\cdot}001 + \frac{949{\cdot}70}{h}\, logn.\, \frac{273 + t}{100}$$

und hält für Spannungen, wie sie bei Dampfmaschinen vorkommen, die Näherungsformel:

$$v = {\cdot}001 + \frac{31{\cdot}18564}{h}\,(32{\cdot}28 + {\cdot}0766\,t)$$

für hinlänglich genau.

Professor Rankine entwickelte im Jahre 1855 eine theoretische Formel für das specifische Gewicht und relative Volumen v des gesättigten Wasserdampfes aus den Gesetzen der latenten Wärme; diese Formel lässt sich in folgender Form darstellen:

$$v = 1 + \frac{772\,[1091{\cdot}7 - {\cdot}7\,(t - 32)]\,(t + 461{\cdot}2)^2}{2{\cdot}3026\,v'p\,[B\,(t + 4612) + 2\,C]}.$$

Dabei ist v' das Volumen von 1 Pfund Wasser bei der Temperatur t (Fahr.), p der Druck des Dampfes von derselben Temperatur auf den (engl.) Quadratfuss in Pfunden, ferner ist $\log B = 3{\cdot}43642$ und $\log C = 5{\cdot}59873$.

So gibt z. B. für $t = 320^0$ ($= 160^0$ C.) die Fairbairn'sche Formel das relative Volumen $v = 295$, die Rankine'sche $v = 301$, die Zeuner-sche $v = 300{\cdot}2$ und die ältere aus den Gasgesetzen abgeleitet $v = 316{\cdot}6$.

Interessant und die Abweichungen des gesättigten Wasserdampfes von den Gasgesetzen auf eine befriedigende Weise erklärend ist die von Résal, *Ingenieur des mines*, ganz kürzlich über die physische Beschaffenheit der Dämpfe aufgestellte und entwickelte Hypothese, aus welcher er mit Zugrundelegung der Versuche von Cahours für die Dichte des Wasserdampfes folgende Formel aufstellt:

$$10^4 \varDelta = 6190 + 565{\cdot}32\,({\cdot}89490)^{\Theta},$$

in welcher $\varDelta$ die Dichte des Dampfes für die Temperatur t, auf jene der Luft bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur bezogen, und Θ den Ueberschuss der Temperatur t über den Siedepunct (wofür diese Formel nur Geltung hat) bezeichnet, also $\Theta = t - 100$ ist.

Für $\Theta = 0$, 7, 10, 20, 30, 50, 100 und 150 folgt daraus beziehungsweise:

$$\varDelta = {\cdot}6755,\ {\cdot}6450,\ {\cdot}6370,\ {\cdot}6252,\ {\cdot}6210,\ {\cdot}6195,\ {\cdot}6190,\ {\cdot}6190.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Dampf durchaus einen constanten, und zwar den Druck Einer Atmosphäre besitzt, dieser also bei $t = 100^0$ gesättigt sei oder sich im Maximum seiner Spannung befinde und von da an um Θ^0 überhitzt und dadurch immer trockener werde. Diese letztere Reihe zeigt, dass sich die Dichte des Dampfes bei steigender Temperatur der constanten Grenze ·6190 nähert.

Aus dem Umstande, dass die Dichte des Dampfes gegen jene der Luft mit der Zunahme der Temperatur immer mehr abnimmt und sich immer mehr der Natur permanenter Gase nähert, glaubt Clausius die Dichte des Dampfes bei 0^0 mit ·622 annehmen zu dürfen, eine Annahme, welche auch durch die Versuche von Regnault und Cahours in so ferne bestätigt wird, als sie für Dämpfe von 1 Atmosphäre Spannung und eine Ueberhitzung von 50^0 bis 100^0 die Dichten ·6192 und ·6182 gefunden haben, und der gesättigte Dampf bei 0^0 eigentlich noch kein permanentes Gas bildet.

363. Im Zusammenhange mit diesen neueren Resultaten über Wasserdämpfe müssen wir auch noch auf die bisher grösstentheils angenommene und im §. 507 des Compendiums aufgenommene Hypothese, nach welcher die in jedem gesättigten Dampfe enthaltene Gesammtwärme constant ist und nahe 640 Wärmeeinheiten beträgt, hier zurückkommen und bemerken, dass sich diese Hypothese nunmehr nach den Regnault'schen Versuchen und den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie als unzulässig erweist.

Ist nämlich Q die gesammte Wärme, welche der Gewichtseinheit, d. i. wenn wir ganz einfach das metrische Mass voraussetzen, 1 Kilogramm Wasser von 0^0 mitgetheilt werden muss, um dasselbe unter dem der Temperatur t entsprechenden Drucke h, in Millimeter der Quecksilbersäule oder p Kilogramme auf 1 Quadratmeter, welchen der daraus erzeugte Dampf haben soll, von 0 bis t^0 zu erwärmen; so ist nach Regnault's Versuchen:

$$Q = 606{\cdot}5 + {\cdot}305\,t \ldots (\alpha).$$

Die durch diese Formel ausgedrückte Wärme Q enthält nun 1. jene Wärme W, welche das flüssige Wasser von 0 bis t^0 aufnimmt; 2. die zur Aenderung der Aggregatsform, d. i. zur Dampfbildung nöthige sogenannte latente oder nach Clausius „Verdampfungs-Wärme" L. Diese letztere besteht aber selbst wieder a) aus jenem Antheile R, welcher für die Arbeit zur Ausdehnung des Dampfes oder der unter dem constanten Drucke p stattfindenden Volumsveränderung verbraucht wird, und b) aus der Wärmemenge l, welche sich bei der genannten Temperatur t im Dampfe mehr als im Wasser (von derselben Temperatur) vorfindet. Hiernach ist also:

$$Q = W + L \ldots (\alpha'), \quad L = R + l, \quad \text{also auch } Q = W + R + l.$$

Um den Vorgang dabei besser zu versinnlichen, denke man sich 1 Kilogramm Wasser von 0^0 in einem mit einem beweglichen Kolben versehenen Cylinder von 1 Quadratmeter Querschnitt enthalten und den Kolben mit p Kilogramm belastet; man führe jetzt dieser Wassermenge von Aussen so lange Wärme zu, bis es, ohne dass sich noch Dampf bilde, die Temperatur t, welche der zu erzeugende Dampf haben soll, erreicht hat, und sei W die hiezu nöthige Wärmemenge. Fährt man nun fort, diesem bereits auf t^0 erwärmten Wasser noch weitere Wärme zuzuführen, so beginnt, ohne Erhöhung der Temperatur, die Dampfbildung unter dem constanten Drucke p und es wird dabei der Kolben so lange fortgeschoben, bis das sämmtliche Wasser in solchen Dampf (von der Spannung p und Temperatur t) verwandelt und sonach der hier betrachtete Vorgang zu Ende ist.

Bezeichnet man nun die Wärme, welche man dem Wasser von der Temperatur t^0 während der Dampfbildung bei constantem Drucke p zuführen muss, mit L, so ist die Gesammtwärme, welche das Wasser von 0^0 bis dahin aufgenommen hat, $Q = W + L$, und es ist eben diese Wärme, für welche Regnault den oben angegebenen Werth (α) gefunden hat.

Aus diesem (übrigens noch mehrfacher Aenderung fähigem) Verfahren ist nun auch deutlich zu ersehen, dass in der Wärmemenge L nicht nur jene im Dampfe noch wirklich vorfindliche latente Wärme l, sondern auch jene Wärmemenge R enthalten ist, welche die genannte Arbeit (Vorschieben des Kolbens) bewirkt hat und mithin verbraucht wurde.

Auf Grundlage des von Regnault angegebenen Ausdruckes für die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke (Nr. **298**), nämlich $c = 1 + {\cdot}00004\,t + {\cdot}0000009\,t^2$, erhält man aus dem Ausdrucke:

$$W = \int_0^t c\,dt \ldots (a)$$

für die obige Wärmemenge W:

$$W = t + {\cdot}00002\,t^2 + {\cdot}0000003\,t^3 \ldots (\beta)$$

und sonach für die Verdampfungswärme $L = Q - W$, wenn man für Q und W die Werthe aus (α) und (β) setzt:

$$L = 606{\cdot}5 - {\cdot}695\,t - {\cdot}00002\,t^2 - {\cdot}0000003\,t^3.$$

Um jedoch für diese Wärmemenge L einen einfachen und dennoch genügenden Näherungswerth zu erhalten, nimmt Clausius für c einen constanten Mittelwerth, und zwar jenen $c = 1{\cdot}013$ für $t = 100^0$, wodurch

$$W = 1{\cdot}013\,t \ldots (\beta')$$

und wegen Relat. (α) und (α') $L = 606{\cdot}5 - {\cdot}708\,t$ wird.

Clausius setzt jedoch mit Rücksicht auf den von Regnault für $t = 100^0$ gefundenen genauern Werth von $L = 536{\cdot}2$ (die vorige Formel gibt $535{\cdot}7$) dafür:

$$L = 607 - {\cdot}708\,t \ldots (\gamma).$$

Was endlich die während der erwähnten Dampfbildung in Arbeit umgesetzte und daher aus der Gesammtwärme Q verschwundene Wärme R anbelangt, so ist, wenn $A = \frac{1}{424}$ (statt der Zahl $423{\cdot}893$ in Nr. **306**, Anmerk., die ganze Zahl 424 gesetzt) das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit und V den Volumenunterschied zwischen dem Wasservolumen v' und jenem v des daraus gebildeten Dampfes bezeichnet (also $V = v - v'$ ist), sofort diese verrichtete Arbeit $= pV$, folglich:

$$R = ApV \ldots (\gamma').$$

Nach Zeuner's Berechnung lässt sich R mit grosser Genauigkeit durch die Formel:

$$R = 30{\cdot}456\ logn.\ \frac{T}{100} \ldots (\delta)$$

bestimmen, in welcher $T = 273 + t$ die absolute Temperatur (Nr. **307**) bezeichnet.

Nach der vorigen Bemerkung ist daher die im Dampfe zurückgebliebene Wärme:

$$q = Q - R = 606{\cdot}5 + {\cdot}305\,t - 30{\cdot}456\ logn.\ \frac{273 + t}{100} \ldots (\delta').$$

Für die eigentliche latente Wärme hat man:

$$l = L - R = q - W \ldots (\varepsilon).$$

Endlich ist das Dampfvolumen bei der Temperatur t in Kubikmeter ausgedrückt:

$$v = V + v',$$

dabei kann das Wasservolumen v', mit Vernachlässigung der eigenen sehr geringen Ausdehnung mit ${\cdot}001$ Kubikmeter angenommen werden.

Das Dampfvolumen V erhält man aus der Relation:

$$V = 424 \cdot \frac{R}{p} = 31{\cdot}18564\,\frac{R}{h},$$

wobei h die Dampfspannung in Millimeter der Quecksilbersäule angibt, weil der Druck einer solchen Säule von 1 Millimeter auf 1 Quadratmeter 13·596 Kilogramm beträgt.

Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass Zeuner den oben für die Wärme W angegebenen Regnault'schen Ausdruck (β) durch den eben so genauen einfacheren:

$$W = 30{\cdot}59 + 1{\cdot}100\,t - R \ldots (\varepsilon')$$

ersetzt, wobei R den obigen Werth in (δ) hat.

364. In der nachstehenden Tabelle geben wir der leichtern Uebersicht wegen innerhalb der Grenzen von 0° bis 200° C. von 5 zu 5 Grad die in der vorhergehenden Nummer erörterten Werthe von der Gesammtwärme Q, der Verdampfungswärme L, der latenten Wärme l, welche im Dampfe mehr als im Wasser enthalten ist, und der während der Dampfbildung in Arbeit umgesetzten Wärme R.

t^0.	Q	L	l	R	q
0	606·50	607·00	576·41	30·59	575·91
5	608·02	603·46	572·32	31·14	576·88
10	609·55	599·92	568·24	31·68	577·87
15	611·07	596·38	564·16	32·22	578·85
20	612·60	592·84	560·10	32·74	579·86
25	614·12	589·30	556·05	33·25	580·87
30	615·65	585·76	552·00	33·76	581·89
35	617·17	582·22	547·96	34·26	582·91
40	618·70	578·68	543·93	34·75	583·95
45	620·22	575·14	539·91	35·23	584·99
50	621·75	571·60	535·99	35·71	586·04
55	623·27	568·06	531·88	36·18	587·09
60	624·80	564·52	527·88	36·64	588·16
65	626·32	560·98	523·89	37·09	589·23
70	627·85	557·44	519·90	37·54	590·31
75	629·37	553·90	515·92	37·98	591·39
80	630·90	550·36	511·95	38·41	592·49
85	632·42	546·82	507·98	38·84	593·58
90	633·95	543·28	504·02	39·26	594·69
95	635·47	539·74	500·06	39·68	595·79
100	637·00	536·20	496·11	40·09	596·91
105	638·52	532·66	492·16	40·50	598·02
110	640·05	529·12	488·22	40·90	599·15
115	641·57	525·58	484·29	41·29	600·28
120	643·10	522·04	480·36	41·68	601·42
125	644·62	518·50	476·44	42·06	602·56
130	646·15	514·96	472·51	42·45	603·70
135	647·67	511·42	468·60	42·82	604·85
140	649·20	507·88	464·69	43·19	606·01

t^0.	Q	L	l	R	q
145	650·72	504·34	460·78	43·56	607·16
150	652·25	500·80	456·88	43·92	608·33
155	653·77	497·26	452·98	44·28	609·49
160	655·30	493·72	449·09	44·63	610·67
165	656·82	490·18	445·20	44·98	611·84
170	658·35	486·64	441·31	45·33	613·02
175	659·87	483·10	437·43	45·67	614·20
180	661·40	479·56	433·55	46·01	615·39
185	662·92	476·02	429·68	46·34	616·58
190	664·45	472·48	425·80	46·68	617·77
195	665·97	468·94	421·94	47·00	618·97
200	667·45	465·40	418·08	47·32	620·13

Aus dieser Tabelle ersieht man nun ganz einfach, dass, um z. B. aus 1 Kilogramm Wasser von 0° Dampf von 100°, d. i. von 1 Atmosphäre Spannung (und zwar in der angedeuteten Weise) zu erzeugen, nach der 2. Columne eine Wärmemenge von 637 Calorien erforderlich ist, und zwar wurde zuerst das Wasser von 0 bis 100° erwärmt; von da an begann die Dampfbildung mit einem Wärmeaufwand (Col. 3) von 536·20 Calorien, folglich wurden 637 — 536·2 = 100·8 Calorien zu dieser ersten Erwärmung des Wassers von 0 auf 100° verwendet. Nach der 5. Columne wurden während der Verdampfung des Wassers 40·09 Calorien in Arbeit umgewandelt, so, dass sich also die Arbeit der Gewichtseinheit (hier 1 Kilogramm) Dampf von 100° mit 424 × 40·09 = 16998 Kilogramm-Meter, oder zu $226\frac{1}{2}$ Pferdekräfte herausstellt.

Endlich gibt die 6. Columne den Rest, d. i. die noch im Dampfe enthaltene Wärme, mit 596·83 Calorien.

Auf ähnliche Weise gibt die Tabelle auch für die übrigen darin aufgenommenen Temperaturen des Dampfes die nöthigen Auskünfte.

365. Um endlich auf die Berechnung der Dampfmaschinen nach der Pambour'schen Theorie zurückzukommen, beziehen wir uns auf die oben in Nr. **359** aufgestellte Relation (1) zwischen der Spannung oder dem Drucke p und dem relativen Volumen v des Dampfes, wornach also, wenn ein gewisses Volumen Wasser S unter dem Drucke p in Dampf verwandelt wird, dessen absolutes Volumen $= M$ ist, sofort:

$$\frac{M}{S} = v = \frac{m}{n+p} \ldots (\alpha),$$

und wenn dasselbe Wasservolumen in Dampf vom Drucke p' verwandelt wird und dessen absolutes Volumen $= M'$ ist, sofort auch

$$\frac{M'}{S} = \frac{m}{n+p'}, \text{ folglich } M' = \left(\frac{n+p}{n+p'}\right) M \ldots (a)$$

stattfindet, aus welcher letztern Relation auch noch

$$p' = \frac{M}{M'}(n+p) - n \ldots (b)$$

folgt.

Ist nun P' der Druck des Dampfes im Cylinder, und zwar auf die Flächeneinheit des Kolbens, Q der von Seite der Last auf dieselbe Fläche entfallende, vom Kolben zu überwindende Widerstand, S das Volumen Wasser, welches im Kessel unter dem Drucke P in der Zeiteinheit in Dampf verwandelt wird, v das relative, folglich vS das absolute Volumen dieses Dampfes, welcher also in der Zeiteinheit erzeugt wird und die Spannung P besitzt, und zufolge der vorigen Relation (a) im Cylinder, wo er den im Allgemeinen geringern Druck P' annimmt, in das Volumen:

$$\left(\frac{n+P}{n+P'}\right) vS$$

übergeht, ferner V die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens, so wie F dessen Fläche; so hat man nach den von Pambour zum Grunde gelegten (unangreifbaren) Sätzen, nach welchen sich, sobald in dem Gange der Maschine der Beharrungsstand eingetreten, 1. zwischen dem Dampfdruck auf den Kolben und dem von diesem letztern zu überwindenden Widerstande das dynamische Gleichgewicht bestehen, und 2. die verbrauchte der erzeugten Dampfmenge gleich sein muss, sofort die beiden Grundgleichungen:

$$P' = Q \ldots (1) \text{ und } FV = \frac{S}{n+P'} \ldots (2),$$

aus denen sich noch ganz einfach die drei folgenden ergeben:

$$V = \frac{S}{F(n+Q)} \ldots (3),\quad Q = \frac{S}{FV} - n \ldots (4) \text{ und } S = FV(n+Q) \ldots (5).$$

Diese Relationen voraussetzend, können wir jetzt auf die einzelnen Systeme der Dampfmaschinen übergehen.

Woolf'sche Maschine.

366. Es sei, um sogleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, in dem Woolf'schen Systeme, welches in der neuesten Zeit wieder besondere Aufnahme findet, P der Dampfdruck (auf die Flächeneinheit) im Kessel, P' der Druck, welchen derselbe beim Eintritt in den kleinen Cylinder A (Fig. 169) vor der Absperrung annimmt, l der Kolbenlauf im kleinen, L jener im grossen

Cylinder B, a der freie (lineare) Raum im erstern, A jener im grossen Cylinder, f die Fläche des kleinen, F jene des grossen Kolbens, so wie endlich l' der Weg, welchen der kleine Kolben bei offener Communication, d. h. bis zur Absperrung zurücklegt.

Um nun zuerst die Arbeit von Seite der Kraft während eines Ganges des kleinen Kolbens zu finden, so habe dieser bereits den Weg $x > l'$ zurückgelegt, in welchem Augenblicke der Dampfdruck $= z$ sein soll, und da man diesen Druck während des Weiterrückens des Kolbens um dx als constant ansehen kann, so ist die diesem Weg entsprechende Wirkung $dw = fz\,dx$, oder da nach der Relation (b) der vorigen Nr. $z = \frac{l'+a}{x+a}(n+P') - n$ ist, auch:

$$dw = f(l'+a)(n+P')\frac{dx}{x+a} - fn\,dx.$$

Dieser Ausdruck von $x = l'$ bis $x = l$ integrirt, gibt zuerst die während der Expansion des Dampfes ausgeübte Wirkung oder Arbeit, und zwar wird

$$w = f(l'+a)(n+P')\,logn.\left(\frac{l+a}{l'+a}\right) - nf(l-l').$$

Da ferner $w' = fP'l'$ die Arbeit des Kolbens vor der Absperrung ausdrückt, so hat man für die Arbeit während eines Laufes des kleinen Kolbens $W_1 = w + w'$, oder wenn man substituirt und reducirt:

$$W_1 = f(l'+a)(n+P')\left[\frac{l'}{l'+a} + logn.\frac{l+a}{l'+a}\right] - nfl \ldots (c).$$

367. Um ferner die Arbeitsgrösse des grossen Kolbens während seines Laufes L zu bestimmen, welcher in derselben Zeit Statt findet, in welcher der kleine Kolben den Weg l zurücklegt, wollen wir annehmen, dass beide Kolben eben herabgehen, und wieder jenen Zeitmoment betrachten, in welchem der kleine Kolben den Weg $x > l'$, also der grosse jenen $\frac{L}{l}x$ (aus $l : L = x : \frac{L}{l}x$), oder, wenn man Kürze halber $\frac{L}{l} = s$ setzt, jenen sx zurückgelegt hat. In diesem Augenblicke nimmt der Dampf, welcher den Raum $f(l'+a)$ einnahm und die Spannung P' besass, unter dem kleinen und über dem grossen Kolben zusammengenommen den Raum $f(l+a-x) + F(sx+A) = (Fs-f)x + AF + (l+a)f = Bx + C$ ein, wenn man nämlich Kürze halber den Coefficienten von x, d. i. $Fs - f = B$ und den constanten Theil $AF + f(l + a) = C$ setzt. Ist nun die Spannkraft des Dampfes in diesem Augenblicke $= y$, so ist nach Relation (b) (Nr. **365**):

$$y = \frac{f(l' + a)}{Bx + C}(n + P') - n$$

als Druck des Dampfes auf den grossen Kolben, welcher während des Weges von dx des kleinen oder $s\,dx$ des grossen Kolbens als constant angesehen werden kann, wodurch die entsprechende Wirkung

$$dw'' = Fys\,dx = sf(l' + a)(n + P')\frac{F\,dx}{Bx + C} - nFs\,dx$$

wird. Integrirt man diesen Ausdruck von $x = 0$ bis $x = l$ (oder von $sx = 0$ bis $sx = L$), so erhält man als Wirkung oder Arbeit des grossen Kolbens während eines vollen Ganges (wenn man gleich für s den Werth $\frac{L}{l}$ herstellt):

$$w'' = f(l' + a)(n + P')\frac{FL}{Bl}\,logn.\left(\frac{Bl + C}{C}\right) - nFL.$$

Die Gesammtwirkung beider Kolben ist also während eines Kolbenlaufes:

$$W = W_1 + w'' = w + w' + w'',$$

wobei die drei einzelnen Wirkungsgrössen die in dieser und der vorigen Nummer angegebenen Werthe besitzen.

368. Um nun auch die Arbeit von Seite der Last oder des Widerstandes auszudrücken, so muss zuerst bemerkt werden, dass der Dampf von der Spannkraft y, welcher auf den grossen Kolben als bewegende Kraft drückt, dem kleinen Kolben entgegenwirkt, so, dass man den vorigen Werth von y nur mit $f\,dx$ multipliciren und von $x = 0$ bis $x = l$ integriren darf, um die betreffende Wirkungsgrösse während eines Kolbenganges zu erhalten; bezeichnet man diese mit w_1, so ist sofort:

$$w_1 = f(l' + a)(n + P')\int_0^l \frac{f\,dx}{Bx + C} - nf\int_0^l dx,$$

d. i.

$$w_1 = f(l' + a)(n + P')\frac{f}{B}\,logn.\left(\frac{Bl + C}{C}\right) - nfl.$$

Ist p der mittlere Druck auf die Flächeneinheit des grösseren

Kolbens von Seite des Condensators her, so ist die betreffende Wirkungsgrösse während eines Kolbenganges:

$$w_2 = FpL.$$

Bezeichnet man ferner den nützlichen Widerstand oder die Nutzlast mit Q und den Weg, um welchen diese während eines Kolbenlaufes bewegt wird, durch h, so ist die diesfällige Wirkungsgrösse:

$$w_3 = Qh.$$

Zerlegt man die bei der leeren Maschine vorkommende Reibung in zwei Theile und bezeichnet die auf die Flächeneinheit des kleinen Kolbens entfallende durch k, so wie jene, welche auf die Flächeneinheit des grösseren Kolbens bezogen werden kann, durch K; so ist der betreffende Reibungswiderstand während eines Kolbenganges:

$$w_4 = kfl + KFL.$$

Ist endlich δ die auf die Einheit der Last Q bezogene additionelle Reibung, so entsteht von daher noch die Wirkungsgrösse:

$$w_5 = \delta Qh.$$

Die gesammte Arbeitsgrösse aller dieser Widerstände mit Einschluss der Nutzlast ist daher:

$$W' = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

und da, sobald der Beharrungszustand oder das dynamische Gleichgewicht in der Maschine eingetreten, $W = W'$ sein muss (Nr. **365**, Relat. 1); so hat man nach gehöriger Substitution (mit der Herstellung der Werthe von B und C) und einer einfachen Reduction, für die erste der beiden Hauptrelationen:

$$f(l' + a)(n + P')\left[\frac{l'}{l' + a} + logn.\left(\frac{l + a}{l' + a}\right) + logn.\frac{F(L + A) + fa}{f(l + a) + FA}\right] -$$
$$- nFL = (1 + \delta)\,Qh + kfl + KFL + pFL \ldots (I).$$

369. Um nun auch die zweite Hauptrelation (Nr. **365**, Relat. 2) zu erhalten, sei S das in der Zeiteinheit effectiv verdampfte Wasservolumen im Kessel, also (Nr. **365**, Relation (α)) $M = \frac{mS}{n + P'}$ das absolute Volumen des daraus erzeugten Dampfes unter dem Drucke P', unter welchem er in den kleinen Cylinder eintritt; so ist, wenn man die mittlere Geschwindigkeit des kleinen Kolbens mit v bezeichnet, die in der Zeiteinheit verbrauchte oder in den kleinen Cylinder tretende Dampfmenge (vom Drucke P') $= \frac{v}{l} f(l' + a)$, folglich diese zweite Hauptrelation:

$$\frac{mS}{n + P'} = \frac{v}{l} f(l' + a) \ldots (II).$$

370. Eliminirt man aus diesen beiden Relationen (I) und (II) den Druck P', so erhält man für die mittlere Geschwindigkeit des kleinen Kolbens:

$$v = \frac{l}{L} \cdot \frac{S}{F} \frac{mN}{n + \frac{1}{FL}[(1+\delta) Qh + kfl + KFL + pFL]} \ldots (1),$$

wenn man nämlich der Kürze wegen das in der grossen Klammer stehende Trinom des Ausdruckes (I) mit N bezeichnet, d. i.

$$N = \frac{l'}{l' + a} + logn. \left(\frac{l + a}{l' + a}\right) + logn. \frac{F(L + A) + fa}{f(l + a) + FA} \ldots (\alpha)$$

setzt.

Bezeichnet man ferner die Geschwindigkeit des grossen Kolbens mit v', so wie jene der Nutzlast Q mit V; so ist wegen $v : v' : V = l : L : h$ sofort:

$$v' = \frac{L}{l} v \ldots (2) \text{ und } V = \frac{h}{l} v \ldots (3),$$

wobei man für v den Werth aus der vorigen Gleichung (1) zu setzen hat.

371. Man erhält aus dieser letzten Relation (3), wenn man für v den Werth setzt, zugleich auch die für die Praxis wichtigen Werthe von Q, S und E, wenn E den Nutzeffect der Maschine bezeichnet; es ist nämlich ganz einfach für den Fall einer beliebigen Nutzlast oder einer beliebigen Geschwindigkeit bei einem gegebenen Expansions- oder Absperrungsverhältniss:

$$V = \frac{h}{L} \cdot \frac{S}{F} \frac{mN}{n + \frac{1}{FL}[(1+\delta) Qh + kfl + KFL + pFL]} \ldots (4),$$

$$Q = \frac{mSN}{(1+\delta)V} - n\frac{FL}{(1+\delta)h} - \frac{kfl + KFL + pFL}{(1+\delta)h} \ldots (5),$$

$$S = \frac{L}{h} \cdot \frac{FV}{mN} \left\{ n + \frac{1}{FL}\left[(1+\delta) Qh + kfl + KFL + pFL\right]\right\} \ldots (6),$$

$$E = QV = \frac{mSN}{1+\delta} - V\left[n\frac{FL}{(1+\delta)h} + \frac{kfl + KFL + pFL}{(1+\delta)h}\right] \ldots (7),$$

wenn man nämlich den Ausdruck (5) mit V multiplicirt.

372. Dieser letztere Ausdruck zeigt wieder (wie in §. 548, Anmerk.), dass der Nutzeffect am grössten wird, wenn V seinen kleinsten Werth erreicht, und dies findet zufolge der obigen Relationen (3) (Nr. **370**) und (II) (Nr. **369**) für den grössten Werth von P', d. i. für $P' = P$ Statt. Bezeichnet man daher die betreffenden Werthe von V und Q in diesem Falle mit V' und Q', so hat man für das Maximum des Nutzeffectes, bei einem gegebenen Expansionsverhältniss:

$$V' = \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{l'+a} \cdot \frac{S}{f} \cdot \frac{m}{n+P} \ldots (8)$$

(nämlich aus den beiden genannten Relationen 3 und II),

$$Q' = \frac{mSN}{(1+\delta)V'} - n\frac{FL}{(1+\delta)h} - \frac{kfl + KFL + pFL}{(1+\delta)h} \ldots (9)$$

(aus der Relation 5),

$$S = \frac{l}{h} \cdot \frac{l'+a}{l} \cdot \frac{fV'}{m}(n+P) \ldots (10)$$

(aus der Relat. 8) und

$$E_{max.} = Q'V' \ldots (11).$$

373. Nimmt man endlich das Expansions- oder Absperrungsverhältniss nicht als gegeben an und sucht jenes Verhältniss $\frac{l'}{l}$, bei welchem das absolute Maximum des Nutzeffectes eintritt; so erhält man nach der bekannten Regel, aus der vorigen Gleichung (11), wenn man für Q' und V' die Werthe setzt, nach einer einfachen Reduction:

$$\frac{dE}{dl'} = 0 = -l' + \frac{nFL + kfl + KFL + pFL}{f(n+P)}$$

und daraus:

$$\frac{l'}{l} = \frac{FL}{fl} \cdot \frac{n + \frac{1}{FL}(kfl + KFL + pFL)}{n+P} \ldots (12)$$

für das gesuchte Absperrungsverhältniss, welches in der That einem Maximum entspricht, indem dafür der zweite Differenzialquotient negativ ausfällt.

Anmerkung. Die diesem absoluten Maximum entsprechende Nutzlast ist übrigens keineswegs die grösste nützliche Last, welche die Maschine überwinden kann; denn sucht man aus der Gleichung (9) (mit Substituirung der Werthe von N und V') den Differenzialquotienten von Q' in Beziehung auf l', so erhält man ganz einfach:

$$\frac{dQ'}{dl'} = 0 = logn.\left(\frac{l+a}{l'+a}\right)$$

also $$\frac{l+a}{l'+a} = 1, \text{ d. i. } l' = l,$$

d. h. die Maschine muss (wie dies auch à priori erhellet), um die grösstmögliche Nutzlast bewegen oder überwinden zu können, ohne Expansion arbeiten (wobei jedoch der Dampfverbrauch in einem grösseren Verhältniss als der Nutzeffect zunimmt).

Die vorige Relation (12) findet übrigens, wie sich von selbst versteht, in jenem Falle keine Anwendung, in welchem der Dampf im kleinen Cylinder ohne Expansion arbeitet, weil dann $l' = l$ ist.

374. Um die bisher entwickelten Formeln practisch anwendbar zu machen, müssen noch die constanten Grössen k, K, δ, p, a, A, m, n bestimmt oder angegeben werden.

Was zuerst die Reibung der Maschine betrifft, so können wir die von Pambour bei den Watt'schen doppelt wirkenden Condensationsmaschinen gemachten Erfahrungen auch hier benützen und anwenden. Nach diesen Erfahrungen beträgt die Reibung bei solchen Maschinen von mittlerer Grösse, nämlich bei einem Cylinderdurchmesser von 33 Zoll oder 2·75 Fuss, wenn sie leer gehen oder unbelastet sind, im Mittel ·75 Pfund auf den Quadratzoll oder 144 × ·75 Pfd. auf den Quadratfuss der Kolbenfläche bezogen, nach englischem Mass und Gewicht, und wächst im umgekehrten Verhältnisse mit dem Durchmesser des Cylinders, so, dass wenn bei einer ähnlichen Maschine der Cylinderdurchmesser in Fussen genommen $= d$ ist, sofort auf englisches Mass bezogen, die auf jeden Quadratfuss der Kolbenfläche entfallende Reibung nahe durch $\frac{300}{d}$ Pfund ausgedrückt werden kann. Auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen kann man dafür in runder Zahl $\frac{260}{d}$ setzen. (Der genaue Werth ist etwas kleiner und zwar $= \frac{252}{d}$.)

Nimmt man daher zur grösseren Sicherheit an, dass bei den Woolf'schen Maschinen jeder der beiden Cylinder nahe dieselben Theile zu bewegen habe, wie bei den Watt'schen Maschinen der eine Cylinder; so kann man nach diesen Bemerkungen

$$k = \frac{260}{d} \text{ und } K = \frac{260}{D}$$

setzen, wenn d und D die in Fussen ausgedrückten Durchmesser des kleinen und grossen Kolbens, folglich k und K die in Pfunden ausgedrückten Reibungen der Maschine, auf jeden Quadratfuss der beiden Kolbenflächen bezogen, bezeichnen.

Was ferner die additionelle Reibung der belasteten Maschine betrifft, so kann man auch hier (wie in §. 551) $\delta = \cdot 14$ setzen.

Den von Pambour von Seite des Condensators herrührenden und auf den Quadratfuss der Kolbenfläche bezogenen mittleren Widerstand von 4×144 Pfund kann man, auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, in runder Zahl zu 500 Pfund annehmen, also $p = 500$ setzen.

Eben so setzt man auch hier (wie in §. 551) $a = \cdot 05\, l$ und $A = \cdot 05\, L$, so wie endlich, da man es mit Condensationsmaschinen zu thun hat (Nr. **359**, Relat. (b)):

$$m = 3568525 \text{ und } n = 214.$$

Schliesslich kann man sich zur numerischen Berechnung der in dem Ausdrucke N (in Nr. **370**) vorkommenden Grösse

$$\frac{l'}{l' + a} + logn.\left(\frac{l + a}{l' + a}\right)$$

der im Compendium auf S. 583 und 584 angegebenen Tabelle, in welcher l und L mit l' und l zu vertauschen sind, bedienen, sonst muss man $logn.\left(\frac{l+a}{l'+a}\right) = 2\cdot 302585\, logv.\left(\frac{l+a}{l'+a}\right)$ mit Hilfe einer gewöhnlichen Logarithmentafel berechnen.

375. Zur Erläuterung der obigen Formeln mögen die nachstehenden Beispiele dienen.

Beispiel 1. Es habe bei einer Woolf'schen Maschine der kleine Cylinder einen Durchmesser von 2 und einen Kolbenlauf von 6 Fuss, der grosse Cylinder einen Durchmesser von $3\frac{1}{3}$ und einen Kolbenlauf von 8 Fuss, der Dampf trete in den kleinen Cylinder, ohne darin expandirt zu werden, mit einem Drucke von 22·42 Pfund auf den Quadratzoll, d. i. von nahe $1\frac{3}{4}$ Atmosphären, das per Minute effective in Dampf verwandelte Wasservolumen betrage 1 Kubikfuss, so wie der Weg, welchen die Nutzlast während eines Kolbenlaufes zurücklegt, 2 Fuss; so hat man $d = 2$, also $f = \frac{1}{4}\pi d^2 = 3\cdot 1416$, $D = \frac{10}{3}$, also $F = 8\cdot 7266$, $l = 6$, $L = 8$ (folglich der Inhalt des grossen Cylinders, wie gewöhnlich nahe 4, hier nämlich 3·7 Mal so gross als der kleine), $l' = l = 6$, $P = 22\cdot 42 \times 144 = 3228$, $S = 1$ und $h = 2$; ferner ist $a = \cdot 05\, l = \cdot 30$,

$A = \cdot 05 L = \cdot 40$, $k = \frac{260}{d} = 130$, $K = \frac{260}{D} = 78$ und wie bereits bemerkt, $m = 3568525$, $n = 214$, $p = 500$, $\delta = \cdot 14$.

Mit diesen Werthen folgt zuerst aus der Relation (α) in Nr. **370** $N = 2\cdot 1120$, und damit für den grössten Effect dieser Maschine aus den Relationen (8), (9) und (11) in Nr. **372**:

$$V' = 104\cdot 765 \text{ Fuss per Min.}, \; Q' = 37774\cdot 76 \text{ Pf. und}$$
$$E_{max.} = 3957474\cdot 54 \text{ Fusspfund per Min.}$$

oder auf die Secunde bezogen, und wenn $N_{Pf.}$ die Anzahl der Pferdekräfte bezeichnet, auch:

$$V' = 1\cdot 746 \text{ F. und } E_{max.} = 65957\cdot 91^{F.\,Pf.} \text{ oder } N_{Pf.} = \frac{E}{430} = 153\cdot 39.$$

Aus den Relationen (3) und (2) in Nr. **370** folgt auch noch für die Geschwindigkeit des kleinen Kolbens:

$$v = \frac{l}{h} V' = 3 \times 1\cdot 746 = 5\cdot 238$$

und für jene des grösseren:

$$v' = \frac{L}{l} v = \tfrac{4}{3} \times 5\cdot 238 = 6\cdot 984$$

Fuss per Secunde, so dass also die Maschine per Minute $50\cdot 64$ einfache Kolbengänge macht.

Anmerkung. Wird dasselbe Beispiel nach der ältern Theorie gerechnet, so erhält man zuerst nach der Formel (r) in Nr. **358** für die Wirkung während eines Kolbenganges $W = 105608\cdot 2^{F.\,Pf.}$ und da per Secunde $\frac{50\cdot 64}{60}$ solcher Kolbengänge Statt finden, so ist der Effect per Secunde:

$$E = \frac{50\cdot 64}{60} \times 105608\cdot 2 = 89133\cdot 4^{F.\,Pf.}$$

Es müsste also dieser Werth mit dem Coefficienten $\cdot 74$ multiplicirt werden, um die vorige Zahl 65238 der Pambour'schen Theorie zu erhalten.

Beispiel 2. Berechnet man das vorige Beispiel nochmals, mit der einzigen Aenderung, dass die Communication des Dampfzutrittes in den kleinen Cylinder nach dem halben Kolbenschub unterbrochen oder abgesperrt wird; so hat man mit Beibehaltung aller übrigen Werthe $l' = 3$, also $\frac{l'}{l} = \frac{1}{2}$ zu setzen, womit man $N = 2\cdot 7153$ und damit $V' = 200\cdot 006$, $Q' = 17171\cdot 517$ und

$$E_{max.} = 3434407\cdot 05 \text{ oder } N_{Pf.} = 133\cdot 12 \text{ erhält.}$$

Beispiel 3. Sucht man zur Erreichung des absoluten Maximums zuerst nach der Relation (12) (Nr. **373**) das günstigste Expansions- oder Absperrungsverhältniss, so erhält man dafür $\frac{l'}{l} = \cdot 8900$, also $l' = \cdot 8900 \times 6 = 5\cdot 3399$ und damit $N = 2\cdot 2172$, $V' = 117\cdot 027$, $Q' = 33980\cdot 28$ und $E_{max.} = 3976617\cdot 43$ oder in Pferdekräften $N_{Pf.} = 154\cdot 13$.

Anmerkung. Da man bei der Berechnung von Dampfmaschinen zur Zeiteinheit die Minute nimmt, so heisst in der Praxis der Effect eines Pferdes in einer Minute auch Pferdekraft per Minute und wird bei den Engländern mit 33000 Pfd. 1 Fuss hoch, bei den Franzosen (davon etwas verschieden und nahe um $1\frac{1}{4}$ Procent kleiner) mit 4500 Kilogramme 1 Meter hoch, und in Oesterreich (nahe mit der englischen Annahme übereinstimmend) zu 25800 Pfund 1 Fuss hoch gerechnet. Unter dem Ausdrucke Pferdekraft per Stunde, wie er manchmal in den Werkstätten gebraucht wird, versteht man den vorigen Effect 60 Mal genommen.

Werden nun in dieser Zeiteinheit, d. i. per Minute R Pfunde Brennstoff consumirt, so ist der Nutzeffect für 1 Pfund verbrauchten Brennstoffes:

$$E' = \frac{Q\,V^{F.\ Pf.}}{R},$$

so wie der Nutzeffect für 1 Kubikfuss effective verdampften Wassers:

$$E'' = \frac{Q\,V^{F.\ Pf.}}{S}$$

Endlich beträgt das zur Erzeugung eines Nutzeffectes von 1 Pferdekraft nöthige Brennstoffquantum $\frac{25800}{QV}$ Pfunde.

In den drei vorigen Beispielen verhalten sich die Nutzeffecte, welche sich durch die effective Verdampfung von 1 Kubikfuss Wasser ergeben, beziehungsweise nahe wie die Zahlen

$$396 : 343 : 398,$$

während sich die Grösse der Nutzlast, welche dabei überwunden werden kann, wie

$$378 : 172 : 340$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Nutzlast bewegt, nahe wie die Zahlen

$$105 : 200 : 117$$

verhält, indem diese Geschwindigkeit per Secunde beziehungsweise nahe 1·75, 3·33 und 1·95 Fuss beträgt.

Die Dimensionen der Hauptbestandtheile der Woolf'schen Maschinen mit zwei Cylindern und vierfacher Expansion findet man sämmtlich, in Theilen des Durchmessers D des grossen Cylinders ausgedrückt, in Redtenbacher's: „Resultate für den Maschinenbau."

Beispiel 4. Wäre endlich mit denselben im 1. Beispiele gegebenen Grössen, mit Ausnahme, dass $l' = \frac{1}{4}l = 1\cdot 5$ sein soll, die Grösse $V' = 60$ (Geschwindigkeit der Nutzlast per Minute) gegeben und dafür S, Q' und E zu suchen; so fände man aus den Relationen (9), (10) und (11) in Nr. **372** zuerst aus (10):

$S = \cdot 1636$ Kubikfuss (zu verdampfendes Wasservolumen per Minute) und damit dann $Q' = 5429 \cdot 97$ Pfund und $E = 325798 \cdot 4^{F. Pf.}$ per Minute oder $N_{Pf.} = \frac{E}{25800} = 12\frac{3}{5}$ Pferdekraft.

Der aus der Verdampfung von 1 Kubikfuss Wasser hervorgehende Nutzeffect wäre also bei dieser zu weit getriebenen Expansion (welche hier beinahe das 15fache beträgt, während sie nach dem 3. Beispiel für den absolut grössten Effect nur das $4\frac{1}{2}$fache ausmacht) $= \frac{Q'V'}{S} = \frac{325798 \cdot 4}{\cdot 1636} = 1991067 \cdot 8^{F. Pf.} = 77$ Pferdekraft, also nahe um die Hälfte kleiner als für das absolute Maximum, wobei der Expansionscoefficient $\cdot 8900$ ist, während er hier nur mit $\cdot 25$ angenommen wurde.

Hieraus geht klar hervor, dass man den Effect einer solchen Maschine bedeutend und ganz unverhältnissmässig herabsetzt, wenn man die Expansion des Dampfes zu weit treiben will und sich zu sehr von dem richtigen, dem absoluten Maximum entsprechenden Verhältniss entfernt.

Watt'sche Maschine, doppelt wirkend.

376. Für die doppelt wirkende Watt'sche Dampfmaschine erhält man die entsprechenden Formeln ganz einfach aus jenen der Woolf'schen Maschine (Nr. **370** bis **373**), wenn man $f = F$, $h = l = L$, $a = A$ und $k = K$ setzt, wodurch eigentlich die beiden Cylinder in einen einzigen übergehen. Um dies wenigstens für eine Formel nachzuweisen, wollen wir auf diese Weise die Formel (2) in §. 545 für die mittlere Kolbengeschwindigkeit v entwickeln.

Nach der Relation (3) in Nr. **370** wird unter der gemachten Voraussetzung $v = V$, folglich nach der Formel (4) in Nr. **371**:

$$v = \frac{S}{F} \cdot \frac{mN}{n + (1 + \delta)\frac{Q}{F} + 2k + p} \ldots (k),$$

wobei nach Relat. (α) in Nr. **370** $N = \frac{l'}{l' + a} + logn. \frac{l + a}{l' + a}$ ist.

Um nun diese Formel mit der genannten (2) in §. 545 in Uebereinstimmung zu bringen, muss man sich erinnern, dass dort das relative Dampfvolumen durch die Formel (§. 541) $\mu = \frac{1}{n + mp}$ dargestellt ist, welche hier auf die Form $\frac{m}{n + p}$

(Nr. **359**) gebracht wurde, so, dass man also in der vorigen Formel (k) statt m und n setzen muss $\frac{1}{m}$ und $\frac{n}{m}$. Ferner ist, wie leicht zu sehen, $N = k$, $\delta = \alpha$, $\frac{Q}{F} = q$ und $2k = f$, mit welchen Werthen diese Formel die Form:

$$v = \frac{S}{F} \cdot \frac{k}{n + m\,[(1 + \alpha)\,q + f + p]}$$

erhält, welche sofort genau mit jener (2) in §. 545 übereinstimmt.

Ganz auf dieselbe Weise folgen auch die übrigen Formeln der §§. 543 bis 549 aus den obigen Formeln in Nr. **371** bis **373**.

377. Setzt man mit Beibehaltung der übrigen hier gewählten Bezeichnung die Kolbenfläche $= F$, den Kolbenlauf bei offener Communication $= l$, den ganzen Kolbengang $= L$, die auf die Flächeneinheit des Kolbens entfallende Nutzlast $\frac{Q}{F} = q$, die auf dieselbe Flächeneinheit bezogene Reibung der unbelasteten Maschine $= f + \delta q$; so hat man im gegenwärtigen Falle,

$$N = \frac{l}{l + a} + logn. \left(\frac{L + a}{l + a}\right) \ldots (\alpha)$$

gesetzt, für den allgemeinen Fall:

$$v = \frac{S}{F} \cdot \frac{mN}{n + (1 + \delta)\,q + f + p} \ldots (1),$$

$$Q = Fq = \frac{mNS}{(1 + \delta)\,v} - \frac{F}{1 + \delta}\,(n + f + p) \ldots (2),$$

$$S = Fv\,\frac{n + (1 + \delta)\,q + f + p}{mN} \ldots (3),$$

$$E = Qv = \frac{mNS}{1 + \delta} - \frac{Fv}{1 + \delta}\,(n + f + p) = \frac{mqNS}{n + (1 + \delta)\,q + f + p} \ldots (4).$$

Für den grössten Nutzeffect bei einem gegebenen Expansionsverhältniss $\frac{l}{L}$:

$$v' = \frac{mS}{F(n + P)} \cdot \frac{L}{l + a} \ldots (5),$$

$$Q' = \frac{mNS}{(1 + \delta)\,v'} - \frac{F}{1 + \delta}\,(n + f + p) \ldots (6),$$

$$E_{max.} = Q'v' \ldots (7).$$

Endlich ist für das absolute Maximum des Nutzeffectes:

$$\frac{l}{L} = \frac{n + f + p}{n + P} = \frac{\frac{m}{n + P}}{\frac{m}{n + (p + f)}} \ldots (8),$$

woraus sofort folgt, dass das vortheilhafteste Expansions- oder Absperrungsverhältniss nichts anderes als das Verhältniss zwischen den relativen Dampfvolumina unter dem Drucke P und $p+f$ ist.

Für den practischen Gebrauch dieser Formeln ist auch hier, wenn D den Kolbendurchmesser in Fussen ausgedrückt bezeichnet: $p=500$, $f=\frac{260}{D}$, $\delta=\cdot 14$, $a=\cdot 05\,L$, $m=3568525$, $n=214$, oder wenn man die älteren Pambour'schen Coefficienten vorzieht (was übrigens wenig Unterschied gibt) $m=3378378$ und $n=143$.

Die absolute Dampfspannung P im Kessel beträgt gewöhnlich $1\frac{1}{8}$ bis $1\frac{1}{4}$ Atmosphäre, so, dass also ohne Expansion gearbeitet, folglich $l=L$ wird.

Hochdruckmaschinen.

378. Für Hochdruckmaschinen ohne Expansion und Condensation gelten wieder die vorigen Formeln mit der Vereinfachung, welche aus der Relation $l=L$ hervorgeht, dabei setzt man $p=1845$, $f=\frac{260}{D}$, $\delta=\cdot 14$, $a=\cdot 05\,L$ und (Nr. **359**, Relat. (b')) $m=3788346$, $n=539$.

Der Dampf wird im Kessel gewöhnlich unter einem absoluten Druck von 3 bis 4 Atmosphären entwickelt.

Die hierher gehörigen Formeln sind nämlich, da für $l=L$ in der Relation (α) der vorigen Nr. die logarithmische Grösse wegfällt und $N=\frac{L}{L+a}$ wird, für den allgemeinen Fall:

$$v=\frac{S}{F}\cdot\frac{L}{L+a}\cdot\frac{m}{n+(1+\delta)q+p+f}\ldots(1),$$

$$Q=Fq=\frac{L}{L+a}\cdot\frac{mS}{(1+\delta)v}-\frac{F}{1+\delta}(n+p+f)\ldots(2),$$

$$S=\frac{L+a}{L}\cdot\frac{Fv}{m}\left[n+(1+\delta)q+p+f\right]\ldots(3),$$

$$E=Qv=Fqv\ldots(4);$$

für den grössten Nutzeffect:

$$v'=\frac{L}{L+a}\cdot\frac{mS}{F(n+P)}\ldots(5),$$

$$Q' = Fq' = \frac{F}{1+\delta}(P-p-f)\ldots(6),$$

$$S = \frac{L+a}{L}\cdot\frac{n+P}{m}\cdot Fv'\ldots(7),$$

$$E_{max.} = Q'v' = Fq'v'\ldots(8).$$

Cornwall-Maschine, doppelt wirkend.

379. Da die Cornwall-Maschinen, wenn sie doppelt wirkend sind, mit Expansion und Condensation arbeiten, wobei die absolute Dampfspannung im Kessel von 3 bis 4 Atmosphären beträgt, so gelten dafür wieder die obigen Formeln in Nr. **377**, nur setzt man für die practische Anwendung derselben, da (weil bei diesen Maschinen ein sehr gutes Vacuum erzeugt wird) die Luftpumpe doppelt so gross ist und die Dampf-Abzugscanäle nicht blos wie bei den Watt'schen Maschinen $\frac{1}{25}$, sondern $\frac{1}{16}$ des Inhaltes des Dampfcylinders betragen, also ein geringerer Gegendruck auf den Kolben entsteht, in runder Zahl $p = 180$, dagegen wieder $f = \frac{260}{D}$, $\delta = \cdot 14$, $a = \cdot 05 L$, $m = 3568525$ und $n = 214$. Wenn ferner bei den übrigen stationären Maschinen in Folge des Wassers, welches im liquiden Zustande mit dem Dampfe in den Cylinder mitgerissen wird, das effective verdampfte Wasservolumen S beiläufig nur 95, d. i. 95 Procent von dem im Kessel beobachteten Bruttovolumen S' beträgt, so kann bei diesen Cornwall'schen Maschinen, vermöge der hohen Temperatur, welche der Cylinder fortwährend behält, indem er von dem Dampf (in einem Gehäuse oder Mantel) umhüllt wird, ohne Fehler $S = S'$ gesetzt werden. Alle diese genannten und noch mehrere andere Verbesserungen sind Ursache von der ausserordentlichen Leistungsfähigkeit dieser Cornwall'schen Dampfmaschinen, welche in dieser Beziehung einen sehr vortheilhaften Ruf erlangt haben.

Da nun diese Maschinen im Allgemeinen mit einem Dampfdrucke von 40 bis 50 engl. Pfund auf den Quadratzoll arbeiten, ihre mittlere Reibung zu $\frac{3}{4}$ und der Gegendruck von Seite des Condensators zu $1\frac{1}{4}$ Pfund auf den Quadratzoll angenommen, also $p + f = 2$ gesetzt werden kann, so folgt für das vortheilhafteste Expansionsverhältniss nach der Relat. (8) in Nr. **377** (für eine Dampfspannung von 45 Pfund engl.):

$$\frac{l}{L} = \frac{n+p+f}{n+P} = \frac{214 + 2 \times 144}{214 + 40 \times 144} = \cdot 084.$$

In der Praxis würde jedoch durch einen so kleinen Werth von l der Gang der Maschine zu ungleichförmig, und man begnügt sich für l von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4} L$ herabzugehen.

Evans Maschine.

380. Die sogenannten Evans-Maschinen sind doppelt wirkende Hochdruckmaschinen mit Expansion, jedoch ohne Condensation. Es gelten daher auch für diese Maschinen dieselben Formeln wie für die doppelt wirkenden Cornwall-Maschinen, nur mit dem Unterschiede, dass hier P grösser genommen wird, indem bei den Evans-Maschinen die Dampfspannung im Kessel gewöhnlich von 3 bis 8 Atmosphären beträgt, und dass ferner p den atmosphärischen Druck bezeichnet.

Dem zu Folge kann man für diese Maschinen setzen: $f = \frac{260}{D}$ $\delta = \cdot 14$, $a = \cdot 05 L$, $p = 1845$, $m = 3788346$, $n = 539$, wobei, wie hier durchaus, der Wr. Fuss und das Wr. Pfund als Einheiten zum Grunde liegen.

Für das vortheilhafteste Absperrungsverhältniss hat man nach der erwähnten Relation (8) in Nr. **377**:

$$\frac{l}{L} = \frac{2384 + f}{539 + P} \cdots (x),$$

so, dass für eine Dampfspannung von 120 Pfund auf den englischen Quadratzoll bei dem mittlern Werthe von f sofort $\frac{l}{L} = \cdot 18$, dagegen für eine absolute Spannung von beiläufig 55 Pfd. $\frac{l}{L} = \cdot 35$ würde.

Für gewöhnlich nimmt man bei diesen Maschinen dieses Verhältniss von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ an.

Beispiel 1. Pambour berechnet zur Anwendung der hierher gehörigen Formeln eine solche, in Brighton zum Betriebe einer Wasserförderungsmaschine für die dortige Wasserleitung bestehende Dampfmaschine. Die Angaben sind nach englischem Mass und Gewicht folgende:

Durchmesser des Cylinders $= 16\frac{1}{2}$ Zoll, Kolbenlauf $= 3$ Fuss, Expansionsverhältniss (oder Coefficient) $= \cdot 517$, Brutto-Verdampfung $= \cdot 317$ Kubikfuss Wasser per Minute, also effective Verdampfung (zu 95 Procent angenommen) $= \cdot 301$ Kubikfuss, Kohlenverbrauch in derselben Zeit $= 2\cdot 845$ Pfund.

Obschon ferner die Dampfspannung im Kessel zufällig nicht angegeben, so lässt sich diese dennoch aus dem Gange der Rechnung ermitteln, wornach sie sich zu 7874·24 Pfund auf den englischen Quadratfuss oder zu 3·72 Atmosphären über den Luftdruck herausstellt.

Sucht man nun, bei dem gegebenen Expansionsverhältniss, die dem grössten Effect entsprechende Kolbengeschwindigkeit und die derselben entsprechende Nutzlast, so erhält man nach Pambour's Rechnung, wegen $D = 1\cdot 375$, $F = 1\cdot 4849$, $L = 3$, $\frac{l}{L} = \cdot 517$, $S = \cdot 95$ $S' = \cdot 95 \times \cdot 317 = \cdot 301$, $P = 11433\cdot 4$, $R = 2\cdot 845$, $p = 2118$, $a = \cdot 05 L$, $\delta = \cdot 14$, $f = \frac{300}{D}$, $m = 4348000$ und $n = 620$, sofort für diese dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Geschwindigkeit nach der Formel (5) Nr. **378**, $v' = 183$ Fuss per Minute.

Sucht man ferner zu dieser, so wie auch der Vergleichung wegen zugleich für die Geschwindigkeiten von 250 und 200 Fuss die übrigen Grössen, so wird:

			Max. des Nutzeffectes.
v	$= 250$	200	183
$Q = Fq$	$= 3144$	4892	5711
$\frac{q}{144}$	$= 14\cdot 70$	$22\cdot 88$	$26\cdot 71$
S	$= \cdot 301$	$\cdot 301$	$\cdot 301$
$E_{F.\,Pf.}$	$= 786000$	978410	1045100
$E_{Pf.\,kr.}$	$= 23\cdot 82$	$29\cdot 65$	$31\cdot 67$
$\frac{Qv}{R}$ 1)	$= 276280$	343910	367350
$\frac{Qv}{S}$ 2)	$= 2612800$	3252450	3474200
$\frac{33000 R}{Qv}$ 3)	$= \cdot 120$	$\cdot 096$	$\cdot 090$

1) Nutzeffect von 1 Pfund Brennstoff in Fusspfund (per Minute).

2) Nutzeffect aus 1 Kubikfuss Wasser.

3) Brennstoffmenge in Pfunden, welche den Effect von 1 Pferd hervorbringt.

			Max. des Nutzeffectes.
$\frac{33000\,S}{Qv}$ [4])	$= \cdot 013$	$\cdot 010$	$\cdot 009$
$\frac{Qv}{33000\,R}$ [5])	$= 8\cdot 37$	$10\cdot 42$	$11\cdot 13$
$\frac{Qv}{33000\,S}$ [6])	$= 79$	99	$105.$

Da man ferner nach der Formel (8) für das absolute Maximum das Expansionsverhältniss $\frac{l}{L} = \cdot 35$ findet, so hat man mit Beibehaltung der übrigen Werthe, also auch von $S = \cdot 301$, sofort: $v'' = 259$, $Q'' = 4340$, $\frac{q''}{144} = 20\cdot 30$, $E'' = 1125000$, $E_{Pf.kr.} = 34\cdot 09$, $\frac{Qv}{R} = 395410$, $\frac{Qv}{S} = 3739600$.

Obschon man also durch die weiter getriebene Expansion von ·35 ungefähr 2 Pferdekräfte gewinnen kann, so erhält man dennoch bei dem ersten Verhältniss von ·517 eine grössere Gleichförmigkeit im Gange der Maschine, welche in vielen Fällen bedingt sein kann, so dass man auf diese geringe Ersparung lieber verzichtet.

Pambour berechnet dasselbe Beispiel noch für den Fall, in welchem die Maschine nicht mit voller Kraft zu arbeiten hat, also das Feuer gemässigt und die Brutto-Dampferzeugung bis auf ·243 Kubikfuss per Minute vermindert wird, daher $S = \cdot 231$ gesetzt werden kann. Pambour erhält dafür (bei $\frac{l}{L} = \cdot 517$):

			Max. des Nutzeffectes.
v	$= 250$	200	$140\cdot 5$
$Q = Fq$	$= 1527$	2870	5711
$\frac{q}{144}$	$= 7\cdot 14$	$13\cdot 42$	$26\cdot 71$
S	$= \cdot 231$	$\cdot 231$	$\cdot 231$
E	$= 381750$	574000	802660
$E_{Pf.kr.}$	$= 11\cdot 57$	$17\cdot 40$	$24\cdot 32$
$\frac{Qv}{R}$	$= 164160$	246840	$345170.$

4) Wassermenge in Kubikfuss, welche den Effect von 1 Pferd erzeugt.
5) Nutzeffect in Pferdekräften, welcher durch 1 Pfund Brennstoff erzeugt wird.
6) Nutzeffect in Pferdekräften, welcher durch 1 Kubikfuss Wasser (verdampft) erzeugt wird.

Beispiel 2. Zur Uebung sei noch auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, für eine ganz ähnliche Maschine, wobei der Durchmesser des Dampfcylinders etwas kleiner (statt 1·325 nur 1·113 Fuss), dagegen die absolute Dampfspannung etwas grösser (statt 6859·2 sofort 9939·6 Pfund per Quadratfuss), alles Uebrige jedoch gleich ist, sofort $D = 1{\cdot}113$, also $F = {\cdot}9728$, $L = 2{\cdot}893$, $l = {\cdot}517 L$, $S = {\cdot}2698$, $P = 9959{\cdot}59$, $R = 2{\cdot}304$, $p = 1845$, $a = {\cdot}05 L$, $S = {\cdot}14$, $f = \frac{260}{D}$, $m = 3788346$, $n = 539$. Mit diesen Werthen erhält man aus den obigen betreffenden Formeln (wegen $N = 1{\cdot}5278$):

			Max. des Nutzeffectes.
v	$= 241$	.... 192·85	.... 176·45
$Q = Fq$....	$= 3449{\cdot}08$	.... 4869·18	.... 5526·98
$\frac{q}{144}$.........	$= 24{\cdot}62$	.... 34·76	.... 39·46
S..........	$= {\cdot}2698$	.... ·2698	.... ·2698
$E_{F.\,Pf.}$	$= 831143$	.... 939020·6	.... 975518·2
$E_{Pf.\,kr.}$	$= 32{\cdot}21$	.... 36·4	.... 37·8
$\frac{Qv}{R}$ *)......	$= 360782{\cdot}6$	.... 407360·9	.... 423401·9
$\frac{Qv}{S}$.........	$= 3080961{\cdot}7$	.... 3480432·2	.... 3615709·2
$\frac{25800 R}{Qv}$	$= {\cdot}0715$	.... ·0633	.... ·0609
$\frac{25800 S}{Qv}$	$= {\cdot}0084$	.... ·0074	.... ·0071
$\frac{Qv}{25800 R}$	$= 13{\cdot}984$	.... 15·797	.... 16·411
$\frac{Qv}{25800 S}$	$= 119{\cdot}417$	.... 134·906	.... 140·144.

Da man ferner nach der obigen Relation (x) für das vortheilhafteste Absperrungsverhältniss sehr nahe $\frac{l}{L} = {\cdot}25$ findet, so hat man noch für das absolute Maximum (wegen $N = 2{\cdot}0887$):

---

*) Von hier an hat man nämlich der Reihe nach: Nutzeffect in F. Pf. für 1 Pfund Brennstoff, Nutzeffect in F. Pf. für 1 Kubikfuss verdampftes Wasser, consumirten Brennstoff für 1 Pferdekraft, verdampftes Wasservolumen für 1 Pferdekraft, Arbeit in Pferdekräften für 1 Pfund Brennstoff, Arbeit in Pferdekräften für 1 Kubikfuss verdampftes Wasser.

v' . . . . . $= 334{\cdot}708$ Fuss,
Q' . . . . . $= 3361{\cdot}85$ Pfund,
E' . . . . $= 1125236{\cdot}5$ Fusspfund,
$E_{Pf.kr.}$ . . $= 43{\cdot}6$ Pferdekräfte,
$\frac{q}{144}$ . . . . $= 24{\cdot}0$ Pfund,
S . . . . . $= {\cdot}2698$ Kubikfuss per Minute,
$\frac{Q'v'}{R}$ . . . . $= 488383{\cdot}8$ Fusspfund für 1 Pf. Brennmaterial,
$\frac{Q'v'}{S}$ . . . . $= 4170632{\cdot}4$ Fusspf. für 1 Kubikfuss Wasser,
$\frac{25800\,R}{Q'v'}$ . . $= {\cdot}0528$ Pf. Brennstoff für 1 Pferdekraft,
$\frac{25800\,S}{Q'v'}$ . . $= {\cdot}00619$ Kubikf. Wasser für 1 Pferdekraft,
$\frac{Q'v'}{25800\,R}$ . . $= 18{\cdot}93$ Pferdekräfte für 1 Pf. Brennstoff,
$\frac{Q'v'}{25800\,S}$ . . $= 161{\cdot}65$ „ für 1 Kubikfuss Wasser.

Für das Absperrungsverhältniss von $\frac{l}{L} = {\cdot}35$ erhält man: ($N = 1{\cdot}8402$) $v = 250{\cdot}2$, $Q = 4361$, $E = 1091022$, $E_{Pf.kr.} = 42{\cdot}29$, $\frac{q}{144} = 31{\cdot}13$, $S = {\cdot}2698$, $\frac{Qv}{R} = 473534$, $\frac{Qv}{S} = 4043980$ u. s. w.

Nimmt man endlich an, dass die Maschine nicht die volle Nutzlast zu überwinden habe, der Maschinenwärter also, um dieselbe nicht schneller wie gewöhnlich gehen zu lassen, das Feuer mässigt und dadurch z. B. das Kohlenconsumo R auf $1{\cdot}883$ Pfund und die Verdampfung S bis auf ${\cdot}2075$ Kubikfuss per Minute reducirt; so erhält man bei dem obigen Werthe von $\frac{l}{L} = {\cdot}517$ sofort $v = 135{\cdot}75$, $Q = 5526{\cdot}98$, $E = 750260$, $E_{Pf.kr.} = 29$, $\frac{q}{144} = 39{\cdot}45$, $S = {\cdot}2075$, $\frac{Qv}{R} = 398439$, $\frac{Qv}{S} = 3615709$ u. s. w.

Dabei wird jedoch immer vorausgesetzt, dass kein Dampf, sei es durch die Schieber, Kolben, Sicherheitsventile u. s. w. entweicht oder verloren gehe.

Watt'sche Maschine, einfach wirkend.

381. Bei den Watt'schen einfach wirkenden Maschinen, welche (Niederdruckmaschinen mit Expansion und Condensation) zum Betriebe von Wasserpumpen verwendet werden, wirkt der Dampf blos während des Niedergehens des Dampf- oder Aufsteigens des Pumpenkolbens. Sobald der Dampfkolben seinen tiefsten Stand erreicht hat, schliesst sich jenes Ventil, durch welches der Dampf in den Condensator abzieht, während sich das sogenannte Gleichgewichts-Ventil öffnet und eine Communication zwischen dem Raume über und unter dem Kolben herstellt, wodurch beim darauf folgenden Aufsteigen des Kolbens der über demselben befindliche Dampf, da er unter denselben treten kann, weiter keinen Widerstand leistet, oder das Gleichgewicht zwischen dem Dampfdruck über und unter dem Kolben sehr nahe hergestellt ist.

Dieses Aufsteigen des Dampfkolbens wird durch das Gewicht des am andern Ende des Balanciers angebrachten Gestänges der Pumpe oder durch das sogenannte Gegengewicht bewirkt, welches stets auf eine zweckmässige Weise regulirt sein muss.

Bei Berechnung des Effectes dieser Maschine muss man berücksichtigen, dass während des Niederganges des Dampfkolbens die Nutzlast, d. i. das Wasser und zugleich auch das Gegengewicht, welches während dieser Periode als Last erscheint, gehoben wird, dass dagegen beim Aufsteigen des Kolbens, wobei keine Nutzleistung Statt findet, dieses Gegengewicht als die bewegende Kraft auftritt und jene Arbeitsgrösse, welche zum Heben des Gewichtes verwendet wurde, wieder zurückerstattet.

Anmerkung. Da diese Maschinen nicht zu den Kurbelmaschinen gehören (oder nicht rotativ sind) und daher kein Schwungrad besitzen, so muss die Regulirung, sowohl hinsichtlich der Länge des Kolbenlaufes als auch rücksichtlich der Anzahl der Kolbengänge per Minute, durch anderweitige Mittel bewerkstelligt werden. In ersterer Beziehung wendet man das Regulirungs-Ventil, in letzterer dagegen den sogenannten Cataract, nämlich einen durch einen Wasserstrahl in Bewegung gesetzten kleinen Apparat (öfter auch eine kleine Druckpumpe) an, welcher, nachdem der Dampfkolben seinen Lauf vollendet und seinen höchsten oder tiefsten Stand eingenommen hat, nicht unmittelbar wieder, sondern erst nach Verlauf einer gewissen und im Voraus nach Umständen bestimmten Zeit auf eine Auslösung und dadurch mittelbar beziehungsweise auf die Bewegung des Einströmungshahnes und des Gleichgewichtsventils wirkt, wodurch der Dampf neuerdings über oder unter den Kolben tritt und eine neue Oscillation einleitet.

Eine genaue und detaillirte Beschreibung dieser verschiedenen Apparate und Vorrichtungen findet man u. A. in Pambour's *théorie des machines à vapeur.*

382. Es sei nun, um zuerst die Wirkung oder Arbeitsgrösse des Dampfes während des Niedergehens des Kolbens auszudrücken, wieder P der Druck, unter welchem der Dampf im Kessel erzeugt wird, P' der unbekannte mittlere Druck des Dampfes im Cylinder auf die Flächeneinheit (also hier auf den Quadratfuss) bezogen, F die Kolbenfläche, L die Länge des Kolbenlaufes, l jener Theil davon, welcher bei offener Communication mit dem Kessel zurückgelegt wird (bevor die Expansion des Dampfes beginnt), und a der freie Raum zu jeder Seite des Cylinders (welcher vom Kolben nicht durchlaufen wird); so hat man nach der Relation (c) in Nr. **366** für die Wirkung des Dampfes während des Kolbenniederganges:

$$W_1 = F(l+a)(n+P')\left[\frac{l}{l+a} + logn.\frac{L+a}{l+a}\right] - nFL.$$

Um ferner auch den Widerstand auszudrücken, so sei q die auf die Einheit der Kolbenfläche bezogene und auf die Geschwindigkeit des Kolbens reducirte Nutzlast (von Seite der Saug- und Heb- oder Druckpumpe), q' eben so die von dem Gegengewicht herrührende Last, p der Dampfdruck von Seite des Condensators (ebenfalls auf die Flächeneinheit bezogen) und $f + \delta(q+q')$ die Reibung der mit dem Widerstande $q + q'$ belasteten Maschine, so, dass also f die auf die Einheit der Kolbenfläche bezogene Reibung der leeren oder unbelasteten Maschine (wofür jedoch nicht blos die eigene Reibung der Maschine, sondern zugleich auch alle, keinen Theil des Nutzeffectes ausmachenden Widerstände gehören, welche durch die Bewegung der Luft- und Warmwasserpumpe u. s. w. entstehen) und δ die Zunahme bezeichnet, welche die Reibung für jede Einheit der Last, wohin u. A. auch das Gegengewicht gehört, erhält.

Dies vorausgesetzt, erhält man für die Arbeitsgrösse aller dieser Widerstände während eines Kolben-Niederganges den Ausdruck:

$$[(1+\delta)(q+q') + p + f]FL$$

und da dieser für das dynamische Gleichgewicht dem vorigen Werthe W_1 gleich sein muss, so hat man, wenn man wieder Kürze halber:

$$N = \frac{l}{l+a} + logn.\left(\frac{L+a}{l+a}\right) \ldots (d)$$

setzt und gleich die Grösse $n + P'$ bestimmt, für den Niedergang des Dampfkolbens:

$$n + P' = \frac{L}{l+a} \cdot \frac{1}{N} [n + (1 + \delta)(q + q') + p + f] \ldots (A).$$

383. Beim Aufwärtsgehen des Dampfkolbens bildet das erwähnte Gegengewicht die bewegende Kraft, während die zu überwindende Last aus den Reibungen der Maschine, dem Widerstande, welchen die Förderungspumpe beim Niedergange ihres Kolbens und jenem Widerstande zusammengesetzt ist, welchen der über dem Dampfkolben befindliche Dampf von dem Augenblicke an bildet, als das Gleichgewichtsventil geschlossen, dieser Dampf also (zur allmäligen Verzögerung der aufsteigenden Bewegung und Vermeidung eines Stosses) comprimirt wird.

Setzt man daher, da im Allgemeinen die Reibung der unbelasteten Maschine beim Aufwärtsgehen des Kolbens eine andere als beim Niedergange desselben sein wird, diese Reibung (alles wieder auf die Einheit der Kolbenfläche bezogen) $= f'$ und den Widerstand der Förderungspumpe bei diesem Gange $= q''$; so ist FLq' die Arbeitsgrösse des Gegengewichtes und $FL(f' + q'')$ jene der Maschinenreibung und des Widerstandes von Seite der Förderungspumpe während des genannten Kolbenganges.

Um ferner auch den Widerstand des nach Absperrung des Gleichgewichtsventils über dem Kolben befindlichen Dampfes zu bestimmen, bemerke man zuerst, dass so lange dieses Ventil geöffnet ist, der Dampf über und unter dem Kolben (beinahe ganz gleich) eine Spannung p' besitzt, welche einem Dampfe zukommt, der (beim vorhergegangenen Kolbenlaufe) von dem Volumen $F(l + a)$ auf jenes $F(L + 2a)$ ausgedehnt oder expandirt wurde so dass also nach der Relation (b) in Nr. **365** sofort:

$$p' = (n + P') \frac{l+a}{L+2a} - n \ldots (i) \text{ ist.}$$

Nehmen wir nun an, das Gleichgewichtsventil werde in dem Augenblicke geschlossen, in welchem der aufwärtssteigende Kolben den Weg l' zurückgelegt hat, und betrachten wir den Kolben in jenem Momente, in welchem er bereits den Weg $\lambda > l'$ zurückgelegt; so wird, wenn in diesem Augenblicke der über dem Kolben befindliche, etwas comprimirte Dampf die Spannung p_1, dagegen jener unter dem Kolben befindliche, etwas mehr expandirte Dampf jene p_2 besitzt, bei dem Weiterrücken des Kolbens um $d\lambda$, die Arbeitsgrösse dieses Widerstandes $= (p_1 - p_2) F d\lambda$, oder da, wenn man den Raum unterhalb des Kolbens betrachtet, dem Raume $F(l' + a)$ die Dampfspannung p', dagegen dem Raume $F(\lambda + a)$ jene p_2, ferner, wenn man den Raum oberhalb des Kolbens berücksichtiget, dem Raume $F(L - l' + a)$ die Spannung p' und dem Raume $F(L - \lambda + a)$ jene p_1 zukommt, folglich nach der vorhin genannten Relation (b):

$$p_2 = (n + p') \frac{l' + a}{\lambda + a} - n \quad \text{und} \quad p_1 = (n + p') \frac{L - l' + a}{L - \lambda + a} - n$$

ist, auch

$$= F(n + p') \left[\frac{L - l' + a}{L - \lambda + a} - \frac{l' + a}{\lambda + a}\right] d\lambda,$$

oder wenn man für p' den Werth aus der vorigen Relation (i) setzt:

$$= F(n + P') \frac{l + a}{L + 2a} \left[(L - l' + a) \frac{d\lambda}{L - \lambda + a} - (l' + a) \frac{d\lambda}{\lambda + a}\right].$$

Integrirt man nun diesen Ausdruck innerhalb der Grenzen von $\lambda = l'$ bis $\lambda = L$, so erhält man für die gesuchte Arbeitsgrösse dieses betreffenden Widerstandes, wenn man Kürze halber

$$\frac{(L - l' + a)}{L + 2a} \, logn. \left(\frac{L - l' + a}{a}\right) - \frac{(l' + a)}{L + 2a} \, logn. \left(\frac{L + a}{l' + a}\right) = N' \ldots (e)$$

setzt, ganz einfach den Ausdruck:

$$N' F L (n + P') \frac{l + a}{L},$$

welcher sofort, wie es sein soll, für $l' = L$ gleich Null wird. Es ist daher wieder für das dynamische Gleichgewicht, und zwar beim Aufwärtsgehen des Dampfkolbens:

$$FLq' = FL(f' + q'') + N' F L (n + P') \frac{l + a}{L}$$

oder auch

$$n + P' = \frac{L}{l + a} \cdot \frac{1}{N'} (q' - f' - q'') \ldots (B).$$

Anmerkung. Wie man sieht, so bilden diese beiden Relationen (A) und (B) die erste der beiden Pambour'schen Hauptbedingungen, so, dass also nur noch die zweite, nämlich die Gleichheit zwischen dem erzeugten und consumirten Dampfvolumen, auszudrücken ist.

384. Um nun auch jene Relation zu finden, welche die Gleichheit zwischen dem erzeugten und verbrauchten Dampf ausdrückt, bemerke man, dass in dem Augenblicke (nämlich beim Beginne des Niederganges des Dampfkolbens) als der Dampf in den Condensator abzieht, dieser die Spannung p' besitzt, welche durch die obige Relation (i) gegeben ist. Ferner ist das Volumen des Dampfes, welcher bei jedem Niedergange (also bei jeder vollständigen Oscillation) des Dampfkolbens condensirt wird, $= F(l' + a)$, so dass, wenn per Minute n' Oscillationen oder Kolbenniedergänge Statt finden, das per Minute consumirte Dampfvolumen $= n'F(l' + a)$ ist.

Ist nun V die mittlere Kolbengeschwindigkeit oder der Weg per Minute, so ist $V = 2n'L$, oder wenn man, wie es bei dieser Gattung von Maschinen üblich ist, blos den Weg v in Rechnung bringt, welchen der Kolben beschreibt während er den Nutzeffect hervorbringt, wodurch $v = n'L$, also $n' = \frac{v}{L}$ wird; so erhält man für das Volumen des per Minute in den Cylinder strömenden Dampfes, diesen unter der Spannung p' gemessen, den Ausdruck:

$$Fv \frac{l' + a}{L} \dots (k).$$

Ist nun von der andern Seite S das Wasservolumen, welches im Kessel per Minute unter dem Drucke P verdampft, folglich (Relat. α, Nr. **365**) $\frac{mS}{n + P}$ das diesem Drucke P entsprechende Dampfvolumen; so geht dieses bei dem Uebergange aus dem Drucke P in jenen p' in das Volumen

$$\frac{mS}{n + P} \cdot \frac{n + P}{n + p'} = \frac{mS}{n + p'}$$

über. Setzt man daher diesen Ausdruck dem vorigen (k) gleich und substituirt unter einem für $n + p'$ den Werth aus der Relation (i) der vorigen Nr., so erhält man für die noch fehlende Hauptrelation:

$$n + P' = m \frac{S}{Fv} \cdot \frac{L}{l + a} \cdot \frac{L + 2a}{l' + a} \dots (C).$$

385. Eliminirt man aus den Relationen (A) und (C), dann (B) und (C) die unbekannte Spannung P' (was bei dieser Form der genannten Relationen ganz einfach ist), so erhält man:

$$\frac{1}{N} [n + (1 + \delta)(q + q') + p + f] = m \frac{S}{Fv} \cdot \frac{L + 2a}{l' + a}$$

und

$$\frac{1}{N'} (q' - q'' - f') = m \frac{S}{Fv} \cdot \frac{L + 2a}{l' + a}.$$

Setzt man ferner den Werth von q' aus der letztern dieser beiden Gleichungen in die erstere, so erhält man aus der entstehenden Gleichung, je nachdem man sie in Beziehung auf v, Q und S auflöst, und wenn man noch $q + q'' = r$ und $Fr = Q$ setzt, die zur Auflösung der verschiedenen Probleme nöthigen Relationen:

$$v = m\frac{S}{F} \cdot \frac{L + 2a}{l' + a} \cdot \frac{N - (1 + \delta) N'}{(1 + \delta) r + n + p + f + (1 + \delta) f'} \ldots (1),$$

$$Q = Fr = m\frac{S}{v} \cdot \frac{L + 2a}{l' + a} \left(\frac{N}{1 + \delta} - N'\right) - \frac{F}{1 + \delta}[n + p + f + (1 + \delta) f'] \ldots (2),$$

$$S = \frac{Fv}{m} \cdot \frac{l' + a}{L + 2a} \cdot \frac{(1 + \delta) r + n + p + f + (1 + \delta) f'}{N - (1 + \delta) N} \ldots (3),$$

$$E = Qv = Frv \ldots (4),$$

wobei N und N' die in Nr. **382** (Relat. d) und Nr. **383** Relat. e) angegebenen Werthe besitzen.

Anmerkung. Da in den gewöhnlichen Fällen die Grösse l' nicht im Voraus gegeben ist, sondern von dem Gegengewicht q' abhängt, so kann man, um l' als Function von q' auszudrücken, aus den obigen Relationen (A) und (B), ferner auch aus jenen (B) und (C) die Grösse P' eliminiren, wodurch man erhält:

$$N' = N\frac{q' - q'' - f'}{(1 + \delta)(r + q' - q'') + n + p + f}$$

und

$$N'\frac{L + 2a}{l' + a} = \frac{Fv}{mS}(q' - q'' - f').$$

Pambour stellt zur leichtern Berechnung des Quotienten von $\frac{l'}{L}$ aus diesen beiden Gleichungen, wenn nebst dem Gegengewicht q' in der erstern die Belastung r und in der letztern die Geschwindigkeit v gegeben ist, eigene Tabellen auf. Eben so erhält man aus den von ihm im Voraus berechneten Tabellen für gegebene Werthe von $\frac{l}{L}$ und $\frac{l'}{L}$ unmittelbar die obigen Grössen N und N', so wie umgekehrt die erstern Quotienten, wenn diese letzteren Grössen gegeben sind.

386. Da man von den in den vorigen Formeln (1) bis (4) vorkommenden Grössen bei derselben Maschine jene v oder r, $\frac{l}{L}$ und q', damit also auch $\frac{l'}{L}$ verändern kann; so lässt sich 1. die Belastung oder Geschwindigkeit bestimmen, für welche bei einem gegebenen Gegengewicht q' und einer gegebenen Absperrung l, 2. das Gegengewicht finden, für welches bei gegebener Absperrung, und 3. das Absperrungsverhältniss $\frac{l}{L}$ bestimmen, bei welchem der Effect der Maschine am grössten ist.

Ohne hier in weitere Auseinandersetzungen eingehen zu können, so findet man auf eine ähnliche Weise wie bei den früher behandelten Maschinen, dass bei einem gegebenen Werthe von q' und $\frac{l}{L}$ der Nutzeffect am grössten wird, wenn die Nutzlast r am grössten (vergl. Relat. 4 und 1), folglich (Relat. A) wenn $P' = P$ ist; dadurch wird in diesem Falle:

$$v' = m \frac{L + 2a}{l' + a} \cdot \frac{L}{l + a} \cdot \frac{S}{F} \cdot \frac{1}{n + P} \ldots (5)$$

und

$$Q' = Fr' = F \frac{l + a}{L} \left(\frac{N}{1 + \delta} - N' \right)(n + P) - \frac{F}{1 + \delta} [n + p + f + (1 + \delta) f'] \ldots (6).$$

Was ferner die Bestimmung des **vortheilhaftesten Gegengewichtes** q' betrifft, so hängt dieses Gewicht, wie bereits bemerkt, von dem Werthe von l' ab, so dass man jenen Werth von l' suchen muss, für welchen der Nutzeffect E am grössten wird.

Multiplicirt man daher die beiden vorigen Gleichungen (5) und (6) mit einander, setzt dann für N' den Werth aus Nr. **383**, sucht den Differentialquotienten $\frac{d.Q'v'}{dl'}$ und setzt diesen gleich Null; so erhält man daraus für das Maximum von E:

$$logn. \left(\frac{L - l' + a}{a} \right) = \frac{N}{1 + \delta} - \frac{1}{1 + \delta} \cdot \frac{L}{l + a} \cdot \frac{n + p + f + (1 + \delta) f'}{n + P} \ldots (7),$$

so dass also durch diese Relation für einen gegebenen Werth von $\frac{l}{L}$ der vortheilhafteste Moment für das **Schliessen** des Gleichgewichtsventils beim Aufsteigen des Dampfkolbens und mit diesem Werthe von l' sofort auch das dem grössten Nutzeffect entsprechende Gegengewicht aus der Relation (B) (Nr. **383**), in welcher man nur P statt P' zu setzen hat, gegeben ist, und zwar hat man:

$$q' = \frac{l + a}{L} N'(n + P) + f' + q'' \ldots (8).$$

Was endlich das **vortheilhafteste Absperrungsverhältniss** betrifft, wobei das **absolute** Maximum des Nutzeffectes eintritt, so findet man, wenn man sich zur Vereinfachung der Entwicklung erlaubt $l' = L$ zu setzen, wodurch $N' = 0$ wird:

$$\frac{l}{L} = \frac{n + p + f + (1 + \delta) f'}{n + P} \ldots (9).$$

Anmerkung. Was den Gang der Rechnung betrifft, so muss man, um das absolute Maximum des Nutzeffectes zu erhalten, zuerst aus dieser Relation (9) die Absperrung l suchen, damit aus (7) den Werth l' bestimmen, mit l und l' aus (8) das Gegengewicht q' berechnen und endlich aus (6) die Belastung Q bestimmen. Kämen durch diese Berechnungen für die Absperrung, die Belastung und das Gegengewicht Werthe zum Vorschein, welche für die Praxis nicht ganz geeignet erscheinen (so fällt z. B. das Absperrungsverhältniss $\frac{l}{L}$ in der Regel immer zu klein aus), so würde man sich mit solchen Werthen begnügen müssen, welche von diesen berechneten so wenig als möglich abweichen.

387. Was endlich die numerischen Werthe der verschiedenen Coefficienten bei dieser Maschine betrifft, so kann man nach Pambour annehmen: $p = 500$, $f = \frac{210}{D}$, $f' = \frac{300}{D}$, $\delta = \cdot 14$, $a = \cdot 1 L$, $m = 3568525$ und $n = 214$.

Da die absolute Dampfspannung im Kessel von 15 bis 18 Pfund auf den englischen Quadratzoll beträgt, so kann man als Mittelwerth setzen:

$$P = 14 \cdot 5 \times 144 = 2088.$$

Auch ist, wie bei den früheren Maschinen, $S = \cdot 95\, S'$ zu nehmen.

Beispiel 1. Nach Pambour's Angabe besteht zu *Oldford* in *East London Waterworks* eine Maschine von diesem Systeme, wovon die Dimensionen und Daten nach englischem Mass in Folgendem bestehen:

Durchmesser des Cylinders 60 Zoll, oder Fläche des Kolbens nach Abschlag der Kolbenstange 19·507 Quadratf., Kolbengang 7·91 F., Lauf bei offener Communication 5 F., Kolbengang beim Aufsteigen bis zum Absperren des Gleichgewichtsventils 7·91 F. (der Kolben wird durch die neue Dampfzuströmung aufgehalten), freier Raum zu beiden Seiten des Cylinders $\frac{1}{10}$ des Kolbenganges, absolute Dampfspannung im Kessel 17·70 Pf. auf den Quadratzoll oder 2549 Pf. auf den Quadratf., absoluter Druck im Condensator ·49 Pf. auf den Quadratzoll oder im Cylinder 1·57 Pf., folglich beträgt dieser Druck 226 Pf. auf den Quadratfuss. Verdampftes Wasser in $58\frac{1}{2}$ Stunden 182307 Pf., was nach Abzug des condensirten Wassers in dem Mantel des Cylinders eine Brutto-Verdampfung von ·813, oder wenn man davon $\frac{1}{20}$ für das mechanisch mitgerissene Wasser abzieht, eine effective

Verdampfung von ·772 Kubikfuss per Minute gibt. Die Consumtion der Kohlen erster Qualität, wovon 1 Pfund 8·301 Pf. Wasser verdampfte, betrug 6·257 Pf. per Minute. Das Gegengewicht beträgt, auf den Quadratzoll der Kolbenfläche reducirt, 2·120 Pf. oder auf den Quadratfuss 305 Pfund. Der Widerstand der Pumpe beträgt beim Niedergang derselben, also beim Aufsteigen des Dampfkolbens, 2·5 Pfund per Quadratzoll, also 360 Pfund per Quadratfuss der Kolbenfläche. Die Reibung der leeren Maschine (jedoch mit Inbegriff der Kaltwasser- zu ·104 und Warmwasserpumpe zu ·019 Pf.) beträgt auf den Quadratzoll ·606, also auf den Quadratfuss der Kolbenfläche 87 Pfund beim Herabgehen und, wenn man für die Luftpumpe per Quadratzoll 1·388 Pf. hinzufügt, 269 Pfund beim Hinaufgehen des Dampfkolbens. Endlich machte diese Maschine während der Beobachtungszeit von $58\frac{1}{2}$ Stunden 39901 einfache Kolbengänge, was eine mittlere Kolbengeschwindigkeit von 89·92 Fuss per Minute gibt. Die in dieser Zeit gehobene Wassermenge, welche noch durch directe Messungen verificirt wurde, bildete eine Nutzlast von 9·235 Pf. auf den Quadratzoll der Kolbenfläche.

Mit diesen Werthen erhält man auf das Wiener Mass reducirt:
$D = 4{\cdot}821$, $F = 18{\cdot}135$, $L = 7{\cdot}627$, $\frac{l}{L} = {\cdot}63$, $\frac{l'}{L} = 1$, $a = {\cdot}1L$, $P = 2220{\cdot}3$, $p = 196{\cdot}87$, $S = {\cdot}692$, $R = 5{\cdot}0674$, $q' = 265{\cdot}684$, $q'' = 31{\cdot}359$, $f = 75{\cdot}784$, $f' = 234{\cdot}323$, $\delta = {\cdot}14$, $r = q + q''$, $m = 3568525$, $n = 214$ und $v = 86{\cdot}78$.

Mit diesen Werthen folgt zuerst (Nr. **382**, Relation d) $N = 1{\cdot}27298$ und (Nr. **383**, Relat. e) $N' = 0$, folglich ist (Nr. **385**, Formel 2):

$$Q = Fr = 22673{\cdot}1^{F.\ Pf.} \text{ und } E = Qv = 1967568^{F.\ Pf.}$$

oder

$$E_1 = \frac{1967568}{25800} = 76{\cdot}3 \text{ Pferdekräfte*)}.$$

Ferner folgt noch: $r = 1250{\cdot}26$, $q = 1218{\cdot}87$, $\frac{r}{144} = 8{\cdot}682$,
$\frac{q'}{144} = 1{\cdot}845$, $\frac{Qv}{S} = 2843306$, $\frac{Qv}{R} = 388280$, $\frac{25800\,R}{Qv} = {\cdot}0664$,

*) Pambour findet für dieses Beispiel in Folge eines Rechnungsfehlers statt 76 nur 74 Pferdekräfte und zwar soll statt der von ihm für Q angegebenen Zahl oder Nutzlast 27143 jene 27967 stehen.

$\frac{25800\,S}{Qv} = \cdot 00907$, $\frac{Qv}{25800\,R} = 15$, $\frac{Qv}{25800\,S} = 110$, so wie sich endlich der Kohlenverbrauch auf die sehr niedrige Ziffer von 4 Pfund per Stunde und Pferdekraft dabei herausstellt.

Beispiel 2. Nimmt man bei derselben Maschine verschiedene, so wie auch nach Formel (9) in Nr. **386** jenes Absperrungs- oder Expansionsverhältniss an, welches dem absoluten Maximum zukommt, sucht dann zu jedem dieser Werthe von $\frac{l}{L}$ nach Gleichung (7) den vortheilhaftesten Absperrungsmoment des Gleichgewichtsventils, hierauf nach der Formel (8) das entsprechende Gegengewicht q' und endlich zufolge der Gleichungen (5) und (6) die diesen Werthen entsprechende vortheilhafteste Geschwindigkeit und Nutzlast; so erhält man nach den Berechnungen von Pambour (mit den älteren Werthen von m und n, nahezu):

			Max. des Nutzeffectes.
$\frac{l}{L}$	= ·63	.... ·50	.... ·29
$\frac{l'}{L}$	= ·88	.... ·87	.... ·85
$\frac{q'}{144}$	= 2·448	.... 2·473	.... 2·477
v'	= 91·33	.... 112·72	.... 176·77
$Q' = Fr'$..	= 24221·5	 21617	 15082
$\frac{r'}{144}$	= 8·621	.... 7·694	.... 5·368
S	= ·692	.... ·692	.... ·692
E	= 2056672	 2265469	 2478764
E_1	= 80	 88	.... 96.

Anmerkung. Obschon durch eine frühere Absperrung, wie diese Werthe zeigen, der Nutzeffect von 76 auf 96 Pferdekräfte gesteigert werden kann, so ist es doch möglich, dass 1) der Gang der Maschine dadurch zu irregulär wird, 2) die Nutzlast, gegenüber den vielleicht schon bestehenden Pumpen zu klein und 3) die Geschwindigkeit des Kolbens zu gross und für die Conservirung der Maschine nachtheilig wird, so dass man sich bestimmt finden kann, die im ersten Beispiele angegebene Anordnung, wenn auch auf Kosten des Nutzeffectes, vor jener den Vorzug zu geben, welche dem Maximum des Nutzeffectes entspricht. Gleichwohl muss man für jede Maschine jene Bedingungen kennen lernen, für welche der Nutzeffect ein Maximum wird, um sich diesem wenigstens so weit wie möglich zu nähern.

Wir haben diese hier in Rede stehende, in dem berühmten Etablissement von Boulton und Watt ausgeführte Maschine schon bei unserer ersten Anwesenheit in England (J. 1839) in Thätigkeit gesehen und ihre Leistung beobachtet. Nach den darüber erhaltenen und genommenen Notizen hat der Piston oder Kolben der Wasserpumpe 33 englische Zoll im Durchmesser; er saugt beim Niedergehen und hebt oder presst beim Aufwärtsgehen das zu hebende Wasser in einen mit dem Hauptleitungsrohr communicirenden Windkessel von beiläufig 6 Fuss Durchmesser und 8 Fuss Höhe, von wo es dann nachhaltiger und gleichförmiger in die verschiedenen Leitungs- und Vertheilungsröhren getrieben wird.

Der Balancier schlägt an jedem der beiden Enden, im Falle der Dampfzufluss zu gross ist, auf zwei elastische Polster, wovon einer mit einer Glocke in Verbindung steht, um den Maschinenwärter aufmerksam zu machen, dass dieser Zufluss zu mässigen sei. Eine über zwei Rollen laufende Schnur ohne Ende bietet dem Wärter, er mag sich bei der Maschine unten oder in einer höhern Etage befinden, ein einfaches Mittel dar, den Steuerungs- oder Dampfzufluss-Hahn augenblicklich und jederzeit nach Bedürfniss zu reguliren.

Ausserdem war auf dem Balancier noch der Watt'sche Hubzähler angebracht (ein in einem Kästchen eingeschlossenes Uhrwerk, dessen liegendes Pendel, durch die Oscillationen des Balancier in vollkommen damit übereinstimmende Schwingungen versetzt, das Zählwerk in Thätigkeit bringt), um den Kohlenverbrauch gegen die Leistung der Maschine genau ermitteln zu können.

Cornwall-Maschine von einfacher Wirkung.

388. Was endlich die Cornwall-Maschine von einfacher Wirkung anbelangt, so weicht sie von der eben erörterten einfach wirkenden Watt'schen Maschine nur darin ab, dass sie 1. eine Hochdruckmaschine ist, bei welcher die Dampfspannung im Kessel von 2 bis 5 Atmosphären beträgt, 2. dass die Expansion dabei viel weiter getrieben und häufig schon bei $\frac{1}{10}$ des ganzen Kolbenlaufes abgesperrt wird, und dass 3. die Arbeit, d. i. die Hebung der Wassersäule, nicht während des Niederganges des Dampfkolbens, sondern während des Niedergehens des Gegengewichtes Statt findet.

Während nämlich der Dampf aus dem Kessel in den obern Theil des Cylinders, also über den Kolben zugelassen wird, steht der untere Theil desselben mit dem Condensator in Verbindung, in welchen der bereits gewirkte Dampf abzieht. Nachdem der abwärts gehende Kolben, in welcher Periode das Pumpengestänge sammt dem Gegengewichte gehoben wird, einen gewissen Weg zurückgelegt hat, wird der Dampfzufluss abgesperrt, so dass der Kolben seinen Lauf nur durch das Beharrungsvermögen und die Expansionskraft des Dampfes vollendet und dabei seine Geschwindigkeit allmälig bis auf Null herabgebracht wird. Um jedoch dabei jedem Stosse des Kolbens gegen den Cylinderboden vorzubeugen, stösst der Balancier auf dieser Seite mittelst eines Querstückes auf elastische Polster.

Sobald der Kolben seinen Lauf vollendet hat, wird das Abzugsventil in den Condensator geschlossen, dagegen das Gleichgewichtsventil geöffnet, wodurch der Dampf aus dem obern Raum des Cylinders in den untern strömen und so das Gleichgewicht zwischen dem Drucke gegen beide Kolbenflächen herstellen kann. Von diesem Momente an sinkt das gehobene Gegengewicht herab, bringt den Kolben an die Decke des Cylinders und übt zugleich den Nutzeffect aus. Bevor der Kolben noch ganz oben angelangt ist, wird das Gleichgewichtsventil geschlossen, dadurch der noch über dem Kolben befindliche Dampf comprimirt und so der erstere allmälig zum Stillstand gebracht, wozu auch noch im Brunnen selbst eine Haltvorrichtung gegen die Hauptpumpenstange zur Vorsicht angebracht ist.

Von da an beginnt, durch das Oeffnen des Dampf-Zuströmungsventils, der Kolbenlauf nach abwärts von Neuem.

Bei den vormals angewendeten Pumpen hatte die unterste die Einrichtung einer Hebepumpe und wirkte während des Niederganges des Dampfkolbens, während die übrigen die Hauptlast bildenden Druckpumpen, wie bereits bemerkt, während des Aufsteigens des Dampfkolbens arbeiteten. In der neuern Zeit wendet man jedoch auch d o p p e l t wirkende Druckpumpen an, welche den grossen Vortheil gewähren, dass die Leitungsröhren, unter übrigens gleichen Umständen, enger oder von einem geringeren Durchmesser sein können.

A n m e r k u n g. Wir haben eine solche doppelt wirkende Druckpumpe in Fig. 170 dargestellt, deren Wirkungsart aus dem blossen Anblicke der Figur erhellet. Beim Niedergehen des Druckkolbens K schliessen sich nämlich die beiden Ventile a', b, während sich jene beiden a, b' öffnen; das unter dem Kolben befindliche Wasser wird durch das Gurgelrohr C in das Steigrohr E gedrückt, während gleichzeitig das Wasser durch das Saugrohr A angesaugt und in den Pumpenkörper oder Stiefel F über den Kolben tritt. Beim Aufziehen des Kolbens öffnen sich die Ventile a', b, während sich jene a, b' schliessen; das über dem Kolben befindliche Wasser wird in das Steigrohr E getrieben und gleichzeitig durch das Saugrohr B

das Wasser angesaugt und in den Stiefel F unter den Kolben gebracht, u. s. w. fort.

Die hier angedeuteten Ventile sind nach der Angabe von Harvey und Wert mit doppeltem Sitz und zwar von ungleicher Grösse, so, dass sich der beim Oeffnen oder Schliessen äussernde Druck nur nach ihrer Differenz richtet und daher beliebig regulirt werden kann, so wie diese Ventile auch noch den Vortheil besitzen, dass sie sich ohne Stoss schliessen und dem Wasser augenblicklich den Zugang oder Abfluss gestatten oder denselben verhindern.

Ein solches Ventil, welches auch seiner Aehnlichkeit mit einer Krone wegen Kronventil genannt wird und in Fig. 170, a im geschlossenen, in Fig. 170, b im offenen Zustande im grössern Massstabe dargestellt ist, besteht aus einem unbeweglichen Theil $a\,b\,c\,d$ und einem beweglichen Theil $e\,f\,g\,h$. Der erstere bildet einen oben geschlossenen Cylinder, welcher am Umfange durchbrochen oder mit Oeffnungen (Fenstern) versehen ist, durch welche das Wasser (oder bei Dampfventilen der Dampf) von Aussen nach Innen treten kann; der bewegliche Theil oder das eigentliche Ventil ist an seinem Umfange ohne Durchbrechung, dagegen an der obern Basis der Fläche offen. Ist dieses Ventil, wie in Fig. 170, a geschlossen, so ist jeder Zufluss des Wassers (oder Dampfes) abgesperrt, wird dieses dagegen, wie in Fig. 170, b, ganz oder selbst nur zu einem ganz kleinen Theil gehoben, so wird dem Wasser (oder Dampf) sogleich ein beträchtlicher Durchgang geöffnet, indem die Seitenöffnungen augenblicklich, theils über, theils unter dem Halse $g\,h$ gänzlich frei werden. Ein weiterer Vortheil dieses Ventiles besteht darin, dass der Druck des Wassers (oder Dampfes) nur auf jene beiden schmalen Ränder oder Flächen, welche die ringförmigen Ventilsitze $a\,b$ und $c\,d$ bilden, Statt findet, dieses also sehr leicht ohne merkliche Kraftanstrengung bewegt werden kann.

389. Behält man dieselbe Bezeichnung wie bei der Wattschen Maschine in Nr. **382**, nach welcher D den Durchmesser des Cylinders, F die Kolbenfläche, L den ganzen Kolbenlauf, l jenen Theil davon, welcher bei offener Communication abwärts zurückgelegt wird, l' jenen Theil, welcher beim Aufwärtsgehen bis zum Absperren des Gleichgewichtsventils durchlaufen wird, q die auf die Flächeneinheit und Geschwindigkeit des Dampfkolbens reducirte Last der Hebepumpe, welche beim Niedergehen des Dampfkolbens das Wasser in das Reservoir für die Druckpumpe hebt, q' das eben so reducirte Gegengewicht, p den Dampfdruck von Seite des Condensators, f die (immer auf die Einheit der Kolbenfläche reducirte) Reibung der leeren Maschine bei diesem Kolbengange, $\delta(q + q')$ die Zunahme der Reibung wegen des Gegengewichtes q' und der Last q, welche von der

Hebepumpe und überhaupt allen zum Nutzeffect beitragenden Pumpen herrührt, f' die Reibung der leeren Maschine beim Aufwärtsgehen des Dampfkolbens (mit Inbegriff des von der Luft- und Kaltwasserpumpe u. s. w. herrührenden Widerstandes), q'' die Haupt-Nutzlast der Druckpumpe, bei diesem Kolbengange auf die Flächeneinheit und Geschwindigkeit des Dampfkolbens reducirt (welche Last keine additionelle Reibung zu f' erzeugt, weil dieser Widerstand q'' unmittelbar, ohne Vermittlung der Maschine von dem Gegengewicht in Bewegung gesetzt wird), a den freien Raum zu beiden Seiten des Cylinders, P den Druck des Dampfes auf die Flächeneinheit im Kessel und P' jenen beim Eintritt in den Cylinder, v die mittlere Kolbengeschwindigkeit (nach der Anzahl der die Nutzleistung erzeugenden Kolbengänge gemessen) und endlich S die effective Wasserverdampfung im Kessel bezeichnet; so hat man genau wie bei der Watt'schen Maschine für den Niedergang des Dampfkolbens (Nr. **382**):

$$n+P'=\frac{L}{l+a}\cdot\frac{1}{N}[(1+\delta)(q+q')+n+p+f]\ldots(A),$$

wobei $N=\frac{l}{l+a}+logn.\left(\frac{L+a}{l+a}\right)$ ist; dagegen für das Aufwärtsgehen desselben (Nr. **383**):

$$n+P'=\frac{L}{l+a}\cdot\frac{1}{N'}(q'-q''-f')\ldots(B),$$

wobei $N'=\frac{L-l'+a}{L+2a}\,logn.\left(\frac{L-l'+a}{a}\right)-\frac{l'+a}{L+2a}\,logn.\left(\frac{L+a}{l'+a}\right)$ ist; so wie endlich als Bedingung, dass die erzeugte Dampfmenge der verbrauchten gleich ist (Nr. **384**):

$$n+P'=m\frac{S}{Fv}\cdot\frac{L}{l+a}\cdot\frac{L+2a}{l'+a}\cdots(C);$$

durch dasselbe wie in Nr. **385** und Nr. **386** angewendete Verfahren erhält man aus diesen Relationen (A), (B), (C), wenn wieder $q+q''=r$ und $Fr=Q$ gesetzt wird, genau die in diesen beiden Nummern aufgestellten Formeln (1) bis (9), welche wir also hier nicht wieder ansetzen, mit alleiniger Ausnahme der Formel (8), welche dort aus der Relation (B), hier aber aus jener (A) erhalten wird, wenn man P statt P' setzt. Man erhält nämlich dadurch:

$$q'=\frac{\frac{N}{L}(n+P)(l+a)-(n+p+f)}{1+\delta}-q\ldots(8)$$

so, dass also das dem absoluten Maximum, also auch dem durch die Relation (9) (Nr. **386**) ausgedrückten Absperrungsverhältniss $\frac{l}{L}$ entsprechende Gegengewicht q' hier als eine Function dieses Verhältnisses $\frac{l}{L}$, dort dagegen als eine Function des Verhältnisses $\frac{l'}{L}$ erscheint, was damit zusammenhängt, dass bei der Cornwall-Maschine der Dampfkolben während seines Niederganges nicht auf die variable Last der Maschine wirkt, so, dass für den Fall des Maximums des Nutzeffectes, d. i. von $P' = P$ die Relation (A) ausser q' und $\frac{l}{L}$ keine unbestimmte Grösse enthält, dagegen bei der Watt'schen Maschine gerade umgekehrt der Kolben beim Hinaufgehen ohne Nutzlast arbeitet und es dann die Relation (B) ist, welche die beiden unbestimmten Grössen q' und $\frac{l'}{L}$ enthält, wovon die eine als Function der andern ausgedrückt werden kann.

390. Für die practische Anwendung der hierher gehörigen Formeln kann man nach Pambour, auf das Wr. Mass reducirt, setzen: $f = \frac{270}{D}$, $f' = \frac{150}{D}$, $\delta = \cdot 07$, $p = 95$ (für gute Maschinen), $a = \cdot 05 L$, $S = S'$, $m = 3568525$ und $n = 214$. Der Werth von P kann bei diesen Maschinen von 3700 bis 9000 variiren.

Beispiel. Bei einer neuerlich in den Wasserwerken zu *Old-ford* (*East-London Waterworks*) nach diesem Systeme aufgestellten Maschine, worüber der leitende Ingenieur Th. Wicksteed eine Reihe von sehr genauen Versuchen und Beobachtungen veröffentlichte (*An experimental inquiry concerning the Cornish and Boulton and Watt pumping engines. Weale, London* 1841), findet Folgendes Statt.

Nach englischem Mass hat der Cylinder einen Durchmesser von 80 Zoll, die Kolbenfläche nach Abschlag der Kolbenstange 34·858□F., der Kolbenlauf 10 Fuss, der freie Raum zu beiden Seiten beträgt ·05 dieses Laufes, das Absperrungsverhältniss betrug in den 5 Experimenten der Reihe nach ·603, ·477, ·397, ·352, ·313 $\left(= \frac{l}{L}\right)$, der bis zum Verschlusse des Gleichgewichtsventils zurückgelegte Weg des Kolbens berechnet sich (da nämlich hier dieses Ventil allmälig verengt und dann erst geschlossen, also auch der Dampf über dem Kolben nur allmälig comprimirt wird, so muss der Punct, wo man sich das Ventil plötzlich geschlossen denken kann, aus der Relation $\frac{F(L+a-l')}{Fa}=\frac{p'}{p}$, wobei p den Dampfdruck im Moment, als die freie Communication durch das Gleichgewichtsventil gehemmt, und p' den Dampfdruck über dem Kolben nach Vollendung seines Laufes bezeichnet, berechnet werden) zu 9·85 oder es ist $l'=\cdot985\,L$ *), die absolute Dampfspannung im Kessel betrug beziehungsweise 30·45, 34·7, 42·7, 45·7, 51·7 Pfund auf den Quadratzoll, die Verdampfung des Wassers per Minute eben so ·72770, ·76330, ·62454, ·61514, ·61160 Kubikfuss, der Kohlenverbrauch (einer sehr guten Qualität, wovon 1 Pfund 9·493 Pf. Wasser verdampfen kann) stellte sich beziehungsweise zu 4·791, 5·025, 4·112, 4·050, 4·026 Pfund per Minute, der Gegendruck von Seite des Condensators betrug ·730 Pf. auf den Zoll.

Ferner gab die Hebpumpe, welche während des Niederganges des Dampfkolbens wirkt und das Wasser in das Reservoir der Druckpumpe hebt, ·821 Pf. auf den Quadratzoll der Kolbenfläche reducirt, die während des Aufsteigens des Dampfkolbens wirksame Druckpumpe gab eben so reducirt 10·259 Pf., so, dass also die gesammte Last des während einer Oscillation gehobenen Wassers 11·090 Pf. auf den Quadratzoll beträgt; das Gegengewicht, eben so reducirt, gab 11·037 Pf. auf den Quadratzoll; die Reibung der leeren Maschinen betrug ohne ihre Pumpen ·185 Pfund auf den Quadratzoll der Kolbenfläche reducirt, dazu für die Warmwasserpumpe, welche beim Aufsteigen des Dampfkolbens wirkt, ·001 Pf., gibt für das Aufsteigen die Reibung von ·186 Pf.; dagegen für die beim Niedergehen des Kolbens wirksame Kaltwasserpumpe ·037 und für die Luftpumpe ·117 Pf. hinzugefügt, gibt für die gesammte Reibung während dieses Kolbenganges ·339 Pf. auf den Quadratzoll der Dampfkolbenfläche.

*) Bei dieser Maschine betrug nämlich der ursprüngliche Dampfdruck über dem Kolben vor jeder Comprimirung 6·7 Pfund auf den Quadratzoll, dagegen nach vollendetem Kolbenlauf (in dem freien Raum $\cdot05\,L$) 8·7 Pfund, also ist näherungsweise $6\cdot7 : 8\cdot7 = \cdot05\,L : x = \cdot065\,L$; da nun auch $x = L + a - l' = L + \cdot05\,L - l' = 1\cdot05\,L - l'$ ist, so folgt $l' = \cdot985\,L$.

Pambour findet nun mit diesen Werthen in den fünf genannten Versuchen (wobei noch ausserdem nach englischem Mass $m = 4100000$ und $n = 250$ ist) nach der obigen Formel (1) in Nr. **385** für die Geschwindigkeit der Maschine beziehungsweise 58·59, 69·92, 62·28, 65·02, 67·84 Fuss per Minute, während die directen Versuche folgende Werthe gegeben haben: 60·35, 73·81, 62·95, 64·23, 69·87, woraus eine sehr befriedigende Uebereinstimmung der Rechnung mit den Versuchen hervorgeht.

Anmerkung 1. Pambour berechnet noch für eine mittlere Dampfspannung im Kessel von 50 Pfund auf den Quadratzoll, für eine Verdampfung von ·66846 Kubikfuss Wasser und einen Kohlenverbrauch von 4·401 Pfund per Minute, die Geschwindigkeit, den Effect u. s. w. dieser Maschine bei verschiedenen Absperrungsverhältnissen und zwar bei den, diesen Verhältnissen entsprechenden vortheilhaftesten Gegengewichten, Absperrungen des Gleichgewichtsventiles und Belastungen des Dampfkolbens.

Da nun für diesen Fall, auf das Wiener Mass bezogen, $D = 6{\cdot}428$, $F = 32{\cdot}407$, $L = 9{\cdot}642$, $a = {\cdot}05\,L$, $p = 92$, $P = 6271{\cdot}85$, $R = 3{\cdot}564$, $S = {\cdot}59924$, $q = 102{\cdot}98$, $q' = 1384{\cdot}44$, $q'' = 1288{\cdot}12$, $r = q + q'' = 1391{\cdot}10$, $f = 42{\cdot}523$, $f' = 23{\cdot}331$ ist, so hat man (mit den vorigen Werthen von m, n, δ und da beziehungsweise $N = 1{\cdot}955$, $2{\cdot}235$ und $2{\cdot}613$, Compendium §. 550, so wie $N' = {\cdot}2300$, ·3390 und ·4979 wird):

			Max. des Nutzeffectes.
$\frac{l}{L}$	= ·30	·20	·10
$\frac{q'}{144}$	= 25·83	20·53	13·50
$\frac{l'}{L}$	= ·78	·72	·65
v'	= 38·47	57·79	106·62
$Q' = F'r'$	= 106167·7	80570	49887·5
$\frac{r'}{144}$	= 22·70	17·26	10·69
S	= ·59924	·59924	·59924
E	= 4073548	4655821	5319205
$E_{Pf\cdot kr.}$	= 158	180	206
$\frac{Q'v'}{R}$	= 1142971	130635	149250
$\frac{Q'v'}{S}$	= 6797900	7769560	8876600
$\frac{25800\,R}{Q'v'}$	= ·0226	·0198	·0173
$\frac{25800\,S}{Q'v'}$	= ·0038	·0033	·0029

$$\frac{Q'v'}{25800\,R} \cdots = 44{\cdot}30 \quad \ldots\ 50{\cdot}63 \quad \ldots\ 57{\cdot}85$$

$$\frac{Q'v'}{25800\,S} \cdots = 263{\cdot}41 \quad \ldots\ 301{\cdot}06 \quad \ldots\ 343{\cdot}96.$$

Da man endlich für das absolute Maximum aus der Relation (9) in Nr. **386** $\frac{l}{L} = {\cdot}0581$ findet, so erhält man noch für dieses Expansions- oder Absperrungsverhältniss (wegen $N = 2{\cdot}8109$ und $N' = {\cdot}54005$):

$$\frac{l}{L} \cdots\cdots\cdots = {\cdot}0581,$$

$$\frac{q''}{144} \cdots\cdots\cdots = 9{\cdot}795 \text{ Pfund},$$

$$\frac{l'}{L} \cdots\cdots\cdots = {\cdot}6317,$$

$$v'' \cdots\cdots\cdots = 151{\cdot}94 \text{ Fuss per Minute},$$

$$Q'' = Fr'' \ldots = 36013{\cdot}2 \text{ Pfund},$$

$$\frac{r''}{144} \cdots\cdots\cdots = 7{\cdot}717 \text{ Pfund},$$

$$S \cdots\cdots\cdots = {\cdot}59924 \text{ Kubikfuss per Minute},$$

$$E \cdots\cdots\cdots = 5471774 \text{ Fusspfund},$$

$$E_{Pf.\,kr.} \cdots\cdots = 216 \text{ Pferdekräfte u. s. w.}$$

Da jedoch, wie bereits bemerkt, die Maschine bei dieser sehr weit getriebenen Expansion des Dampfes einen zu ungleichförmigen Gang erhielte, so leistet man lieber auf das absolute Maximum im Nutzeffect Verzicht und sperrt den Dampf gewöhnlich schon bei $\frac{1}{3}$ seines Laufes ab.

(Die directe Rechnung mit den vorigen Zahlen gibt zwar Werthe, welche von den hier angegebenen, durch blosse Uebertragung der Pambour'schen, erhaltenen in etwas abweichen; allein für den vorliegenden Zweck der blossen Vergleichung bei verschiedenen Werthen von $\frac{l}{L}$ schien uns eine gänzliche Umrechnung überflüssig zu sein.) Dasselbe gilt vom Beispiel 2 auf S. 440.

Anmerkung 2. Bei dem bereits in Nr. **387** erwähnten Besuche der *East-London Compagnie* gehörenden Wasserwerke haben wir auch die hier in Rede stehende, von Harve in Cornwall gelieferte Dampfmaschine sammt dem Pumpwerk besichtiget und hierüber folgende Daten erhalten. Die Maschine kann nominell von 30 bis 200 Pferdekräfte arbeiten. Die Condensation ist dabei so vollkommen, dass das Vacuum einen Barometerstand von 28 bis 29 Zoll zeigt, während das äussere Barometer nur 30 (englische) Zoll hoch steht. Das mit dem Pumpengestänge verbundene Gegengewicht aus Gusseisen hat nahe 500 Wr. Centner und besitzt die Form einer Tonne. Der Dampf wird beiläufig nach $\frac{1}{3}$ des Kolbenganges abgesperrt. Die Maschine arbeitete damals etwas schneller, indem der Kolben per Minute sehr nahe 8 Doppelgänge machte; der Dampfkolben stieg nämlich nach unserer Beobachtung während 4 Secunden, stand 1 Secunde lang still, ging in $1\frac{1}{2}$ Secunde herab und ruhte etwas über $1\frac{1}{2}$ Secunde, worauf das Kolbenspiel von Neuem anfing.

Der Kolben des vereinten Saug- und Druckwerkes hat einen Durchmesser von 40 (engl.) Zollen bei einer Hubhöhe von 9 Fuss. Der Kolben treibt das Wasser bei seinem Niedergange in ein ausser dem Maschinenhaus stehendes, 125 Fuss hohes Rohr bis auf eine Höhe von 110 Fuss, und zwar liefert die Pumpe bei jedem solchen Niedergange nahe 40 Wr. Eimer Wasser, was bei 8 Kolbenspielen per Minute 320 Eimer, also stündlich über 19000 Eimer beträgt, und wenn dabei die Leistung der Dampfmaschine in runder Zahl zu 200 Pferdekräften gerechnet wird, einen Nutzeffect von 62 bis 63 Procent gibt.

Dieses genannte, mit dem Hauptleitungsrohr (von 3 Fuss Durchmesser) in Verbindung stehende Steigrohr ist unten 5, oben $3\frac{1}{2}$ Fuss weit und am untern Theile aus dicken, mit ringförmigen Rippen verstärkten, 8 Fuss hohen oder langen gusseisernen Röhrenstücken zusammengesetzt, während es am obern Ende in Röhrenstücken aus Eisenblech ausläuft. Befestigt ist dieses colossale Rohr hauptsächlich durch Ketten, welche von der Spitze herab in eine weite kreisförmige Basis auslaufen.

Neben diesem Steigrohr, welches das Wasser in die Vertheilungsrohre (deren Durchmesser allmälig von 36 auf 24, 18, 12 und zuletzt 3 Zoll abnehmen) und auf die obern Puncte der Gebäude der Stadt leitet, läuft noch ein 4zölliges Rohr bis auf eine Höhe von 90 Fuss, welches mit den vorhandenen 4 Dampfkesseln in Verbindung steht und diese speiset; es kann sonach der Dampf im Kessel keine höhere als die dieser Wassersäulenhöhe entsprechende Spannung annehmen. Die Dampfmaschine ist sammt dem Pumpwerk äusserst solid und elegant ausgeführt und der Gang ist dabei, trotz der grossen in Bewegung gesetzten Massen, ausserordentlich sanft und ruhig.

Atmosphärische Maschine.

391. Von den sogenannten atmosphärischen Maschinen wollen wir, da sie unserm Zwecke ferner liegen, nur so viel bemerken, dass sie zu den Niederdruckmaschinen mit Expansion und Condensation gehören, wobei die Dampfspannung im Kessel den Druck der Atmosphäre gewöhnlich um 1 bis $1\frac{1}{2}$ Pfund auf den Quadratzoll übersteigt. Der Dampf tritt aus dem Kessel in den oben offenen Cylinder unter den Kolben, wodurch dieser mit Hilfe des am entgegengesetzten Ende des Balancier ausser dem Pumpengestänge noch angebrachten Gegengewichtes gehoben wird; nachdem der eingetretene Dampf (häufig im Cylinder selbst) condensirt worden, wird der Dampfkolben durch den atmosphärischen Druck herabgetrieben und dabei die Nutzwirkung ausgeübt, d. i. die Wassersäule (sammt dem Gegengewicht) gehoben.

Anmerkung. Denkt man sich die obere Kolbenfläche auf jeden Quadratfuss mit einem Gewichte von 1845 Pf. belastet, so lässt sich diese Maschine als eine Watt'sche Dampfmaschine von einfacher Wirkung ansehen und eben so behandeln. (Man findet übrigens die ausführliche Entwicklung der atmosphärischen Dampfmaschinen in dem bereits angezogenen Pambour-schen Werke im 13. Kapitel.)

Locomotiv-Maschine.

392. Um schliesslich auch noch die Locomotive zu erwähnen, so darf man, wenn man dabei keine Expansion oder frühere Absperrung der Communication mit dem Kessel voraussetzt, diese also als Hochdruckmaschinen ohne Expansion und ohne Condensation ansieht, nur jene geringen Veränderungen in den Formeln von Nr. **378** anbringen, welche durch die Natur dieser Maschinen bedingt werden.

Bezeichnet man nämlich, während v die Kolbengeschwindigkeit bleibt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Locomotiv fortbewegt, mit V und den Durchmesser der Treibräder mit $\mathfrak{D}$, so kann man den auf die Flächeneinheit und Geschwindigkeit des Kolbens reducirten Widerstand von Seite des Blasrohrs durch $p'V$ und den Widerstand der Luft direct durch uV^2, folglich wieder auf die Einheit der Kolbenfläche bezogen (wegen $uV^2 : Fx = 2L : \pi\mathfrak{D}$), durch $\frac{\pi\mathfrak{D}}{2L} \cdot \frac{uV^2}{F}$ ausdrücken. Man muss daher in den genannten Formeln $q + \frac{\pi\mathfrak{D}}{2L} \cdot \frac{uV^2}{F}$ statt q, und $p + p'V$ statt p setzen.

Da überdies $\frac{V}{v} = \frac{\pi\mathfrak{D}}{2L}$ oder $V = \frac{\pi\mathfrak{D}}{2L} v$, und wenn man die directe Zugkraft an der Maschine mit K bezeichnet,

$$\frac{K}{Fq} = \frac{2L}{\pi\mathfrak{D}} \text{ oder } K = \frac{2L}{\pi\mathfrak{D}} \cdot Fq,$$

folglich auch:

$$KV = Fqv$$

ist; so folgt, wenn man mit Rücksicht auf die gemachte Bemerkung für v und Fq die Werthe aus den Formeln (1) und (2) in Nr. **378** und zugleich auch $q = \frac{K}{F} \cdot \frac{\pi\mathfrak{D}}{2L}$ setzt, für den allgemeinen Fall:

$$V=\frac{L}{L+a}\cdot\frac{mS}{(1+\delta)(K+uV^2)+\frac{2FL}{\pi\mathfrak{D}}(n+p+p'V+f)}\ldots(1),$$

$$K=\frac{L}{L+a}\cdot\frac{mS}{(1+\delta)V}-\frac{2L}{\pi\mathfrak{D}}\cdot\frac{F}{1+\delta}(n+p+p'V+f)-uV^2\ldots(2);$$

ferner ist:

$$S=\frac{L+a}{L}\cdot\frac{V}{m}\left[(1+\delta)(K+uV^2)+\frac{2L}{\pi\mathfrak{D}}F(n+p+p'V+f)\right]\ldots(3),$$

$$E=KV=Fqv\ldots(4);$$

für das Maximum des Nutzeffectes [aus den Formeln (5) bis (8)]:

$$V'=\frac{L}{L+a}\cdot\frac{\pi\mathfrak{D}}{2L}\cdot\frac{mS}{F(n+P)}\ldots(5),$$

$$K'=\frac{F}{1+\delta}\cdot\frac{2L}{\pi\mathfrak{D}}(P-p-p'V'-f)-uV'^2\ldots(6),$$

$$S=\frac{L+a}{L}\cdot\frac{2L}{\pi\mathfrak{D}}\cdot\frac{FV'}{m}(n+P)\ldots(7),$$

$$E_{max.}=K'V'\ldots(8).$$

Anmerkung. Wie man sieht, müsste man zur Bestimmung von V im allgemeinen Fall eine cubische Gleichung auflösen. Um dies zu vermeiden, nimmt man für V einen genäherten Werth an und setzt diesen im Nenner der Gleichung (1) statt V und V^2 und berechnet damit einen genauern Werth von V, welcher, für eine zweite Rechnung abermals im Nenner der genannten Formel substituirt, schon für die meisten Fälle einen hinreichend genauen Werth für V gibt.

393. Was ferner die numerischen Werthe der verschiedenen Coefficienten betrifft, so lässt sich zuerst der Coefficient f oder die Reibung der Maschine auf folgende Weise angeben.

Nach den neueren Versuchen von Pambour betrug die Reibung bei mehreren vierräderigen ungekuppelten Locomotiven mit 11zölligen Cylindern 104 Pfund, was, da die progressive Geschwindigkeit der Maschine 5·9 Mal grösser als die Kolbengeschwindigkeit war, auf die Kolbenfläche reducirt $5{\cdot}9\times104=613{\cdot}6$ oder nahe 614 Pfund, mithin, da beide Kolbenflächen zusammen 190 Quadratzoll ausmachten, auf den Quadratzoll dieser Flächen bezogen $\frac{614}{190}=3{\cdot}23$ Pfund ausmacht. Da sich ferner für gekuppelte Räder oder bei Maschinen mit 6 Rädern diese Ziffer höher, und zwar von 3·4 bis 3·6 stellt, so nimmt Pambour als Mittelwerth $3{\cdot}5\times144$ Pf. auf den Quadratfuss der Kolbenfläche bezogen. Auf das Wiener Mass und Gewicht reducirt, kann man also, wenn man in einzelnen Fällen nicht lieber selbst die Versuche machen will, $f = 3{\cdot}5 \times 144 \times {\cdot}8711 = 439{\cdot}1$, oder sicherer $f = 440$ setzen.

Obschon der vom Blasrohr herrührende Widerstand nicht blos mit der Kolbengeschwindigkeit, sondern auch mit der Grösse der Dampfentwicklung und der Blasrohröffnung variirt, so kann man doch die mittlern, gewöhnlich vorkommenden Werthe und Dimensionen dabei zum Grunde legen. Bei diesen mittlern Werthen fand Pambour bei einer Geschwindigkeit der Maschine von 10 Meilen per Stunde oder 880 Fuss per Minute diesen Widerstand gleich $1\frac{3}{4}$ Pf. per Quadratzoll der Kolbenfläche und zugleich, dass dieser Widerstand im umgekehrten Verhältnisse mit der Geschwindigkeit der Maschine stehe; dies gibt auf den Quadratfuss bezogen:

$$p'V = 1{\cdot}75 \times 144, \text{ für } V = 880,$$

folglich

$$p' = \frac{1{\cdot}75 \times 144}{880} = {\cdot}2864,$$

oder auf das Wiener Mass reducirt:

$$p' = {\cdot}2494 \text{ Pf.}$$

Was ferner den Widerstand der Luft betrifft, so rechnet Pambour bei einer Geleisweite von nicht mehr als 5 Fuss für die widerstehende Fläche einmal 70 Quadratfuss und dann noch so oft Mal 10 Quadratfuss, als Waggons (die Maschine und den Tender mit dazu gerechnet) vorhanden sind. Bezeichnet man allgemein diese widerstehende Fläche durch F und die Geschwindigkeit des Trains in engl. Meilen per Stunde mit V', so ist nach Pambour dieser Widerstand der Luft (wobei jedoch nur Räder von 3 Fuss vorausgesetzt werden) $= {\cdot}002687\,F V'^2$ Pf.; da nun aber die Meile 5280 Fuss enthält, so erhält man die Geschwindigkeit der Maschine in Fuss per Minute aus dem Verhältniss $\frac{V'}{V} = \frac{60}{5280}$, oder es ist $V' = \frac{60}{5280} V$ und daher

$$u V^2 = {\cdot}002687\,F \left(\frac{60}{5280}\right)^2 V^2 = {\cdot}0^6 347\, S V^2$$

oder $u = {\cdot}0^6 347\, F$, folglich ist, auf das Wiener Mass und Gewicht reducirt, $u = {\cdot}0^6 32516\, F$.

Was den Werth von S betrifft, so nimmt Pambour, da durch die besondern Umstände sehr viel Wasser mechanisch mitgerissen wird, die effective Verdampfung nur mit 76 Procent der Bruttoverdampfung in Rechnung und setzt also $S = \cdot 76\, S'$.

Endlich ist wieder $a = \cdot 05\, L$, $\delta = \cdot 14$, $p = 1845$, $m = 3788346$ und $n = 539$.

394. Da man die Dimensionen der Locomotive auch bei uns häufig nach englischem Mass ausdrückt, so setzen wir die practischen Formeln, um die Reduction auf das Wiener Mass zu ersparen, auch noch nach diesem Masse an. Diese sind, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung nach Pambour, folgende.

Für den allgemeinen Fall.

Geschwindigkeit der Maschine in (engl.) Fussen per Minute:

$$V = \frac{4348000\, S}{1197 K + \cdot 668 \frac{FL}{\mathfrak{D}} (2738 + f) + \cdot 191 \frac{FL}{\mathfrak{D}} V + \cdot 0^6 415\, S V^2 \text{ *)}}.$$

Zugkraft oder Nutzlast der Maschine in (engl.) Pfunden:

$$K = 3632500 \frac{S}{V} - \cdot 558 \frac{FL}{\mathfrak{D}} (2738 + f) - \cdot 160 \frac{FL}{\mathfrak{D}} V - \cdot 0^6 347\, S V^2.$$

Effective Wasserverdampfung in (engl.) Kubikfuss per Minute:

$$S = \frac{V}{4348000} \left[1 \cdot 197 K + \cdot 668 \frac{FL}{\mathfrak{D}} (2738 + f) + 191 \frac{FL}{\mathfrak{D}} V + \cdot 0^6 415\, S V^2\right].$$

Nutzeffect in Pfunden 1 Fuss hoch per Minute:

$$E = KV, \text{ detto in Pferdekräften } E_{Pf.\,kr.} = \frac{KV}{33000}.$$

Nutzeffect von 1 Pf. Brennmateriale in Fusspfund $= \frac{KV}{R}$.

„ „ 1 Kubikf. verdampftes Wasser in Fusspf. $= \frac{KV}{S}$.

Brennmaterial in Pfunden, welches 1 Pferdekr. erzeugt $= \frac{33000\, R}{KV}$.

Verdampftes Wasser in Kubikf., „ „ „ $= \frac{33000\, S}{KV}$.

Für das Maximum des Nutzeffectes:

$$V' = \frac{\mathfrak{D}}{L} \cdot \frac{S}{F} \cdot \frac{6504600}{620 + P},$$

*) $\cdot 0^6 415$ steht Kürze halber statt $\cdot 000000415$.

$$K' = \cdot 558 \frac{FL}{\mathfrak{D}} (P - 2118 - f) - \cdot 160 \frac{L}{\mathfrak{D}} FV' - \cdot 0^6 347 S V'^2,$$

$$S = FV' \frac{L}{\mathfrak{D}} \cdot \frac{620 + P}{6504600},$$

$$E_{max.} = K' V'.$$

395. Beispiel. Bei einer Locomotive fanden nach englischem Mass folgende Dimensionen Statt:

2 Cylinder von 12 Zoll Durchmesser gibt $F = 1{\cdot}57$ Quadratfuss.

Kolbenlauf 16 Zoll, also $L = 1{\cdot}33$ Fuss.

Dampfdruck im Kessel 65 Pfund auf den Quadratzoll, also $P = 65 \times 144$.

Brutto-Verdampfung 50 Kubikf. per Stunde, gibt $S = {\cdot}633$ per Minute.

Brennstoffverbrauch per Minute $9\frac{3}{4}$ Pfund, gibt $R = 9{\cdot}75$.

Reibung der Maschine, 3·62 Pf. auf den Quadratzoll der Kolbenfläche, gibt $f = 3{\cdot}62 \times 144$.

Endlich hatte die Maschine 5schuhige Räder, so dass also $\mathfrak{D} = 5$ ist.

Mit diesen Daten findet man nun aus den letztern Formeln, wenn man die Rechnung nicht blos für die dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Geschwindigkeit, sondern auch noch für eine Kolbengeschwindigkeit von 250 und 300 (engl.) Fuss (was einer Traingeschwindigkeit von 1473 und 1768 Fuss per Minute entspricht) durchführt, folgende Resultate:

			Max. des Effectes.
V	$= 1768$	1473	986
K	$= 247$	512	1328
S	$= {\cdot}633$	·633	·633
E	$= 436190$	753500	1309300
$E_{Pf.\,kr.}$	$= 13$	23	40
$\frac{KV}{R}$	$= 44740$	77280	134290
$\frac{KV}{S}$	$= 689100$	1190400	2068400
$\frac{33000\,R}{KV}$	$= {\cdot}74$	·43	·25
$\frac{33000\,S}{KV}$	$= {\cdot}048$	·028	·016.

Anmerkung. Will man die Geschwindigkeit in Meilen per Stunde und die Nutzlast in Tonnen ausdrücken, so muss man die Geschwindigkeit mit dem Factor $\frac{60}{5280}$ multipliciren und die für die Zugkraft gefundenen Zahlen durch 6 dividiren, weil zur Fortbewegung einer Last von 1 Tonne auf der horizontalen Eisenbahn im Mittel eine Kraft von 6 Pfund erforderlich ist. Die 3 obigen Fälle geben also:

Geschwindigkeit	= 20·11	.... 16·76	.... 11·22	Meilen per St.
Brutto-Last	= 41	 85	 221	Tonnen.

In dieser Last ist natürlich auch der Tender sammt Wasser und Brennmateriale mit inbegriffen.

Nach französischen Angaben verursacht die an der Locomotive angehängte Last per Tonne (à 1000 Kilogr.) mit Einschluss des Luftwiderstandes (bei einer Geschwindigkeit von 10 bis 12 Meter per Sec.) einen Widerstand von 5 Kilogramm. Dagegen beträgt der Widerstand der Locomotive selbst auf jede Tonne ihres Gewichtes (mit Einschluss der Reibung der Maschinentheile) das Doppelte, d. i. 10 Kilogramm.

Der Reibungscoefficient der Räder auf den Schienen kann, im Falle die Schienen trocken sind, mit $\frac{1}{5}$, wenn die Schienen etwas feucht und schlüpferig sind, mit $\frac{1}{10}$, und im Durchschnitt in der Rechnung mit $\frac{1}{8}$ angenommen werden.

Der Gegendruck auf die Kolbenflächen beträgt in der Regel $1\frac{1}{4}$ Atmosphäre oder 12500 Kilogramme auf den Quadratmeter.

Bezeichnet endlich Q die grösste Last (in Tonnen), welche eine Locomotive auf einer Eisenbahn noch fortschaffen kann, ohne dass ein Gleiten der Treibräder eintritt, q die Last, welche auf den Treibrädern ruht, α den Neigungswinkel der Bahn und f den Reibungscoefficienten für die Räder auf den Schienen; so ist

$$Q = \frac{1000 f q - q\,(10 + 1000\,Sin\,\alpha)}{5 + 1000\,Sin\,\alpha} \ldots (\alpha),$$

oder, wenn man die Steigung der Bahn durch den Bruch $\frac{1}{n}$ ausdrückt, wegen $Sin\,\alpha = \frac{1}{n}$, auch

$$Q = \frac{1000 f q - q\left(10 + \frac{1000}{n}\right)}{5 + \frac{1000}{n}} = \frac{200 f n q - 2 q\,(n + 100)}{n + 200},$$

denn es ist nach den vorigen Angaben, wie leicht zu sehen,

$$5\,Q + \frac{1000}{n}\,Q + 10\,q + \frac{1000}{n}\,q = 1000 f q.$$

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass die vorige Formel (α) ohne Aenderung auch für das Wiener Gewicht gilt, wenn man Q und q in Wiener Centner ausdrückt.

Nach der Zusammenstellung neuerer Versuche von den Ingenieuren Lechatelier, Flachat, Petiet und Polonceau zergliedert sich der Widerstand eines als Beispiel gewählten Eisenbahnzuges von 60 Tonnen bei einer mittlern Geschwindigkeit von 45 Kilometer per Stunde in folgender Weise:

1. *Widerstand des Zuges per Tonne der Brutto-Last.*

Widerstand, welcher von der Bewegung der Wägen herrührt	$6\cdot25^{k.}$
„ welcher der Reibung des Mechanismus der unbelasteten Maschine entspricht................	$2\cdot50$
„ welcher von der Reibung des Mechanismus durch den Dampfdruck erzeugt wird	$1\cdot75$
Summe ...	$10\cdot50^{k.}$

2. *Widerstand der Maschine per Tonne des Gewichtes der Maschine sammt Tender.*

Widerstand, welcher der Maschine als Fuhrwerk entspricht...	$6\cdot25^{k.}$
„ der Reibung der unbelasteten Maschine.........	$5\cdot75$
„ „ „ durch den Dampfdruck............	$4\cdot00$
Summe ...	$16\cdot00^{k.}$

(Es bilden nämlich die $4^{k.}$ dieser letzten Rubrik vom Gewichte der Maschine und Tender $= 26$ Tonnen, den eben so vielten Theil, als in der obigen ähnlichen Rubrik die $1\cdot75^{k.}$ von dem Totalgewicht $= 60$ Tonnen.)

Zur Berechnung des Widerstandes der remorquirten Züge (ohne Maschine und Tender) auf geraden Bahnen stellt Harding folgende Formel auf:

$$R = 2\cdot72 + \cdot094V + \cdot00484\frac{NV^2}{T} + 1000i,$$

in welcher R den Totalwiderstand in Kilogramm ausdrückt, V die Geschwindigkeit in Kilometer per Stunde, N den grössten Querschnitt des Zuges normal auf die Bahn, T das Gewicht des Trains in Tonnen, so wie i die grösste Steigung der Bahn bezeichnet.

Diese Formel stimmt für grosse Geschwindigkeiten von 60 bis 100 Kilometer ganz gut mit den Versuchen überein, gibt aber für kleinere Geschwindigkeiten etwas zu grosse Werthe. Die Züge sind dabei von 20 bis 100 Tonnen im Gewichte angenommen.

Die von dem Ingenieur der Lyoner Bahn Herrn Poirée schon im Jahre 1852 über die gleitende Reibung auf den Eisenbahnschienen constatirte Erscheinung, dass diese mit der Geschwindigkeit abnimmt, wurde durch die im Jahre 1856 von den Ingenieuren Bochet und Garella wiederholten Versuche bestätigt und bei Bekanntmachung ihrer Resultate stellten sie zugleich für diesen Reibungswiderstand die Formel auf:

$$f = \frac{Pk}{1 + av},$$

in welcher P den Druck zwischen den reibenden Flächen, so wie k einen blos von der Beschaffenheit der Schienen abhängigen Coefficienten bezeichnet, und zwar ist für vollkommen trockene Schienen $k = \cdot 30$, für gut trockene $k = \cdot 25$, für ziemlich trockene $k = \cdot 20$ und für feuchte oder nasse Schienen $k = \cdot 14$ zu setzen; dabei kann dieser Coefficient auch alle Zwischenwerthe annehmen. v ist die Geschwindigkeit des Gleitens, so wie a ein Coefficient, welcher streng genommen nach Umständen veränderlich ist, wofür man jedoch ganz gut einen constanten Mittelwerth, und zwar, wenn die Räder unmittelbar auf den Schienen gleiten, $a = \cdot 03$, und wie noch nachträglich Poirée mit dem Bremswagen von Cochot, bei welchem eiserne Kufen von grösseren Flächen auf den Schienen gleiten, gefunden hat, $a = \cdot 07$ setzen kann.

Noch spätere und genauere Versuche veranlassten Herrn Bochet, in die vorige Formel noch einen dritten Coefficienten einzuführen. (Man s. Zusatz 2.)

c) *Theorie nach den Anschauungen der mechanischen Wärmelehre.*

396. Um schliesslich wenigstens den Weg anzuzeigen, auf welchem die Theorie der Dampfmaschinen nach der mechanischen Wärmetheorie zu entwickeln sein wird, wollen wir hier noch aus Zeuner's Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie (Freiberg 1860) die wichtigsten auf den Wasserdampf sich beziehenden Grundgleichungen anführen und entwickeln.

Angenommen, es befinde sich in einem Dampfcylinder eine Mischung von Dampf und Wasser von der Temperatur t und zwar vom Dampfe m und vom Wasser $M - m$, also zusammen von M Kilogrammen; dabei sei p die der Temperatur t entsprechende Dampfspannung.

Dies vorausgesetzt, beträgt die in dem vorhandenen Dampfe und Wasser enthaltene Wärme beziehungsweise mq und $(M - m)\, W$, folglich in beiden zusammen oder in der ganzen Mischung die Wärmemenge:

$$mq + (M - m)\, W = M\, W + m\, (q - W),$$

oder da $q - W = l$ die latente Wärme ist (Nr. **363**, ε) auch:

$$MW + ml \ldots (a),$$

dabei besitzen W und q die oben in Nr. **363** (in β, β', ε', δ') angegebenen Werthe.

Haben nun diese allgemeinen Werthe m, W und l zu Anfang und zu Ende irgend einer Versuchsperiode beziehungsweise die Werthe m_1, W_1, l_1 und m_2, W_2, l_2, so folgt für die in der Mischung M enthaltene Wärmemenge im Anfange und am Ende dieser Periode nach dieser Relat. (a) beziehungsweise:

$$MW_1 + m_1 l_1 \text{ und } MW_2 + m_2 l_2,$$

folglich beträgt die Zunahme der innern Wärme, wenn man diese allgemein mit $\varDelta U$ bezeichnet:

$$\varDelta U = M(W_2 - W_1) + (m_2 l_2 - m_1 l_1),$$

oder in einer andern Form:

$$\varDelta U = M \varDelta W + \varDelta(ml),$$

daher auch, wenn man auf die Grenzen übergeht:

$$\mathrm{d}U = M \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + \mathrm{d}(ml),$$

und da endlich $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = c$ die specifische Wärme des Wassers bezeichnet (Nr. **363**, (a)), auch:

$$\mathrm{d}U = Mc\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(ml) \ldots (I)$$

als erste, in allen Fällen geltende Hauptgleichung für Dämpfe; dabei drückt $\mathrm{d}U$ statt einer Zunahme eine Abnahme der innern Wärme aus, wenn dieser Ausdruck negativ ausfällt.

397. Ist v das Volumen der Gewichtseinheit Dampf und w jenes der Gewichtseinheit Wasser, beide für die Temperatur t, so ist, wenn man Kürze halber $v - w = u$ setzt, zuerst das Gesammtvolumen der im gedachten Dampfcylinder enthaltenen Mischung:

$$mv + (M - m)w = mu + Mw \ldots (b)$$

und die latente Wärme (Nr. **363**, ε, γ', wenn man u statt V setzt):

$$l = L - Apu.$$

Setzt man diesen letztern Werth für l in die vorige Gleichung (1), so erhält man:

$$\mathrm{d}U = Mc\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(mL) - \mathrm{d}(mApu),$$

oder wegen $\mathrm{d}(mApu) = Amu \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + Ap\,\mathrm{d}(mu)$ auch:

$$\mathrm{d}U = Mc\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(mL) - Amu \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t - Ap\,\mathrm{d}(mu).$$

Nun gilt aber für den gesättigten Dampf die zuerst von Clapeyron entwickelte und von Clausius auf die nachstehende Form gebrachte Relation:

$$\frac{L}{u} = A\,T\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\ldots(c),$$

wobei $T = a + t = 273 + t$ die absolute Temperatur (Nr. **307**) bezeichnet, folglich ist auch, wenn man den daraus resultirenden Werth von $Au\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{T}$ in der vorigen Gleichung substituirt:

$$\mathrm{d}U + Ap\,\mathrm{d}(mu) = Mc\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(mL) - \frac{mL}{T}\mathrm{d}t\ldots(d).$$

Um dieser Gleichung eine einfachere Form zu geben und ihre Bedeutung besser zu übersehen, berücksichtige man, dass während der Dampfkolben um den Weg $\mathrm{d}v$ fortgeschoben wird, der Dampf eine Arbeit $p\,\mathrm{d}v$ verrichtet, wozu die Wärmemenge

$$Ap\,\mathrm{d}v\ldots(e)$$

erforderlich ist, weil A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bezeichnet (Nr. **306**).

Ist nun v das Volumen der ganzen im Cylinder enthaltenen Mischung, so ist nach der obigen Relation (b) $v = mu + Mw$ und wenn man differenziirt, da M constant ist und auch w, als Volumen der Gewichtseinheit Wasser, als constant angesehen werden kann, sofort $\mathrm{d}v = \mathrm{d}(mu)$ ist, so hat man für die in Arbeit umgewandelte Wärme: $Ap\,\mathrm{d}v = Ap\,\mathrm{d}(mu)$; wird dieser Werth in die vorige Gleichung (d) gesetzt, so erkennt man, dass der erste Theil dieser Gleichung aus der Summe zweier Wärmequantitäten besteht, wovon die eine die Zunahme der innern Wärme und die andere die in äussere Arbeit umgewandelte Wärme bezeichnet, beide zusammen bilden aber gerade die während der Expansion des Dampfes von Aussen zugeführte Wärme $\mathrm{d}Q$; es geht daher die vorige Gleichung (d) über in die folgende:

$$\mathrm{d}Q = Mc\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(mL) - \frac{mL}{T}\mathrm{d}t\ldots(II)$$

und diese kann als die zweite Hauptgleichung angesehen werden.

398. Statt der vorhin für die in Arbeit verwandelte Wärme angegebenen Relation $Ap\,\mathrm{d}(mu)$ lässt sich noch eine andere für die Behandlung der auf die Dampfmaschinen sich beziehenden Fragen wichtige Gleichung, und zwar auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnet man diese Wärmemenge durch dE, so ist für's Erste d$E = Ap\,\mathrm{d}(mu)$, oder wenn man im zweiten Theil dieser Gleichung den Ausdruck $Amu\,dp$ addirt und subtrahirt:

$$\mathrm{d}E = A\mathrm{d}(pmu) - Amu\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = Apu\,\mathrm{d}m + m\mathrm{d}(Apu) - Amu\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t,$$

oder mit Rücksicht auf die obige Relation (c) in Nr. **397**, auch:

$$\mathrm{d}E = (Apu)\,\mathrm{d}m + m\,\mathrm{d}(Apu) - \frac{mL}{T}\mathrm{d}t \ldots (f).$$

Nun ist aber nach der Relation (γ) und (δ) in Nr. **363** (wieder u statt V gesetzt):

$$Apu = B\,logn.\frac{T}{n},$$

wobei $B = 30{\cdot}456$ und $n = 100$ zu setzen ist, oder wenn man differenziirt, wegen $\mathrm{d}T = \mathrm{d}(a + t) = \mathrm{d}t$, auch:

$$\mathrm{d}(Apu) = \frac{B}{T}\mathrm{d}t;$$

setzt man diesen letztern Werth für d(Apu) in die vorige Gleichung (f), so erhält man die vorhin erwähnte, nämlich die dritte Hauptgleichung bildende Relation:

$$\mathrm{d}E = B\mathrm{d}m\,.\,logn.\frac{T}{n} - \frac{m(L-B)}{T}\mathrm{d}t \ldots (III).$$

Von diesen hier entwickelten drei Hauptgleichungen gibt die erste die Zu- oder Abnahme, also überhaupt die Veränderung in der innern Wärme der Dampf- und Wasser-Mischung an, sie ist integrabel und unter allen Umständen (ohne sonstige Bedingung) giltig. Die zweite Hauptgleichung gibt die von Aussen zugeführte Wärme und die dritte die in äussere Arbeit umgewandelte Wärme an; beide diese Gleichungen können nur unter gewissen Voraussetzungen integrirt und dürfen auch nur dann angewendet werden, wenn der Dampf (d. i. die Mischung) während seiner Ausdehnung fortwährend unter einem äussern Drucke steht, der in jedem Augenblicke der Spannung des Dampfes gleich ist.

399. Um eine Anwendung der hier für den gesättigten Dampf entwickelten Hauptgleichungen zu zeigen, wollen wir schliesslich noch folgende Aufgaben auflösen.

1. In einem Dampfcylinder befinden sich m_1 Kilogramme Dampf und $M - m_1$ Kilogramme Wasser, beide von der Temperatur t; es ist die Frage, wie viele Wärme dieser Mischung von Aussen zugeführt werden müsse, damit die Dampfmenge m_1, während sich der Dampf expandirt und den Kolben fortschiebt, constant bleibe, d. h. damit sich weder Dampf niederschlage noch welcher aus dem Wasser bilde; dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass der Kolben in jedem Augenblick einen der Dampfspannung vollkommen gleichen Druck zu überwinden habe?

Nehmen wir an, dass unter der gemachten Voraussetzung des Gegendruckes, welcher in jedem Augenblicke jenem des sich expandirenden Dampfes gleich sein soll und bei Dampfmaschinen immer angenommen werden kann, während der Dampf eine bestimmte Arbeit verrichtet, dessen Temperatur von t_1 auf t_2, und Spannung von p_1 auf p_2 sinken oder herabgehen soll; so hat man nach der letzten Hauptgleichung (III), deren Anwendung (so wie auch jener (II)) unter dieser Voraussetzung ohne weiteres gestattet ist, wegen $dm = 0$ (da m_1 constant sein soll) für die in Arbeit umgewandelte Wärme:

$$E = -m_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{L - B}{T} dt,$$

und da man für mittlere, bei Dampfmaschinen vorkommenden Temperaturen, für L den (von jenem (γ) in Nr. **363** nur wenig abweichenden) Werth:

$$L = 607 \cdot 31 - \cdot 7106 t$$

setzen kann und $T = 273 + t$ ist, so gibt die vorige Gleichung, wenn man die Integration ausführt:

$$E = m_1 \left[770 \cdot 864 \, logn. \left(\frac{a + t_1}{a + t_2} \right) - \cdot 7106 \, (t_1 - t_2) \right] \ldots (1).$$

Für diese hier vorausgesetzten mittleren Temperaturen kann man für $logn. T$ anstatt des in Nr. **363** Relat. (δ) angegebenen genaueren Werthes nach Zeuner den einfacheren Werth $logn. (a + t) = 5 \cdot 6650 + \cdot 00255 t$ setzen, dadurch geht die vorige Gleichung (1) über in jene einfache:

$$E = 1 \cdot 2551 m_1 (t_1 - t_2) \ldots (2),$$

und diese drückt sofort die Wärmemenge aus, welche in äussere Arbeit umgewandelt wird, wenn bei constant bleibender Dampfmenge m_1 die Expansion so weit getrieben wird, dass die Temperatur von t_1 auf t_2 herabsinkt.

Um nun auch die weitere Frage zu beantworten, welche Wärmemenge Q der vorausgesetzten Mischung von Dampf und Wasser von Aussen zugeführt werden müsse, damit eben die genannte Bedingung eintrete und die Dampfmenge m_1 constant bleibe, wollen wir zuerst aus der obigen Gleichung (I) (Nr. **396**) die Zunahme (oder Abnahme) U der innern Wärme bestimmen. Es folgt aber daraus, da m_1 constant ist:

$$U = M \int_{t_1}^{t_2} c \, dt + m_1 (l_2 - l_1).$$

Nun ist für Temperaturen, wie wir sie hier voraussetzen, die specifische Wärme des Wassers $c = 1{\cdot}0224$ und näherungsweise:

$$l = 575{\cdot}03 - {\cdot}7882\,t,\ \text{also}\ l_2 - l_1 = {\cdot}7882\,(t_1 - t_2),$$

daher folgt aus der vorigen Gleichung, wenn man gehörig substituirt und dann die Integration ausführt, für die Zu- oder Abnahme der innern Wärme während der Expansion des Dampfes:

$$U = ({\cdot}7882\,m_1 - 1{\cdot}0224\,M)\,(t_1 - t_2) \ldots (3).$$

Da nun aber im vorliegenden Falle immer $M \gtreqless m_1$ ist, so fällt auch dafür U in allen Fällen negativ aus, zum Beweis, dass die Temperatur während der Expansion des Dampfes abnimmt.

Ob jedoch diese verschwundene innere Wärme wirklich auch jener gleich ist, welche der verrichteten äussern Arbeit entspricht, kann auf folgende Weise untersucht werden.

Offenbar muss die unter den gegebenen Bedingungen der Mischung von Aussen zuzuführende Wärmemenge Q gleich sein der Summe aus der Zunahme der innern und der in äussere Arbeit umgewandelten Wärme, d. h. es muss sein:

$$Q = U + E \ldots (4),$$

oder wenn man für U und E die Werthe aus (3) und (2) setzt, auch:

$$Q = (2{\cdot}0433\,m_1 - 1{\cdot}0224\,M)\,(t_1 - t_2) \ldots (5).$$

Diese selbe Gleichung erhält man aber auch aus der obigen Hauptgleichung (II) unmittelbar durch Integration, wenn man in derselben $c = 1{\cdot}0224$, $L = 607{\cdot}31 - {\cdot}7106\,t$, $logn.\,(a + t) = 5{\cdot}6650 + {\cdot}00255\,t$, $a = 273$, also $\dfrac{L}{a+t} = -{\cdot}7106 + \dfrac{801{\cdot}304}{a+t}$ setzt, zum Beweis, dass die verschwundene Wärme in der That jener der äussern Arbeit entsprechenden gleich ist.

2 Nehmen wir jetzt den einfachen Fall an und setzen, dass sich im Cylinder blos M Kilogramm gesättigter Dampf ohne Beimischung von Wasser und zwar wieder von der Temperatur t_1 befinde, so ist jetzt $m_1 = M$ und man erhält, wenn während der Expansion der Dampf, dessen Temperatur von t_1 auf t_2 herabsinkt, fortwährend gesättigt bleiben und sich auch kein Theil desselben niederschlagen oder condensiren soll, für die in Arbeit umgewandelte Wärmemenge nach Gleichung (2):

$$E = 1{\cdot}2551\,M\,(t_1 - t_2) \ldots (6).$$

Die Zunahme an innerer Wärme ist nach Relation (3):

$$U = -{\cdot}2342\,M\,(t_1 - t_2) \ldots (7),$$

wobei das negative Zeichen anzeigt, dass hier die innere Wärme nicht zu-, sondern abnimmt.

Zufolge der vorigen Gleichung (5) ist daher die nöthige Wärmemenge, welche dem Dampfe unter diesen Voraussetzungen von Aussen zugeführt werden muss:

$$Q = 1{\cdot}0209\,M\,(t_1 - t_2) \ldots (8).$$

Setzen wir, um auf ein specielles Beispiel überzugehen, den Fall, es befinde sich im Cylinder gerade ein Kilogramm gesättigter Dampf von 4 Atmosphären Spannung ohne Beimischung von Wasser, und nehmen an, dass sich derselbe bis auf 1 Atmosphäre expandiren soll.

Da den Dampfspannungen von 4 und 1 Atmosphäre nach Regnault beziehungsweise die Temperaturen (Nr. **361**) von 144 und 100 Grad entsprechen (nach den in 3. von Nr. **359** angeführten Regnault'schen Formeln erhält für $t_1 = 144$, also $t = 164^0$ die Quecksilbersäule h eine Höhe von 3040 Millimeter, also der Dampf eine Spannung von 4·05 Atmosphären), so hat man $t_1 = 144$ und $t_2 = 100$ zu setzen, folglich wegen $M = 1$ aus Gleichung (6) für die in äussere Arbeit umgewandelte Wärme:

$$E = 1{\cdot}2551 \times 44 = 55{\cdot}224 \text{ Calorien.}$$

Die durch die Expansion des Dampfes verrichtete Arbeit beträgt sonach:

$$55{\cdot}224\, A = 55{\cdot}224 \times 424 = 32415 \text{ Kilogramm-Meter}$$

oder 432 Pferdekräfte.

Damit jedoch der gestellten Bedingung gemäss die Dampfmenge dabei constant bleibe, d. h. sich während der Expansion kein Theil des Dampfes im Cylinder niederschlage oder condensire, muss dem Dampfe von Aussen die Wärmemenge (Gleich. 8):

$$Q = 1{\cdot}0209 \times 44 = 44{\cdot}920 \text{ Calorien}$$

zugeführt werden.

Die Wärmemenge, welche der Dampf bei seiner Expansion verliert oder abgibt, beträgt nach der Relation (4):

$$U = E - Q = 10{\cdot}304 \text{ Calorien.}$$

Anmerkung. Die vorstehenden Entwicklungen zeigen nun deutlich, dass vom Standpuncte der mechanischen Wärmetheorie aus die bisherigen Ansichten über die Expansionswirkungen des Dampfes bei Dampfmaschinen unrichtig sind; denn nicht nur, dass der gesättigte Dampf den Gasgesetzen, d. i. den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac, nicht folgt, erweist sich nach dieser Wärmetheorie nun auch die Pambour'sche Voraussetzung, nach welcher der Dampf (Nr. **359**) während seiner Ausdehnung ohne äussere Wärmezuführung fortwährend gesättigt bleibe und sich auch kein Theil desselben condensire, als unhaltbar. Es muss vielmehr, wie sich jetzt nach der mechanischen Wärmetheorie zeigt, dem Dampfe während seiner Ausdehnung, d. i. während er Arbeit verrichtet, so viel Wärme von Aussen zugeführt werden, dass diese auf jedes Kilogramm Dampf auf je 1 Grad Abnahme seiner Temperatur (durch die Expansion bewirkt) wegen $c = 1{\cdot}0224$ (als specifische Wärme des Wassers bei mittlerer Temperatur) etwas über 1 Wärmeeinheit entspricht, wenn man verlangt, dass sich dabei kein Theil des Dampfes niederschlage.

Da nun aber bei unseren Dampfmaschinen dem Cylinder, in welchem (wenn es sich um eine Expansionsmaschine handelt) der Dampf expandirt, von Aussen keine Wärme zugeführt wird, so muss man wohl mit Recht annehmen, dass während dieser Expansion immer auch eine theilweise

Condensation des Dampfes im Cylinder stattfindet. Diese für die Theorie der Dampfmaschinen so wichtige Entdeckung wurde fast gleichzeitig von Clausius und Rankine gemacht.

Was die weitere Anwendung dieser Wärmetheorie auf Probleme der Dampfmaschine betrifft, so verweisen wir auf das mehr erwähnte treffliche Buch: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie mit besonderer Rücksicht auf das Verhalten des Wasserdampfes", von Dr. Gustav Zeuner, Prof. der Mechanik und theoret. Maschinenlehre am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Freiberg 1860.

Auch hat Herr Gust. Schmidt, k. k. Kunstmeister, seither (Freiberg 1861) eine Theorie der Dampfmaschinen nach dieser mechanischen Wärmetheorie bearbeitet und herausgegeben.

Zusatz 1.

1. Projicirt man auf eine beliebige gerade Linie die Bewegung eines materiellen Punctes im Raume, so wie auch die Kraft, welche dessen Beschleunigung bewirkt, so besteht in jedem Augenblick zwischen der Projection dieser Kraft und der Projection der Bewegung, welche in der Projection sofort eine geradlinige ist, genau dieselbe Relation, wie zwischen der ursprünglichen Kraft und der im Allgemeinen krummlinigen Bewegung des materiellen Punctes im Raume.

Ist nämlich bei einer solchen Bewegung im Raume m die Masse des beweglichen Punctes und in einem bestimmten Augenblicke P die Intensität der variablen Kraft, so wie V die Grösse der veränderlichen Geschwindigkeit, und sind auf irgend eine Gerade (als Projectionsgerade) bezogen in dem nämlichen Augenblicke p und v die Projectionen von P und V, so findet eben so, wie (Nr. **125**) $P = m\frac{dV}{dt}$ ist, auch die Relation $p = m\frac{dv}{dt}$ Statt.

2. Um diesen in seiner Anwendung (Nr. **131**, 5) so wichtigen Satz zu beweisen, muss man sich für's Erste an die Fundamentalsätze der Projectionen von Puncten oder Linien im Raume auf gegebene Projectionsebenen oder Geraden erinnern.

Unter der Projection a eines Punctes A im Raume auf eine gegebene Gerade (Projectionsgerade) versteht man nämlich den Fuss- oder Durchschnittspunct jener geraden Linie, welche man mit einer gegebenen Ebene (Directionsebene) parallel aus dem zu projicirenden Puncte A an die Projectionsgerade gezogen hat.

Projicirt man nach derselben Methode die Endpuncte A und B irgend einer geraden Linie AB im Raume auf irgend eine Gerade, und sind a und b diese Projectionen, so ist die zwischen diesen Puncten liegende gerade Linie ab die Projection von AB auf diese nämliche Gerade. Zugleich folgt auch, dass, wenn man die Projection dieser Geraden AB auf was immer für eine andere mit der erstern Projectionsgeraden parallelen Geraden vornimmt, diese Projection ab (weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind) stets dieselbe Länge hat.

Jenachdem die genannte Directionsebene auf der Projectionsgeraden perpendikulär oder schief steht, sind diese Projectionen orthogonal oder schief.

3. Stellt am (Fig. 160′) eine Geschwindigkeit oder eine Kraft vor, welche man in drei auf einander senkrechte Componenten ab, ac, ad parallel mit den drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ zerlegt hat, und projicirt man diese Gerade am orthogonal auf eine mit der Achse AX parallele Gerade UV (wobei also die Ebene der yz die Directionsebene bildet), so ist, wie leicht zu sehen, $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ diese Projection und gleich der Componente ab, weil ab die Projection der Diagonale am auf die Kante ab als einer mit UV parallelen Geraden ist. (Vorige Bemerkung.)

4. Es sei nun $A'S$ (Fig. 166) die von dem materiellen Puncte, dessen Masse $= m$ sein soll, im Raume beschriebene Curve oder Trajectorie und M die Position oder Lage dieses Punctes in irgend einem Zeitmomente. Es bezeichne ferner MN die auf der in M an die Curve gezogene Tangente MT liegende Geschwindigkeit V, so wie MQ die Grösse der nach der Richtung MP wirkenden Kraft P in dem eben zu betrachtenden Augenblicke. Endlich sei UV jene Gerade, auf welche diese allgemeine Bewegung im Raume projicirt werden soll.

Wird diese Projection ausgeführt, so ist für den genannten Zeitmoment $mn = v$ die Projection der Geschwindigkeit $MN = V$, und $mq = p$ die Projection der Kraft $MQ = P$, folglich $\frac{dv}{dt}$ die in demselben Augenblicke stattfindende Beschleunigung der nach der geraden Linie UV gedachten Bewegung.

Legt man durch den Anfangspunct A der Bewegung ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ in der Weise, dass die Achse AX zu der gegebenen Geraden (als Projectionsgerade) parallel wird, so kann man die Bewegung des materiellen

Punctes m im Raume so ansehen, als wäre sie aus drei Seitenbewegungen nach diesen Achsen zusammengesetzt. Es wird daher die im Puncte M der Curve $A'S$ stattfindende Geschwindigkeit V die Resultante aus drei Seitengeschwindigkeiten nach den Achsen AX, AY, AZ sein. Von diesen drei Componenten ist die erstere nach der Bemerkung der vorigen Nr. nichts Anderes, als die Projection mn. Eben so erscheint die Kraft P als die Resultirende von drei Seitenkräften nach AX, AY, AZ, d. i. als die Diagonale des Parallelopipedes, dessen zusammenstossende Seiten mit diesen Achsen parallel sind und wobei die mit AX parallele Componente p wieder nichts Anderes als eben die Projection mq ist.

Dies vorausgeschickt und berücksichtigend, dass jede dieser drei geradlinigen Bewegungen genau so stattfindet, als ob sie allein und von den beiden übrigen unabhängig wäre, ist für jene nach der Richtung AX, so wie dies überhaupt für jede geradlinige Bewegung der Fall, nach Nr. **125** die bewegende Kraft in jedem Augenblicke gleich der Masse des bewegten Punctes, multiplicirt in die in diesem Augenblicke stattfindende Beschleunigung. Da nun hier die Beschleunigung nach AX oder UV gleich $\frac{dv}{dt}$ ist (wegen $ab = \alpha\beta = \alpha'\beta'$ in der vorigen Nr.), so folgt in der That, wie zu beweisen war, die Relation:

$$p = m\frac{dv}{dt} \dots (1).$$

Anmerkung. Es ist einleuchtend, dass man statt der orthogonalen auch jede schiefe Projection hätte wählen können.

Folgerungen.

1. Ist als specieller Fall die im Raume betrachtete Bewegung geradlinig, und nimmt man diese gerade Linie (als Richtung der Bewegung) selbst für die Projectionsgerade UV, so wird offenbar $v = V$ und $p = P$, mithin geht die vorige Relation (1) in die ursprüngliche:

$$P = m\frac{dV}{dt}$$

selbst über.

2. Wirken auf den materiellen Punct m mehrere Kräfte, so darf man die vorige Kraft P nur als die Resultirende aus

allen diesen Kräften ansehen, um zu demselben Resultate zu gelangen.

3. Ist die hier angenommene variable Geschwindigkeit V die Resultirende aus den Seitengeschwindigkeiten u, u', u''..., welche mit der Achse der x oder AX beziehungsweise die Winkel α, α', α''... bilden, so wäre die obige Projection V (in einem bestimmten Augenblicke):

$$v = u \operatorname{Cos} \alpha + u' \operatorname{Cos} \alpha' + u'' \operatorname{Cos} \alpha'' + \dots$$

weil nach einem bekannten Satze der Geometrie die Schlussseite eines Polygones gleich ist der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf irgend eine Gerade.

Es ist daher auch die Beschleunigung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d \,.\, u \operatorname{Cos} \alpha}{dt} + \frac{d \,.\, u' \operatorname{Cos} \alpha'}{dt} + \frac{d \,.\, u'' \operatorname{Cos} \alpha''}{dt} + \dots$$

der projicirten Totalgeschwindigkeit V gleich der algebraischen Summe der Beschleunigungen aus den projicirten Seitengeschwindigkeiten.

Hieraus folgt auch ferner, dass die Projection der Intensität der Kraft P in irgend einem Augenblicke, d. i.

$$p = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d \,.\, u \operatorname{Cos} \alpha}{dt} + m \frac{d \,.\, u' \operatorname{Cos} \alpha'}{dt} + \dots$$

ist.

Zusatz 2.

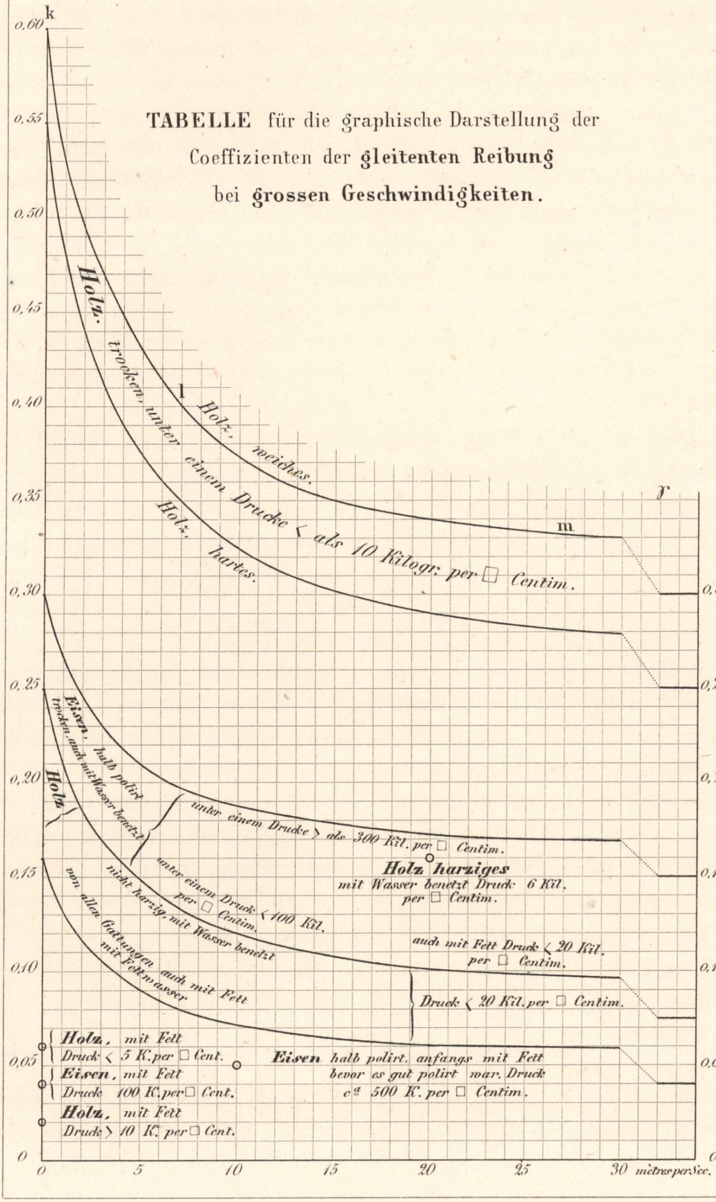
1. Es sind in der neuesten Zeit über die gleitende Reibung mit grossen Geschwindigkeiten, wie solche beim Eisenbahnbetriebe vorkommen, zahlreiche Versuche angestellt worden, welche geeignet sind, diesen Gegenstand in ein neues Licht zu setzen und die bisherigen Reibungsgesetze mehr oder weniger zu modificiren. Namentlich sind es die ganz kürzlich von dem *Ingénieur des mines* Hrn. Bochet, auf der französischen Westbahn in grosser Zahl und mit aller möglichen Genauigkeit und Vorsicht ausgeführten Experimente *), auf die wir hier aufmerksam machen und deren Resultate wir dem Wesentlichen nach anführen wollen.

---

*) *Nouvelles recherches expérimentales sur le frottement de glissement (Annales des mines, Tome XIX. Paris* 1861.)

ZU ZUSATZ 2.

TABELLE für die graphische Darstellung der Coeffizienten der **gleitenten Reibung** bei **grossen Geschwindigkeiten.**



Diese Versuche wurden theils mit bis zum Stillstand gebremsten Rädern, theils mit Radschuhen oder Schlittenkufen und zwar von verschiedenen reibenden Oberflächen (wie Eisen, Holz, Leder, Gutta-Percha) und zwar von verschiedener Grösse der Reibungsflächen, und endlich mit verschiedenen Geschwindigkeiten (von 0 bis 25 Meter per Secunde) vorgenommen. Die Eisenbahnschienen waren dabei vollkommen trocken, bald feucht, dann sehr nass, so wie endlich auch mit Oel bestrichen. Der Totaldruck zwischen den Reibungsflächen betrug zwischen 6 und 7 Tonnen (à 1000 Kilogramm). Die reibenden Oberflächen wurden in 5 verschiedenen Grössen angewendet und zwar betrugen diese der Reihe nach 400 — 500, 700—800, 1000—1500, 2000—2600 und 3000 — 4000 Quadrat-Centimeter, wodurch auf 1 Quadrat-Centimeter als Flächeneinheit ein Druck (der sogenannte respective Druck) von beziehungsweise 15, 10, 6, 4 und 2 Kilogramm entfiel.

2. Hr. Bochet glaubt, obschon sich bei diesen Versuchen Erscheinungen ergaben, wofür er heute noch keine genügenden Erklärungen zu geben weiss, dass sich die wesentlichsten dabei ausgesprochenen Gesetze oder der Betrag der Reibung R durch die nachstehende Formel:

$$R = p\left(\frac{k-\gamma}{1+av}+\gamma\right)\ldots(1)$$

ausdrücken lasse, in welcher p den Totaldruck zwischen den reibenden Flächen, v die Geschwindigkeit der gleitenden Bewegung, so wie k und γ zwei Coefficienten bezeichnen, welche von den verschiedenen dabei obwaltenden Umständen abhängen und wobei immer $k > \gamma$ ist; a bezeichnet einen dritten Coefficienten, welchen man ohne Fehler als constant und zwar zu ·3 annehmen kann, wenn die Geschwindigkeit v in Metern per Secunde ausgedrückt wird.

Trägt man die Geschwindigkeiten v als Abscissen und die entsprechenden Reibungscoefficienten f als rechtwinkelige Ordinaten auf (siehe die beiliegende Tafel zu Zusatz 2), so stellt die Gleichung $f = \frac{k-\gamma}{1+av}+\gamma$ einen, von einem bestimmten (nach Umständen höher oder tiefer liegenden) Punct k der Ordinatenachse aus nach abwärts gehenden und gegen die Abscissenachse convex bleibenden Ast klm (der angehängten Figur) einer Hyperbel vor, für welchen die Abscissenachse selbst, oder nach Umständen eine mit ihr parallele Gerade die Assymptote bildet.

Hieraus folgt, dass k den Werth der Reibung R für eine unendlich kleine Geschwindigkeit v vorstellt, ein Werth, welcher in der Regel auch beim Beginne der Bewegung stattfindet; nur wenn Holz oder Leder auf feuchten oder mit Oel bestrichenen Schienen gleitet, wird ausnahmsweise beim Beginne der Bewegung die Reibung grösser als k und zwar stieg diese bis auf $2k$, während sie in allen übrigen Fällen $= k$ blieb.

Der Coefficient γ bezeichnet die Höhe über der Abscissenachse der mit dieser parallelen Assymptote; diese Gerade bildet die Grenze, gegen welche der Reibungscoefficient bei beständig zunehmenden Geschwindigkeiten v ohne Ende convergirt.

3. Die aus diesen zahlreichen Versuchen abgeleiteten Gesetze sind nach Bochet im Wesentlichen folgende:

a) Die Reibung nimmt ab, wenn die Geschwindigkeit der Bewegung zunimmt (wenigstens innerhalb der Versuchsgrenzen von 0 bis 25 Meter per Secunde).

b) Die Annahme, dass der Betrag der Reibung von der Grösse der Reibungsflächen unabhängig, folglich dem Totaldruck zwischen diesen Flächen proportional sei, ist nicht in allen Fällen, sondern nur so lange richtig, als der specifische Druck (Druck auf die Flächeneinheit) zwischen den reibenden Flächen nur gering ist.

c) Die beiden Coefficienten k und γ der obigen Gleichung (1) sind gewisse, bis jetzt noch nicht hinlänglich bekannte Functionen dieses specifischen Druckes.

d) Auch variiren diese eben genannten Coefficienten von einander unabhängig je nach Verschiedenheit der Körper, der Politur der reibenden Flächen und der dazwischen gebrachten Schmiermittel.

e) Die Werthe dieser Coefficienten, folglich auch die der Reibung selbst, variiren innerhalb gewisser Grenzen selbst bei dem scheinbaren Vorhandensein von ganz gleichen Umständen und Verhältnissen.

f) Im Allgemeinen findet gegen die bisherige Annahme beim Beginne der Bewegung (von der Ruhe aus) kein besonderer (also kein grösserer) Reibungswiderstand Statt, sondern der Coefficient k hat dabei denselben Werth, wie für unendlich kleine Geschwindigkeiten. Ausnahmen sind dabei allerdings möglich, wie z. B. solche bei den in Rede stehenden Versuchen bei Holz und Leder auf nassen oder fetten Schienen wirklich vorgekommen sind, wobei k auf das Doppelte stieg.

g) Die stärkste Reibung fand zwischen Holz (namentlich weichem), Leder und Gutta-Percha auf trockenen Schienen Statt. Der Werth von k stieg dabei öfters bis ·7, während er niemals unter ·4 herabging; für gewöhnlich war k für weiches Holz $=$ ·60 und für hartes $=$ ·55.

Für Eisen (auf Eisen) war die Reibung stets kleiner; nur für grobes und rauhes stieg der Coefficient k bis ·6, für gewöhnlich war $k =$ ·4 und öfter blos ·25.

War die reibende Fläche (des Eisens) nur halbwegs polirt, so stieg k niemals über ·4, für gewöhnlich war dabei $k =$ ·3 bis ·2, und fiel in manchen Fällen sogar bis ·17 und ·12 herab.

Es war endlich dabei auch gleichgiltig, ob die Schienen trocken oder nass, ja selbst mit Oel bestrichen waren; nur wenn in diesem letztern Falle die reibenden Flächen sehr klein, der specifische Druck also sehr gross war, wurde die Reibung durch das Einschmieren der Schienen mit Oel sehr vermindert.

So wenig aber bei der Reibung von Eisen auf den Schienen der Zustand der letzteren (ob fett, nass oder trocken) im Allgemeinen einen Einfluss hatte, um so mehr machte sich dieser verschiedene Zustand bei der Reibung von Holz, Leder und Gutta-Percha auf den Schienen geltend; schon blosses Wasser konnte die Reibung mehr oder weniger vermindern, weniger bei harzigen als den gewöhnlichen Hölzern, noch weniger bei Gutta-Percha. Bei Anwendung von Oel oder wässeriger Wagenschmiere wurde dabei die Reibung derart vermindert, dass k für Holz und Leder auf ·2 bis ·16, ja in manchen Fällen selbst bis ·05 herabging.

Uebrigens zeigte sich bei Anwendung von Oel oder sonstiger Schmiere die Verminderung der Reibung um so bedeutender, je kleiner die reibenden Flächen, also je grösser der respective Druck (auf die Flächeneinheit) war.

h) Die Reibungswiderstände der verschiedenen Körper oder Stoffe weichen beim Beginne der Bewegung und bei kleinen Geschwindigkeiten am meisten von einander ab, und nähern sich bei wachsenden Geschwindigkeiten, wobei, wie bemerkt, die Reibungswiderstände überhaupt abnehmen, einander immer mehr. Diese Annäherung oder dieses Zusammenlaufen ist zugleich um so grösser, je polirter die Reibungsflächen sind und um so besser sie eingeschmiert werden.

Auch kann man sagen, dass die verschiedenen Körper, wenn ihre reibenden Oberflächen gut polirt und zweckmässig eingeschmiert sind, bei einem mässigen specifischen Drucke und einer grössern Geschwindigkeit nahezu denselben Reibungscoefficienten haben, dass es jedoch ausserhalb dieser Bedingungen nicht leicht Etwas gibt, was je nach den verschiedenen Umständen (Natur der sich reibenden Flächen, grössere oder geringere Glätte, Vollkommenheit der Oberflächen, Beschaffenheit der Schmiere, specifischer Druck und namentlich grössere oder kleinere Geschwindigkeit) mehr veränderlich als eben dieser Reibungswiderstand wäre, welcher selbst unter scheinbar vollkommen gleichen Umständen innerhalb gewisser Grenzen verschieden sein kann.

Herr Bochet stellte alle aus seinen zahlreichen Versuchen hervorgehenden Resultate sehr übersichtlich in graphischen Tableaus dar und vereinigte diese für den practischen Gebrauch näherungsweise, da es sich dabei um die feinere Distinction nicht handelt, in ein einfaches graphisches Bild, welches wir eben auch in der angehängten Tafel., die sich von selbst erklärt, mittheilen.

Es bedarf übrigens kaum der Bemerkung, dass diese, namentlich in der gedachten graphischen Darstellung ersichtlich gemachten Reibungs-Resultate für den Eisenbahnbetrieb von der grössten Wichtigkeit sind und sich daraus Manches erklärt, was bis jetzt vollkommen unklar gewesen.

Zusatz 3.

Ableitung der Simpson'schen Näherungsformel.

Um die in diesem Werke mehrere Male angewendete sogenannte Simpson'sche Regel auf eine einfache Weise abzuleiten, kann man folgenden geometrischen Weg einschlagen.

Bekanntlich beruht die Quadratur der ebenen Curven, d. h. die Bestimmung der krummlinigen ebenen Flächen, auf der Entwicklung des bestimmten Integrales $\int_{x'}^{x''} y\,\mathrm{d}x$, wobei y die der allgemeinen Abscisse x entsprechende Ordinate der betreffenden Curve, und x', x'' die den beiden äussern Ordinaten, welche die zu bestimmende Fläche mit begrenzen, zugehörigen Werthe von x sind. Lässt sich nun y nicht als eine Function von x ausdrücken, oder ist die Curve nur eine empirische, für welche die, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten nur aus Beobachtungen gefunden wurden, oder ist endlich der Ausdruck $y\,\mathrm{d}x$ überhaupt nicht integrabel; so muss man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen, nämlich die zu bestimmende Fläche durch nahe an einander liegende Ordinaten in schmale Trapeze, wovon eine Seite ein Theil der Curve ist, zerlegen und diese einzelnen Trapeze mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen suchen, indem dann ihre Summe sofort auch der näherungsweise Werth des obigen Integrales ist.

Man verfährt dabei am einfachsten, wenn man in allen diesen Fällen die betreffende Curve als eine gemeine oder Appollonische Parabel ansieht und die bekannten Eigenschaften dieser Curve dabei gehörig benützt.

Um nämlich die von den beiden Ordinaten pm, $p'm'$ (Fig. 21, Tab. VIII) der Abscisse pp' und dem Bogen mam' der Curve AaD' begrenzte ebene Fläche näherungsweise zu bestimmen, denke man sich den Bogen mam' als einer gemeinen Parabel angehörig, welche durch die drei Puncte m, a, m' geht und wobei die Ordinate aq in der Mitte zwischen jenen pm und $p'm'$ liegen soll. Da jedoch die völlige Bestimmung der Parabel (Lehrb. II. §. 135) vier Bedingungen erfordert, so kann man noch als vierte Bedingung hinzufügen, dass a der Scheitelpunct eines Durchmessers aq (Comp. §. 516) sein soll.

Dies vorausgesetzt, wird (Comp. §. 522) die Sehne mm durch die Ordinate aq im Puncte b halbirt und die zu mm' durch a gezogene parallele Gerade nan' bildet in diesem Puncte a eine Tangente an die Curve. Da nun bekanntlich das parabolische Segment $mam'm = \frac{2}{3}$ Parallelogramm mn', dieses also doppelt so gross als die Fläche $mnam'n'$ ist; so hat man, wenn man das Trapez $pmbm'p' = A$, jenes $pnn'p' = B$, die parabolische Fläche $pmam'p' = F$ und das parabolische Segment $mam'm = f$ setzt, sofort $f = F - A = 2(B - F)$ und daraus:

$$3F = A + 2B \ldots (1).$$

Nun ist aber $A = (pm + p'm')pq$ und $B = (pn + p'n')pq$ oder wegen $aq = \frac{pn + p'n'}{2}$ auch $B = 2aq \times pq$, folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation (1) substituirt:

$$F = \frac{pq}{3}(pm + p'm' + 4aq),$$

oder wenn man $pp' = a$ setzt, auch:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}(pm + p'm' + 4aq) \ldots (2).$$

Halbirt man ferner auch noch pq und qp' in β und β', und zieht durch die Halbirungspuncte die Ordinaten $\beta\alpha$ und $\beta'\alpha'$, so ist, wenn man $pq = qp' = a'$ setzt, auf dieselbe Weise, die Fläche:

$$pmaq = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta)$$

und die Fläche

$$qam'p' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(aq + m'p' + 4\alpha'\beta'),$$

folglich:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta + aq + m'p' + 4\alpha'\beta')$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}[mp + m'p' + 4(\alpha\beta + \alpha'\beta') + 2aq],$$

oder wegen $a' = \frac{a}{2}$, und wenn man die Ordinaten pm, $\beta\alpha \ldots p'm'$ der Reihe nach mit $y_0, y_1, \ldots y_4$ bezeichnet, auch:

$$F = \frac{a}{3.4}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4),$$

eine Formel, welche sich leicht fortsetzen lässt, im Falle man die Intervalle $p\beta$, $\beta q \ldots$ abermals halbiren, d. i. die ursprüngliche Basis pp' in 8, und durch fortgesetztes Halbiren noch weiter in 16, 32 u. s. w. gleiche Theile theilen will.

Theilt man dagegen jedes der beiden vorigen Intervalle $pq = qp'$ in 3 gleiche Theile, bezeichnet die auf einander folgenden Theilungspuncte mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so wie die durch die Puncte p (oder 0) 1, 2 ... 6 oder p' gezogenen Ordinaten der Reihe nach durch $y_0, y_1 \dots y_6$ und setzt die Grösse der Intervalle $0,1 = 1,2 = \dots = 5,6 = a''$; so hat man nach der durch die Relation (2) ausgedrückten Regel für die Flächen der auf einander folgenden Trapeze oder Streifen der Reihe nach:

$$\frac{a''}{3.2}(y_0 + y_2 + 4y_1),\ \frac{a''}{3.2}(y_2 + y_4 + 4y_3),\ \frac{a''}{3.2}(y_4 + y_6 + 4y_5),$$

folglich, wenn man diese Flächen summirt, sofort, wegen $a'' = \frac{a}{3}$:

$$F = \frac{a}{3.6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6).$$

Man sieht aus der bisherigen Entwicklung, dass wenn man die Basis $pp' = a$ überhaupt nur in eine gerade Anzahl, z. B. in $2n$ gleiche Theile theilt, sofort allgemein:

$$F = \frac{a}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ist und dass man die gesuchte Fläche F um so genauer erhält, je grösser n ist.

Setzt man die Summe der beiden äussern Ordinaten $y_0 + y_{2n} = S_{2n}$, jene der durch die ungeraden Theilungspuncte gehenden: $y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1} = S_{2n-1}$ und die Summe der durch die geraden Theilungspuncte gehenden Ordinaten (wobei die letzte sofort ausgeschlossen ist) $y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2} = S_{2n-2}$; so ist auch:

$$F = \frac{a}{3.2n}(S_{2n} + 4\,S_{2n-1} + 2\,S_{2n-2}).$$

Da nun aber nach der einleitenden Bemerkung diese Fläche nichts anderes als das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ ist, wenn man nämlich die den Ordinaten y_0 und y_{2n} entsprechenden Abscissen durch x' und x'' bezeichnet; so hat man endlich wegen $a = x'' - x'$, als einen Näherungswerth von beliebiger Genauigkeit:

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x'' - x'}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$= \frac{x'' - x'}{3.2n}(S_{2n} + 4\,S_{2n-1} + 2\,S_{2n-2}),$$

wobei es sich also nur darum handelt, die Differenz $x'' - x'$ in eine beliebige, jedoch gerade Anzahl ($= 2n$) gleicher Theile zu theilen, die durch die Theilungspuncte $0, 1, 2 \ldots 2n$ gedachten Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$ zu berechnen oder durch Beobachtung zu bestimmen und in die vorige Formel, welche eben die Simpson'sche ist und um so genauere Resultate gibt, je grösser man $2n$ nimmt, zu substituiren.

Zweite Näherungsformel.

Die in vielen Fällen eben so brauchbare (und in §. 214 gleichfalls angewendete) Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + f[a+(n-1)\delta]\Big]\delta,$$

wobei $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Lässt man die Grösse $x = a$ nach und nach um die kleine Grösse δ zunehmen, also x allmälig in a, $a+\delta$, $a+2\delta \ldots$ $a+n\delta = b$ übergehen, so, dass zwischen den beiden Grenzwerthen a und b, $n-1$ Werthe oder Zwischenglieder liegen, und setzt man das allgemeine Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

also das besondere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ldots (1),$$

so hat man, wenn a in $a+\delta$ übergeht, nach dem Taylor'schen Theorem:

$$F(a+\delta) = F(a) + \frac{d.F(a)}{da}\delta + \frac{d^2.F(a)}{da^2}\frac{\delta^2}{1.2} + \frac{d^3.F(a)}{da^3}\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man Kürze halber

$$\frac{d.f(x)}{dx} = f'(x),\quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2} = f''(x) \text{ u. s. w.},$$

so ist wegen $F(x) = \int f(x)\,dx$ sofort $\frac{d.F(x)}{dx} = f(x)$, also auch: $\frac{d.F(a)}{da} = f(a)$, und eben so $\frac{d^2.F(a)}{da^2} = f'(a)$, $\frac{d^3.F(a)}{da^3} = f''(a)$ u. s. w. fort, so, dass also der vorige Ausdruck auch die Form annimmt:

$$F(a+\delta)=F(a)+f(a).\delta+f'(a).\frac{\delta^2}{1.2}+f''(a).\frac{\delta^3}{1.2.3}+\dots$$

Analog mit diesem Ausdrucke erhält man für die folgenden Werthe:

$$F(a+2\delta)=F(a+\delta)+f(a+\delta).\delta+f'(a+\delta).\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$F(a+3\delta)=F(a+2\delta)+f(a+2\delta).\delta+f'(a+2\delta).\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

. . . .

$$F(a+n\delta)=F[a+(n-1)\delta]+f[a+(n-1)]\delta+f'[a+(n-1)\delta]\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

Werden diese Reihen addirt, so erhält man, wegen $a+n\delta=b$ sofort:

$$(2)\ F(b)-F(a)=\Sigma f(a+i\delta)\delta+\Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^3}{1.2.3}+\dots$$

wobei i der Reihe nach $=0,\ 1,\ 2\dots(n-1)$ zu setzen ist, so, dass z. B. $\Sigma f(a+i\delta)=f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\dots$ $+f[a+(n-1)\delta]$ wird.

Nimmt man ferner nach und nach $f(x)$, $f'(x)\dots$ statt $F(x)$ und $f'(x)$, $f''(x)\dots$ statt $f(x)$, so erhält man eben so:

$$f(b)-f(a)=\Sigma f'(a+i\delta)\delta+\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$f'(b)-f'(a)=\Sigma f''(a+i\delta)\delta+\Sigma f'''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{1.2}+\dots$$

$$f''(b)-f''(a)=\Sigma f'''(a+i\delta)\delta+\dots$$

Vernachlässigt man nun die dritten und höhern Potenzen der kleinen Grösse δ, so kann man zufolge der vorstehenden Relationen in der obigen Gleichung (2) statt

$\Sigma f'(a+i\delta)\frac{\delta^2}{2}$ setzen: $[f(b)-f(a)]\frac{\delta}{2}-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{4}$

und statt $\Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^2}{6}$ setzen: $[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{6}$

(während alles Folgende nach der gemachten Voraussetzung wegfällt). Dadurch geht aber die genannte Gleichung (2) in die folgende über:

$$F(b)-F(a)=\Sigma f(a+i\delta)\delta+[f(b)-f(a)]\frac{\delta}{2}-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{12}$$

oder es ist (Relat. 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big\{\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\dots$$
$$\dots+f[a+(n-1)\delta]\Big\}\delta-[f'(b)-f'(a)]\frac{\delta^2}{12}\dots(A).$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Integrale um so genauer, je kleiner $\delta = \frac{b-a}{n}$, d. i. je grösser n ist, und je langsamer sich die Function $f(x)$ zwischen ihren Grenzen a und b ändert.

In den meisten Fällen wird man das letzte in δ^2 multiplicirte Glied auslassen können, wodurch diese Formel (A) in die einfachere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + f[a + (n-1)\delta]\right\}\delta \ldots (B)$$

übergeht, so, dass diese letztere Formel nur die speciellen Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben sein können, ohne dass die Form dieser Function $f(x)$ selbst gegeben oder bekannt zu sein braucht.

Zusatz 4

zu §. 374.

1. Der von uns in dem hier angezogenen §. des Compendiums ausgesprochene Wunsch, dass über den Widerstand des Wassers in Canälen und Flussbetten zum Behufe der Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers noch vielseitigere und genauere Versuche von geschickten und umsichtigen Experimentatoren durchgeführt werden möchten, geht nun durch die unter der Leitung des Capitäns A. A. Humpherys und Lieutenant H. L. Abbot im Jahre 1850 begonnenen und kürzlich vollendeten topo- und hydrographischen Arbeiten behufs der Regulirung des ungeheuren Mississippi-Flusses zum Schutze der angrenzenden Niederungen gegen Ueberschwemmung in einer alle Erwartung übertreffenden Weise in Erfüllung.

Wir entnehmen aus dem uns eben noch vor Beendigung des Druckes unseres Buches zugekommenen (nur in verhältnissmässig wenigen Exemplaren gedruckten), vom Capitän Humphery und Lieutenant Abbot (*of the Corps of Topographical Engineers*, *United States Army*) in ausgezeichneter Weise verfassten und im Jahre 1861 zu Philadelphia unter Autorität des

Kriegs-Departements der Vereinigten Staaten veröffentlichten *Report* (von 600 Seiten in gr. 4. und 20 grossen Karten und Tafeln) aus dem V. Capitel, in welchem eine neue „Experimental-Theorie" über die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen entwickelt und durch unzählige, meisterhaft durchgeführte Versuche erhärtet und bestätigt wird, nur so weit es uns der noch zu Gebote stehende Raum gestattet, einige der wichtigsten Daten und practischen Formeln.

2. Aus den im 4. Capitel dieses *Report* vollständig und detaillirt erörterten Beobachtungen und Messungen der verschiedenen Geschwindigkeiten des an manchen Stellen über 3000 Fuss breiten Mississippi, und zwar in allen Tiefen und den verschiedensten Abständen von den Ufern, geht unzweifelhaft hervor, dass selbst bei ganz ruhigem, windstillem Wetter an der Wasseroberfläche ein Widerstand, ähnlich wie er an der Sohle des Flussbettes Statt findet, besteht, welcher keineswegs ganz allein von der Reibung der Wasserfläche gegen die Luft herrühren oder erklärt werden kann. Die Ursache liegt nach der Ansicht der Verfasser in dem Verluste an lebendiger Kraft, welcher sich vom Boden aus durch die Cohäsionskraft der Wassertheilchen nach aufwärts fortpflanzt und (ähnlich wie bei einer Reihe von aufeinander stossenden Elfenbeinkugeln, zusammenstossender Eisenbahnwägen u. s. w.) an der Oberfläche grösser als gegen die Mitte zu ist. Die beiden vom Boden und der Oberfläche ausgehenden Widerstände pflanzen sich in allmälig abnehmender Stärke gegen die Mitte zu fort, und in jener Tiefe, in welcher diese beiden verminderten Widerstände einander gleich geworden, findet die grösste Flussgeschwindigkeit Statt.

3. Legt man an irgend einer Stelle der Strombreite eine verticale Ebene parallel mit dem Stromstrich, und verzeichnet in dieser Ebene eine Parabel, deren Achse mit der Oberfläche des Wassers parallel läuft und deren Scheitel im Puncte der grössten Geschwindigkeit des Flusses liegt, so geben die auf der Achse gegen den Scheitel von einem Puncte aus gezählten Abscissen, welche vom Scheitel einen Abstand gleich der grössten Geschwindigkeit haben, die in den verschiedenen (durch die rechtwinkeligen Ordinaten dargestellten) Tiefen dieser Ebene stattfindenden Geschwindigkeiten auf eine mit den Messungen wunderbar übereinstimmende Weise. Der Parameter oder die Stärke der Krümmung dieser Parabel variirt nach einem bestimmten Gesetze oder ist eine bekannte Function von der Tiefe und mittlern Geschwindigkeit des Flusses. Die Tiefe der Achse der Curve unter der Oberfläche, oder allgemein ihr geometrischer Ort, steht im directen Verhältniss zu der Stärke des eben herrschenden Windes, und zwar wirkt der gegen den Strom streichende Wind dahin, die Achse tiefer, der abwärts gehende Wind diese höher zu legen. Endlich haben die grösste und mittlere Geschwindigkeit in der Curve eine solche Beziehung zu einander, dass wenn nebst der Tiefe der Achse der Parabel die eine gegeben ist, sofort auch die andere sammt der Curve selbst bestimmt werden kann.

Es mag nun die Anschauungsweise oder Hypothese von der Fortpflanzung des am Grundbette des Flusses entstehenden Widerstandes gegen die Oberfläche hin richtig sein oder nicht, so steht doch so viel fest, dass die hier vorläufig ausgesprochenen parabolischen Gesetze der Flussgeschwindigkeit durch die im vierten Capitel dieses *Report* erörterten und durch die Unzahl von graphischen Darstellungen und Diagrammen, welche die vorgenommenen genauen und scharfen Messungen repräsentiren, auf eine überraschende und unwiderlegbare Weise bestätigt werden und als richtig anerkannt werden müssen.

4. Zum Verständniss der folgenden Entwickelungen und der von den Verfassern abgeleiteten practischen Formeln wollen wir zuerst die von ihnen gebrauchten Bezeichnungen mit dem Bemerken hersetzen, dass sich alle numerischen Zahlen auf den englischen Fuss als Einheit beziehen. Es ist nun nach diesem System der Bezeichnung:

l = der Länge eines bestimmten Theiles des Flusses.

$h = h_{,} + h_{,,}$ = dem Niveau-Unterschied zwischen den beiden Endpuncten der Distanz l.

$h_{,}$ = jenem Theil von h, welcher zur Ueberwindung der Widerstände des Flusses, diesen auf dieser Strecke l als gerade und nahe von gleichem Querschnitt vorausgesetzt, nöthig ist.

$h_{,,}$ = jenem Theil von h, welcher die aus Krümmungen und sonstigen besonderen Unregelmässigkeiten des Querschnittes entstehenden Hindernisse zu überwinden hat.

$s = \frac{h_{\prime}}{l}$ das Gefälle auf die Längeneinheit.

$a =$ der Fläche eines betreffenden Querschnittes.

$p =$ der Länge des benetzten Umfanges.

$r = \frac{a}{p} =$ dem mittlern Radius, oder hydraulische mittlere Tiefe.

$r_{\prime} = \frac{a}{p + W}$.

$Q =$ der abfliessenden Wassermenge in Kubikfuss per Secunde.

$v = \frac{Q}{a} =$ der mittlern Geschwindigkeit des Flusses per Secunde.

$D =$ der Tiefe des Flusses an irgend einer Stelle von der Oberfläche des Wassers an.

$d =$ dem Abstande irgend eines Punctes im Innern vom Wasserspiegel.

$d_{\prime} =$ dem Abstande jenes Wasserfadens einer zu betrachtenden verticalen, mit dem Flusse parallelen Ebene, welcher die grösste Geschwindigkeit besitzt, ebenfalls von der Oberfläche des Wassers.

$m =$ dem Abstande jenes Wasserfadens irgend einer verticalen Längenebene, welcher die mittlere aus allen Geschwindigkeiten der in dieser Ebene liegenden Fäden besitzt.

$W =$ der Flussbreite an der Wasseroberfläche an irgend einer gegebenen Stelle.

$w =$ dem senkrechten Abstand irgend eines Punctes der Wasseroberfläche von der längs des Ufers gemessenen Basis.

$w_{\prime} =$ dem Abstande jenes Wasserfadens der Oberfläche von dieser Basis, welcher die grösste Geschwindigkeit besitzt.

$V =$ der Geschwindigkeit irgend eines Punctes in irgend einer verticalen Längenebene (d. i. einer mit dem Flusse parallelen Ebene). Soll eine einzelne (bestimmte) dieser Ebenen betrachtet werden, so wird ihr Abstand von der Basis oder gemessenen Grundlinie unten links angedeutet. So bezeichnet z. B. ${}_{500}V$ die Geschwindigkeit in irgend einer Tiefe in jener verticalen Längenebene, welche von der (mit ihr parallelen) Basis um 500 Fuss absteht; ${}_{w_{\prime}}V$ bezeichnet dasselbe für jene Ebene, in welcher sich die grösste Wasserspiegel-Geschwindigkeit befindet u. s. w. Ist die Geschwindigkeit in einer bestimmten Tiefe zu betrachten oder zu bezeichnen, so wird dem V der perpendikuläre Abstand vom Wasserspiegel unten rechts angehängt. So bezeichnen V_0, V_5, $V_{\frac{1}{2}D}$, V_D, V_{d_1}, V_m beziehungsweise die Geschwindigkeit im Wasserspiegel, in einem Puncte 5 Fuss unter demselben, in der halben Tiefe, an der Sohle, die grösste und mittlere Geschwindigkeit in irgend einer der genannten verticalen Längenebenen.

U = der Geschwindigkeit (stets in Fussen per Secunde) irgend eines Punctes in der mittlern, aller der erwähnten verticalen Längenebenen. Mit Beibehaltung des eben für V erklärten Systems der Bezeichnung bedeutet z. B. U_m das grosse Mittel aus allen mittlern Geschwindigkeiten in den sämmtlichen verticalen Längenebenen zwischen beiden Ufern des Flusses; U_r bezeichnet das Mittel aus allen Bodengeschwindigkeiten in diesen Ebenen u. s. w.

f = der Zahl, welche die Stärke des Windes anzeigt; dabei wird Windstille oder ein Wind, welcher unter einem rechten Winkel quer über den Fluss weht, mit Null, und ein Sturmwind mit 10 bezeichnet.

$g = 32{\cdot}138$ Fuss = der Beschleunigung der Schwere.

5. Denkt man sich von allen den in Nr. **3** erwähnten, an irgend einer Stelle des Flusses angenommenen verticalen Längenebenen mit ihren entsprechenden Geschwindigkeitsparabeln die mittlere Ebene mit ihrer Parabel, so gibt die Lage der Achse dieser Curve zugleich die mittlere aller in den genannten Ebenen liegenden Maximalgeschwindigkeiten; dieses grosse Mittel aller der genannten Maximalgeschwindigkeiten erhält als algebraischen Ausdruck die Tiefe der Achse der Geschwindigkeitscurve in dieser mittlern Ebene unter der Oberfläche des Wassers, und diese ist:

$$d_{,} = ({\cdot}317 + {\cdot}06 f)\, r \ldots (1),$$

dabei ist die Zahl f (vorige Nr.) für einen stromaufwärts blasenden Wind positiv, für einen abwärts wehenden Wind negativ zu nehmen. Ein Sturm ($f = 10$) wird daher die Parabelachse bis auf $\frac{1}{10}$ der mittlern Wassertiefe über dem Boden herabdrücken oder um $\frac{3}{10}$ dieser Tiefe über den Wasserspiegel erheben, jenachdem derselbe auf- oder abwärts geht. Ein abwärts wehender

Wind von der Stärke = 5 wird diese Achse nahe in die Wasseroberfläche bringen u. s. w.

6. Da man bisher immer der Meinung war, es sei für die Bestimmung der abfliessenden Wassermenge am einfachsten, das Verhältniss zwischen der grössten Oberflächen- (in dem Glauben, dass die grösste Geschwindigkeit an der Oberfläche stattfinde) und der wahren mittlern Flussgeschwindigkeit zu ermitteln, so werden hier aus den in dem frühern Capitel ausführlich entwickelten Gleichungen die Verhältnisse $\frac{v}{{}_{w_1}V_0}$ und $\frac{v}{{}_{w_1}V_{d_1}}$, und selbst jene $\frac{v}{U_0}$ und $\frac{v}{U_{d_1}}$ gesucht, aus welchen jedoch deutlich ihre Unbrauchbarkeit für den erwähnten practischen Zweck hervorgeht, indem diese von zu vielen wechselnden Elementen abhängen.

7. Für die weitere Entwicklung wird dagegen das Verhältniss aus der mittlern Geschwindigkeit aller der erwähnten verticalen Curven und der mittlern Geschwindigkeit des Flusses, d. i. die Relation $U_m = \varphi(v)$ gesucht und discutirt, woraus hervorgeht, dass man $U_m = Av$ setzen müsse, wobei für einen rechteckigen Querschnitt $A = 1$, und für Querschnitte, wie sie bei Flüssen (zu Columbus, Vicksburg und Natchez) vorkommen, $A = \cdot 93$, also:

$$U_m = \cdot 93 v \ldots (2)$$

zu nehmen ist. (Die genaue Uebereinstimmung dieses algebraischen Ausdruckes mit den sorgfältigsten Versuchen wird aus vierzehn Beobachtungen und Vergleichungen nachgewiesen.)

8. Da nun, wie eben erwähnt, die Verhältnisse zwischen v und ${}_{w_1}V_0$ oder ${}_{w_1}V_{d_1}$ oder U_0 oder endlich U_{d_1} wegen ihrer Veränderlichkeit keine brauchbaren Anhaltspuncte geben, so kamen die genannten Ingenieure dieser verdienstlichen Arbeit auf die glückliche Idee, aus ihren Daten und Relationen das Verhältniss zwischen V_m und $V_{\frac{1}{2}D}$, d. i. zwischen der in irgend einer der mehr erwähnten verticalen Längenebenen liegenden mittlern, zu jener Geschwindigkeit, die in dieser Ebene in der halben Tiefe liegt, zu bestimmen, und sie fanden dadurch das sehr wichtige practische Gesetz, dass an was immer für einem Querschnitt des Flusses und in was immer für einer der verticalen Längenebenen das Verhältniss der Mitteltief-Geschwindigkeit zur mittlern Geschwindigkeit wesentlich constant sei. Man erhält nämlich aus den erwähnten Relationen die Gleichung:

$$\frac{V_m}{V_{\frac{1}{2}D}} = \frac{V_m}{V_m + \frac{1}{12}(bv)^{\frac{1}{2}}} \ldots (3),$$

in welcher der Coefficient b mit der Parametercurve der verschiedenen Geschwindigkeitsparabeln zusammenhängt und sehr genau durch die Relation:

$$b = \frac{1{\cdot}69}{(D + 1{\cdot}5)^{\frac{1}{2}}} \ldots (4)$$

gefunden wird. Die Beobachtungen und Vergleichungen zeigen, dass für Flüsse von bedeutenden Tiefen (wie z. B. von 55 bis 110 Fuss, wie diese beim Mississippi vorkommen) $b = {\cdot}1856$ gesetzt werden könne. Hieraus folgt, dass der Coefficient $\frac{1}{12} b^{\frac{1}{2}}$ von der mittlern Flussgeschwindigkeit v eine so kleine Grösse ist, dass diese letztere das gedachte Verhältniss $V_m : V_{\frac{1}{2}D}$ sehr wenig alteriren kann. Auch folgt aus der Form des Bruches im zweiten Theil der Gleichung (3), dass eine Aenderung im Werthe von V_m (wenn dieser nur nicht zu klein ist) so gut wie keinen Einfluss auf den numerischen Werth des in Rede stehenden Verhältnisses hat; setzt man daher $U_m = {\cdot}93v$ (Relat. 2) statt V_m, so lässt sich, wenn die mittlere Flussgeschwindigkeit v selbst nur beiläufig bekannt ist, das genannte Verhältniss $V_m : V_{\frac{1}{2}D}$ schon im Voraus für jede der verticalen Geschwindigkeitscurven angeben.

Nachdem zur Erhärtung der Richtigkeit dieses blos aus theoretischen Combinationen gefundenen Gesetzes auch die strenge Prüfung mit den Resultaten der verschiedensten Beobachtungen am Mississippi zu Columbus, Vicksburg, Bayou Plaquemine, Bayou La Fourche, schmälern Zuflusscanälen und am Rhein (durch Prof. Forshey, Fillebrown, Pattison, G. C. Smith, Lieut. Abbot, Boileau, Hennocque und Defontaine) vorgenommen und eine so genaue Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen und den Zahlen der obigen Formel (3) gefunden wurde, als es in solchen Fällen nur immer möglich ist (die sich ergebenden Differenzen aus 15 Versuchsreihen sind: ·0005, ·0006, ·0033, ·0051, ·0021, ·0032, ·0048, ·0044, ·0027, ·0319, ·0208, ·0013, ·0228, ·0241, ·0149), wodurch sich als vollkommen erwiesen herausstellt, dass das Verhältniss $V_m : V_{\frac{1}{2}D}$ in irgend einer der verticalen Geschwindigkeitscurven practisch unabhängig ist von der Tiefe und Breite des Flusses, von der mittlern Flussgeschwindigkeit, von der mittlern Geschwindigkeit der verticalen Curven und von der Lage der Parabelachse, d. i. der grössten Geschwindigkeit; so bemerken die

Verfasser, wie diese wichtige Entdeckung wieder ein schönes Beispiel von der Macht der Analysis gebe, wenn diese auf Naturphänomene angewendet werde.

Uebrigens folgt aus diesem Gesetze auch noch (weil die practischen Versuche und Beobachtungen, mit denen die genannte Vergleichung vorgenommen wurde, unter dem Einflusse von verschiedenen auf- oder abwärts wehenden Windstärken stattfanden), dass die Geschwindigkeit in der halben Flusstiefe ($V_{\frac{1}{2}D}$) vom Winde, dieser mag was immer für eine Stärke oder Richtung haben, nicht im Geringsten mehr beeinflusst werde.

9. Was nun die practische Verwendung oder Benützung dieses neu entdeckten Gesetzes zur Berechnung der in einer bestimmten Zeit abfliessenden Wassermenge in irgend einem Flusse oder Canale anbelangt, so werden nach den nöthigen vorausgegangenen Feld- oder eigentlich Flussarbeiten zur Bestimmung der Mitteltief-Geschwindigkeit $U_{\frac{1}{2}r}$ (wozu man die Strombreite in so viele gleichbreite Streifen oder Sectionen theilt, als für die beabsichtigte Genauigkeit erforderlich scheint — am Mississippi waren diese Längenstreifen 200 Fuss breit — in diesen wieder in mehreren Breiten-Distanzen, und zwar am besten durch sogenannte Doppelschwimmer (*double floats*) die Geschwindigkeiten in der halben Tiefe des mittlern Radius bestimmt, aus den entsprechenden Zahlen in jeder Section das Mittel und endlich aus diesen Mittelwerthen selbst wieder das Mittel nimmt), 3 Methoden für die Berechnung der mittlern Flussgeschwindigkeit v vorgeschlagen.

Die erste Art besteht darin und gibt schon einen ziemlich genäherten Werth, wenn man das so erhaltene Mittel $U_{\frac{1}{2}D}$ selbst schon für die mittlere Flussgeschwindigkeit gelten lässt.

Eine zweite genauere Rechnungsmethode liegt darin, dass man den gefundenen Mittelwerth aus allen Mitteltiefen für $U_{\frac{1}{2}r}$ in die nachstehende Gleichung:

$$v = [(1{\cdot}08\, U_{\frac{1}{2}r} + {\cdot}002\, b)^{\frac{1}{2}} - {\cdot}045\, b^{\frac{1}{2}}]^2 \ldots (5)$$

setzt, welche Gleichung entsteht, wenn man in jene (aus der obigen (3) folgenden)

$$U_{\frac{1}{2}r} = U_m + \tfrac{1}{12}(b\,v)^{\frac{1}{2}}$$

für U_m den Werth ${\cdot}93v$ aus der obigen Relation (2) setzt und die Gleichung nach v auflöst. Dabei kommt zu bemerken, dass wenn der mittlere Radius r einmal 12 Fuss übersteigt, für b immer der bereits angegebene Werth ${\cdot}1856$ gesetzt werden kann.

Diese Formel (5) wäre ganz genau, wenn nicht der Factor A in dem Ausdrucke von $U_m = Av$ (in Nr. **7**, Relat. (2)) möglicher Weise kleinen Veränderungen unterworfen wäre, obschon er blos von der Abweichung des betreffenden Querschnittes des Flusses von der Form eines Rechteckes (wofür $A = 1$ ist) abhängt und am Mississippi durchaus constant $= \cdot 93$ gefunden wurde.

Will man daher endlich auch noch diesem Zweifel entgehen, so besteht die dritte und genaueste Methode darin, dass man in der Formel:

$$V_m = V_{\frac{1}{2}D} - \tfrac{1}{12}(bv)^{\frac{1}{2}} \ldots (6),$$

welche aus jener (3) folgt, für $V_{\frac{1}{2}D}$ nach und nach die verschiedenen, in den einzelnen Breitenabtheilungen oder Längenstreifen der gewählten Flussstrecke gemessenen Mitteltief-Geschwindigkeiten substituirt, wodurch man eben so viele, blos durch die Grösse $v^{\frac{1}{2}}$ und bekannte Grössen ausgedrückte Mittelgeschwindigkeiten der einzelnen Abtheilungen oder Sectionen erhält. Setzt man dann die Summe der Producte aus diesen erhaltenen Werthen V_m mit den entsprechenden Querschnittsflächen der betreffenden Abtheilungen dem Producte aus v in die ganze bezügliche Querschnittsfläche des Flusses gleich, so erhält man eine Gleichung, welche v und $v^{\frac{1}{2}}$ enthält, und aus welcher sich sofort der genaue Werth von v bestimmen lässt.

Von den durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung entstehenden beiden Werthen für v (welche, da der Form nach $\sqrt{v} = +p$ und $\sqrt{v} = -p'$, also $v = p^2$ und $= p'^2$ wird, beide positiv sind) ist der kleinere (da die Geschwindigkeit in der Achse der Parabel die grösste sein soll) Werth der allein hier brauchbare und gibt sofort die w a h r e m i t t l e r e G e s c h w i n d i g k e i t d e s F l u s s e s. Diese allerdings etwas langwierige Rechnungsmethode gibt so genaue Resultate, dass diese nur noch mit den Beobachtungsfehlern behaftet sein können.

In den meisten Fällen jedoch wird man sich mit einer der beiden erstern, weit einfacheren Methoden begnügen können.

10. Wir stellen hier noch die von den genannten Verfassern des hier benützten *Report* gefundenen neuen Formeln zur Bestimmung der verschiedenen Geschwindigkeiten unter der Oberfläche des Wassers in der von ihnen selbst angegebenen Form übersichtlich zusammen. Diese sind:

$$V = V_{d_1} - (bv)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d - d_{,}}{D}\right)^2, \quad V_0 = V_{d_1} - (bv)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d_{,}}{D}\right)^2.$$

$$V_D = V_{d_1} - (bv)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d_{,}}{D}\right)^2, \quad V_m = \tfrac{2}{3} V_{d_1} + \tfrac{1}{3} V_D + \frac{d_{,}}{D} \left(\tfrac{1}{3} V_0 - \tfrac{1}{3} V_D\right).$$

$$V_{\frac{1}{2}D} = V_m + \tfrac{1}{12} (bv)^{\frac{1}{2}}, \qquad V_{d_1} = V_m + (bv)^{\frac{1}{2}} \left[\tfrac{1}{3} + \frac{d_{,}(d_{,} - D)}{D^2}\right].$$

$$V = V_m + (bv)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{D\left(\frac{1}{3}D - d_{,}\right) + d\,(2\,d_{,} - d)}{D^2}\right].$$

Dabei ist für alle Werthe von $D > 30$ Fuss genau genug $b = {\cdot}1856$ zu nehmen. Für kleinere Werthe von D muss man, wenn eine grosse Genauigkeit verlangt wird, den Werth von b aus der Relation:

$$b = \frac{1{\cdot}69}{(D + 1{\cdot}5)^{\frac{1}{2}}}$$

berechnen. Für das Mittel aus allen verticalen Längenebenen geht in diesem Ausdrucke D in r über.

Für die Geschwindigkeiten in der mittlern der genannten verticalen Längenebenen gelten die nachstehenden Formeln:

$$d_{,} = ({\cdot}317 + {\cdot}06 f)\, r, \quad U_m = {\cdot}93\, v.$$

$$U = {\cdot}93\, v + \left[\frac{dr\,({\cdot}634 + {\cdot}12 f) - d^2}{r^2} - {\cdot}06 f + {\cdot}016\right] (bv)^{\frac{1}{2}}.$$

$$U_0 = {\cdot}93\, v + ({\cdot}016 - {\cdot}06 f)\, (bv)^{\frac{1}{2}}.$$

$$U_r = {\cdot}93\, v + ({\cdot}06 f - {\cdot}350)\, (bv)^{\frac{1}{2}}.$$

$$U_{d_1} = {\cdot}93\, v + [({\cdot}317 + {\cdot}06 f)^2 - {\cdot}06 f + {\cdot}016]\, (bv)^{\frac{1}{2}}.$$

$$v = \left[(1{\cdot}08\, U_{\frac{1}{2}r} + {\cdot}002\, b)^{\frac{1}{2}} - {\cdot}045\, b^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

11. Da zur Bestimmung der durch Eindämmung eines Flusses entstehenden Stauhöhe oder Erhöhung des Wasserspiegels die Kenntniss des Zusammenhanges oder der Relationen zwischen Querschnitt, Gefälle und mittlere Geschwindigkeit des Flusses unentbehrlich ist, so gehen die Verfasser nunmehr auch zur Lösung dieses noch schwierigeren Problemes, wobei sie ebenfalls wieder neue, von den bisher bekannten abweichende Formeln finden, die mit den zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Experimentatoren gemachten Messungen und Beobachtungen auf eine bewunderungswürdige Weise übereinstimmen.

Sie gehen dabei wieder von der schon oben (Nr. 2) erwähnten Ansicht aus, dass sich an der Oberfläche des Wassers (am Wasserspiegel) ausser der Reibung mit der Luft durch Fortpflanzung vom Boden herauf, noch ein Widerstand geltend mache, welcher von derselben Natur wie jener am Boden des Flussbettes sei. Sie bestreiten ferner die von Vielen aufgestellte Hypothese, dass sich bei der Bewegung des Wassers in Canälen oder Flüssen eine Flüssigkeitsschichte an den Wänden des Bettes festsetze, über welche das ganze Wasserprisma weggleite und dabei keinen andern als den durch die Cohäsion der Wassertheilchen entstehenden Reibungswiderstand zu überwinden habe; sondern sie nehmen an, dass der Widerstand hauptsächlich aus der Adhäsion der äussersten Wasserschichte mit den Berührungswänden entsteht und dass dadurch die Geschwindigkeit der Wassertheilchen in dieser äussersten Schichte verzögert werde. Die Geschwindigkeit aller übrigen nach Innen zu liegenden Theilchen wird dann nur in Folge des Gesetzes eines ganz andern, nämlich des Cohäsionswiderstandes der Wassertheilchen unter einander vermindert. Dieser secundäre Widerstand regulirt eigentlich die Vertheilung oder Fortpflanzung des Effectes des erstern oder Adhäsionswiderstandes auf die übrigen Theilchen der bewegten Wassermasse. Die Cohäsionskraft, von ganz anderer Natur und weit grösserer Intensität als die Adhäsion, lässt nur ganz geringe Geschwindigkeitsänderungen in den auf einander folgenden Elementarschichten der Flüssigkeitsmasse zu, während die Adhäsion (wie z. B. die unterste Schichte am Grundbett) Geschwindigkeiten gestattet, welche mehrere Fuss übersteigen.

12. Mit Zugrundelegung der schon von Dubuat ausgesprochenen und angewendeten Grundsätze, dass wenn das Wasser mit gleichförmiger Bewegung fortfliesst, die gesammte beschleunigende Kraft dem gesammten Widerstande gleich sein müsse und dass in offenen Canälen die beschleunigende Kraft lediglich von dem Gefälle der Wasseroberfläche herrührt, wird zuerst die Grundgleichung dieser Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, nämlich, wenn G die Dichte des Wassers und φ irgend eine Function bezeichnet, die Gleichung:

$$G g a l \frac{h_{\prime}}{l} = l(p + W) \varphi \left(\frac{U_0 W + U_r p}{W + p} \right)$$

aufgestellt und durch Substitution der oben in Nr. **10** für U_0 und U_r angegebenen Werthe, wobei zu berücksichtigen, dass $\cdot 317 + \cdot 06 f = \frac{d_\prime}{r}$ ist, auf die Form:

$$\frac{as}{W+p} = \varphi \left\{ \cdot 93 v + (bv)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{W\left(\cdot 333 - \frac{d_\prime}{r}\right) + p\left(\frac{d_\prime}{r} - \cdot 667\right)}{W+p} \right] \right\} \ldots (7)$$

gebracht. Setzt man weiters $W = qp$, wo q für Flüsse nahezu $= 1$ gesetzt werden kann (für den Mississippi ist der Mittelwerth $= \cdot 99$), so geht der letzte Bruch in der eckigen Klammer in

$$\frac{\cdot 333 q - \frac{d_\prime}{r} q + \frac{d_\prime}{r} - \cdot 667}{q+1}$$

und für $q = 1$ in $- \cdot 167$ über. Wird dieser Werth oben in (7), jedoch mit veränderten Zeichen, substituirt (weil man sonst aus der quadratischen Endgleichung für v die hier unbrauchbare Wurzel erhalten würde), so hat man:

$$\frac{as}{W+p} = \varphi (\cdot 93 v + \cdot 167 b^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}) = \varphi (z) \ldots (8),$$

wenn man nämlich Kürze halber das Binom $= z$ setzt.

13. Was nun die Form und den Werth der im zweiten Theil dieser Gleichung vorkommenden Function φ betrifft, so lässt sich dieser offenbar nur aus vielen und genauen Beobachtungen und practischen Versuchen bestimmen.

Es werden daher von den Verfassern sowohl ihre ausgedehnten, zahlreichen und mit aller möglichen Genauigkeit am Mississippi zu Vicksburg, Columbus, Carrollton, Bayou La Fourche, little-Falls feeder nächst George-town, so wie auch die Beobachtungen von Dubuat, Kraÿenhoff, Watt, Destrem, Buffon, Pattison am Bayou Plaquemine und Ellet am selben Orte und am Ohio, mit kritischer Beleuchtung und Berücksichtigung aller Einfluss nehmenden Umstände benützt, und es wird dadurch endlich der Ausdruck gefunden:

$$z = \left(\frac{195\, a\, s^{\frac{1}{2}}}{p + W}\right)^{\frac{1}{4}} \ldots (9),$$

aus welchem von den 5 variabeln Grössen immer eine gefunden werden kann.

Berücksichtigt man übrigens, dass die beiden Grössen W und p selten von einander unabhängig, und durch die eine gewöhnlich auch die andere gegeben ist, in jedem Falle aber für natürliche Flussbette ohne erheblichen Fehler $p = 1{\cdot}015\,W$ gesetzt werden kann, so reduciren sich diese Variabeln auf die folgenden 4, d. i. a, $(p + W)$, s und z. Diese letztgenannte Grösse ist zwar, streng genommen, eine Function von v und b (Gleich. 8), also mittelbar von v und r (wenn man in Relat. (4) r statt D setzt); allein da man ohne Fehler b als constant ansehen kann, so kann man auch für alle practischen Fälle z als eine einfache Function von v ansehen. Man findet sonach aus der vorigen Relation (9) für den practischen Gebrauch die 3 folgenden Formeln:

$$s = \left[\frac{(p + W)\,z^2}{195\,a}\right]^2 \ldots (11),$$

$$a = \frac{(p + W)\,z^2}{195\,s^{\frac{1}{2}}} \ldots (12),$$

$$p + W = \frac{195\,a\,s^{\frac{1}{2}}}{z^2} \ldots (13).$$

14. Von der Variabeln z sind uns zwei absolute Werthe, nämlich für einen rechteckigen und für einen gewöhnlich bei Flüssen vorkommenden Querschnitt bekannt, und zwar sind diese beziehungsweise (Gleichungen (8), (2) und Bemerk. über A in Nr. 7):

$$z = v + {\cdot}167\,b^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \text{ und } z = {\cdot}93\,v + {\cdot}167\,b^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}.$$

Werden diese Werthe für z in die obige Gleichung (9) substituirt und wird diese dann nach v aufgelöst, so erhält man für diese beiden Fälle, beziehungsweise:

$$v = \left[-\,{\cdot}08\,b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{{\cdot}0064\,b + (195\,r_{,}\,s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]^2 \ldots (14)$$

$$\text{und } v = \left[-\,{\cdot}09\,b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{{\cdot}0081\,b + (225\,r_{,}\,s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]^2 \ldots (15).$$

Wie bereits bemerkt, hängt für schmale Flüsse der Werth $b = \frac{1{\cdot}69}{(r + 1{\cdot}5)^{\frac{1}{2}}}$ von r ab, ist jedoch für Flüsse, in welchen r schon 12 bis 15 Fuss beträgt, nahezu $= {\cdot}1856$, wodurch das unterm Wurzelzeichen vorkommende Glied in b für geringe vorkommende Geschwindigkeiten so klein ausfällt, dass man dasselbe ohne Weiteres auslassen kann. Dadurch geht (da die Formel (14) nur für künstliche Canäle brauchbar ist, so wird sie hier nicht weiter in Betracht gezogen) der vorige Ausdruck (15) in den einfacheren über:

$$v = \left[(225\,r_{,}\,s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} - {\cdot}0388\right]^2 \ldots (16).$$

Aus dieser für alle breitern Flüsse (zur Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit) anwendbaren Formel kann man die beiden folgenden:

$$r_{,} = \frac{(v^{\frac{1}{2}} + \cdot 0388)^4}{225\, s^{\frac{1}{2}}} \ldots (17)$$

$$\text{und } s = \left[\frac{(v^{\frac{1}{2}} + \cdot 0388)^4}{225\, r_{,}}\right]^2 \ldots (18)$$

ableiten, welche manchmal zur approximativen Bestimmung der darin vorkommenden Grössen von Nutzen sein können.

Im Falle die ab- oder durchfliessende Wassermenge Q nebst zweien der 4 in der Gleichung (9) vorkommenden Variabeln gegeben wäre, liessen sich, vorausgesetzt, dass nicht a und v die zwei gegebenen Grössen sind, die beiden übrigen mit Rücksicht auf die Relation $Q = av$ leicht finden.

Sind a und z die beiden Unbekannten, so kommt man allerdings auf eine höhere Gleichung; allein dann kann man sich durch ein Näherungsverfahren helfen, indem man z. B. für a einen Werth annimmt und damit sowohl aus der Gleichung (15) oder (wenn das Flussprofil ein Rechteck) (14) (weil $r_{,} = a : (p + W)$) als aus jener $a = Q : v$ den entsprechenden Werth von v berechnet. Sind beide Werthe identisch, so war a richtig angenommen, wenn nicht, so wird man a ändern und in dieser Weise fortfahren, bis die gewünschte Uebereinstimmung erreicht ist.

Ist der Fluss sehr breit, so kann diese Rechnung dadurch vereinfacht werden, dass man die Gleichung (16) statt jener (15) nimmt.

15. Die von den Verfassern des hier in Rede stehenden *Report* in so grossem Massstabe und mit so grosser Genauigkeit ausgeführten Versuche und Beobachtungen am Mississippi boten endlich auch die Mittel dar, die aus scharfen Krümmungen des Stromstriches resultirende Widerstandshöhe $h_{,,}$ (siehe Bezeichnung in Nr. 4) zu bestimmen und namentlich die von Dubuat hiefür aufgestellte einfache empirische Formel zu rectificiren.

Ist a der betreffende Einfalls- oder Ablenkungswinkel, welcher jedoch keinesfalls über 36 bis 40 Grad hinausgehend angenommen wird, so wie Σ eine constante Grösse; so empfiehlt Dubuat die aus seinen Versuchen in Röhrenleitungen hervorgegangene sehr einfache Formel: $h_{,,} = \frac{v^2\, Sin\, a^2}{\Sigma}$, wobei für Röhren von verschiedenen Dimensionen, nach Pariser Zollen, die Constante $\Sigma = 2998 \cdot 5$ ist und natürlich $h_{,,}$ und v in derselben Einheit zu nehmen sind.

Legt man den englischen Fuss zum Grunde, so verwandelt sich diese Formel in die folgende: $h_{\prime\prime} = \frac{v^2 \, Sin \, a^2}{266 \cdot 3}$.

Die erwähnten neuern und am Mississippi zwischen Carrollton und Baton Rouge im Jahre 1851, so wie zu Vicksburg im Jahre 1858 zu diesem Behufe durchgeführten Versuche zeigen, dass die vorige Formel für $h_{\prime\prime}$ zu kleine Werthe gibt, dass dagegen die Beobachtungswerthe mit den aus der Formel:

$$h_{\prime\prime} = \frac{v^2 \, Sin \, a^2}{134} \ldots (19)$$

berechneten sehr gut übereinstimmen.

16. Um den Werth dieser neuen Formeln besser würdigen zu können, wollen wir schliesslich noch die Resultate von 30, zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Richtungen und zwar am Mississippi, Bayou Plaquemine, La Fourche, Ohio, Haine (Frankreich), Canal (England), Rheinfluss (Byland), Waal, Rhein, Yssel, Tiber, Newa und Gross-Nevka (Russland) in den Jahren von 1782 an bis 1859 vorgenommenen Messungen und Beobachtungen, wobei die Querschnittsflächen der Canäle und Flüsse von 50 bis 195349 Quadratfuss, die Breiten an der Wasseroberfläche von 18 bis 2732, die benetzten Perimeter von 20·6 bis 2782, die grössten Canal- und Flusstiefen von 4 bis 136 und die mittlern Geschwindigkeiten von 1·1336 bis 6·9575 Fuss, so wie endlich die Gefälle von ·00001389 bis ·00069851 variirten, in so ferne in Betracht ziehen, als wir aus dem *Report* noch eine Tabelle mittheilen, in welcher die sich aus den wirklichen Beobachtungen und den Rechnungen nach den verschiedenen bekannten ältern und den hier in Rede stehenden neuern Formeln ergeben, ersichtlich sind.

Bevor wir jedoch diese Tabelle selbst hersetzen, wollen wir noch diese verschiedenen ältern Formeln für die mittlere Geschwindigkeit aus diesem *Report* selbst anführen. Diese sind:

$$\text{Chezy} \ldots \left\{ \begin{array}{ll} \text{(Young's Coefficienten)} \ldots\ldots\ldots & v = 84 \cdot 3 \, (rs)^{\frac{1}{2}} \\ \text{(Eytelwein's detto)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v = 93 \cdot 4 \, (rs)^{\frac{1}{2}} \\ \text{(Downing's u. Anderer detto)} \ldots\ldots & v = 100 \cdot 0 \, (rs)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{Dubuat} \ldots v = \frac{88 \cdot 49 \, (r^{\frac{1}{2}} - \cdot 03)}{\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}} - L\left(\frac{1}{s} + 1 \cdot 6\right)^{\frac{1}{2}}} - \cdot 086 \, (r^{\frac{1}{2}} - \cdot 03).$$

Dabei ist $L =$ dem gemeinen Logarithmus multiplicirt mit 2·302585.

Girard .... $v = (2·69 + 26384rs)^{\frac{1}{2}} - 1·64.$

Prony .....
- Für Canäle .... $v = (·0556 + 10593rs)^{\frac{1}{2}} - ·2357$
- Für „ u. Röhren $v = (·0237 + 9966\,r\,s)^{\frac{1}{2}} - ·1542$
- Eytelwein's Coeffic. $v = (·0119 + 8963\,r\,s)^{\frac{1}{2}} - ·1089$
- Weissbach's „ $v = (·00024 + 8675rs)^{\frac{1}{2}} - ·0154$

Young .... $v = \left[\frac{rs}{3A} + \left(\frac{B}{12A}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{B}{12A}.$

Dabei ist $A = ·0^61\left(413 + \frac{1·5625}{r} - \frac{90}{3r+8} - \frac{15}{4r + ·0296}\right).$

$$B = ·0^61\left[\frac{900\,r^2}{r^2 + ·5} + \frac{1}{(3\,r)^{\frac{1}{2}}}\left(271·25 + \frac{6·88}{r} + \frac{·0001146}{r^2}\right)\right].$$

Dupuit.... $v = \frac{s\,r\,a}{·08\,W} + (·0067 + 9114\,rs)^{\frac{1}{2}} - ·082.$

St. Venant $v = 106·068\,(rs)^{\frac{11}{21}}.$

Ellet ...... $v = ·64\,(\varDelta H)^{\frac{1}{2}} + ·04\,\varDelta H,$

in welcher $\varDelta$ die grösste Flusstiefe und H das Gefälle der Wasserfläche auf 1 englische Meile bezeichnet.

Wir lassen nun die erwähnte Vergleichungs-Tabelle mit dem Bemerken folgen, dass die in den verticalen Columnen stehenden Zahlen die Differenzen oder Abweichungen der nach den verschiedenen Formeln erhaltenen Rechnungs- von den Beobachtungs-Resultaten enthalten, und dass die vorgesetzten Zeichen angeben, ob diese Differenzen zu den berechneten mittleren Geschwindigkeiten addirt oder davon subtrahirt werden müssen, um die Beobachtungszahlen zu erhalten. So gibt z. B. bei der 1. Beobachtung die nach der Dubuat'schen Formel berechnete mittlere Geschwindigkeit $v = 2·7468$ Fuss, einen Fehler von $+ 3·1820$ Fuss, welcher sofort zu der berechneten Geschwindigkeit addirt, die wahre beobachtete mittlere Geschwindigkeit von $2·7468 + 3·1820 = 5·9288$ Fuss gibt; und so auch mit den übrigen Zahlen.

T a-

zur Vergleichung der nach den verschiedenen Formeln be-

Zahl der Versuche	Chezy's Formel mit Coefficienten von: Young	Eytelwein	Downing u. Anderen	Dubuat's Formel	Girard's Formel	Prony's Formel Für Canäle	Für Röhren und Canäle
	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss
1	+2·6888	+2·3390	+2·0854	+3·1820	+1·1140	+2·2017	+2·2430
2	+2·9167	+2·5961	+2·3636	+3·4374	+1·5736	+2·4887	+2·5204
3	+2·6973	+2·5530	+2·4484	+3·3542	+2·6207	+2·6208	+2·5978
4	+2·5522	+2·3984	+2·2868	+3·2073	+2·4188	+2·4572	+2·4369
5	+1·3152	+0·7061	+0·2643	+1·5090	—2·3975	+0·3004	+0·4281
6	+1·5591	+0·9772	+0·5552	+2·7722	—1·9246	+0·5998	+0·7184
7	+2·3506	+1·8677	+1·5174	+2·6733	—0·3106	+1·5929	+1·6784
8	+1·3028	+1·0631	+0·8893	+1·6224	+0·5812	+1·0377	+1·0434
9	+2·2085	+1·8469	+1·5847	+2·5718	+0·5389	+1·6975	+1·7427
10	+1·8902	+1·4121	+1·0654	+2·1721	—0·7304	+1·1425	+1·2263
11	+0·0094	—0·5507	—0·9569	—0·1965	—3·2932	—0·9055	—0·7942
12	+0·0033	—0·4238	—0·7334	—0·0583	—2·1974	—0·6407	—0·5738
13	+0·8434	+0·6023	+0·4275	+1·0077	+0·1116	+0·5756	+0·5817
14	+0·9837	+0·7829	+0·6374	+1·1533	+0·5428	+0·7964	+0·7900
15	+0·9835	+0·7866	+0·6439	+1·1535	+0·5695	+0·8039	+0·7963
16	+0·8184	+0·6056	+0·4513	+0·9686	+0·2926	+0·6072	+0·6044
17	—1·2535	—1·7162	—2·0517	—1·7040	—3·7470	—1·9699	—1·8912
18	—1·5406	—2·0008	—2·3346	—1·9857	—4·0141	—2·2520	—2·1741
19	+0·4038	+0·1759	+0·0106	+0·6998	—0·2313	+0·1623	+0·1643
20	+0·0901	—0·1694	—0·3577	+0·0453	—0·7802	—0·2148	—0·2028
21	+0·0364	—0·2358	—0·4333	—0·0038	—0·9301	—0·2940	—0·2779
22	+0·0901	—0·0226	—0·1043	+0·1478	+0·1788	+0·0737	+0·0425
23	+0·1952	—0·1696	—0·4342	+0·2315	—1·5005	—0·3224	—0·2761
24	+0·4577	+0·1534	—0·0673	+0·4877	—0·7571	+0·0627	+0·0891
25	+0·2978	—0·0117	—0·2361	—0·2478	—0·9577	—0·1078	—0·0797
26	+0·4004	+0·1288	—0·0682	+0·4037	—0·5617	+0·0712	+0·0871
27	+0·5513	+0·3115	+0·1376	+0·5584	—0·1711	+0·2860	+0·2918
28	+0·4503	+0·1305	—0·1015	+0·4294	—0·8867	+0·0238	+0·0553
29	+1·3598	+1·1579	+1·0115	+1·4974	+0·9109	+1·1702	+1·1641
30	+0·6919	+0·5455	+0·4393	+0·9601	+0·6026	+0·6112	+0·5888
Summe	32·9420	28·4411	26·6988	40·4417	37·4472	28·0905	28·1506

Aus der Vergleichung dieser Zahlen springt der grosse Vorzug der neuern gegen die bisher bekannten und angewendeten Formeln so eclatant in die Augen, dass jede weitere Bemerkung überflüssig wäre.

fel

rechneten mittlern Geschwindigkeiten mit den beobachteten.

mit Coefficienten		Young's Formel	Dupuit's Formel	St. Venant's Formel	Ellet's Formel	Neue Formel
von Eytelwein	von Weissbach					
Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss	Fuss
+2·3974	+2·3644	+2·6547	+1·0536	+2·4381	+2·8837	+0·0385
+2·6584	+2·6206	+2·9000	+1·4629	+2·7002	+3·1500	+0·2425
+2·6378	+2·5725	+2·7822	+2·3651	+2·6534	+2·9552	+0·2593
+2·4820	+2·4182	+2·6320	+2·1732	+2·5009	+2·8230	+0·0658
+0·7288	+0·7388	+1·1238	—3·0950	+0·7159	+2·0962	—0·8093
+1·0038	+1·0091	+1·3844	—0·0904	+0·9996	+1·8883	—0·4602
+1·9078	+1·8968	+2·2359	—0·4739	+1·9298	+2·8054	+0·0713
+1·1361	+1·0853	+1·3343	+0·8166	+1·1737	+1·4852	—0·3978
+1·9037	+1·8726	+2·1690	+0·8041	+1·9437	+2·6953	+0·0430
+1·4530	+1·4411	+1·7785	—0·6254	+2·0143	+2·3442	—0·1982
—0·5211	—0·5194	—0·1556	—1·4981	—0·5187	+0·4408	—0·0448
—0·3760	—0·3963	—0·0801	—0·8769	—0·3435	+0·4993	—0·3871
+0·6751	+0·6245	+0·8751	+0·4812	+0·7129	+1·2065	—0·2076
+0·8069	+0·8040	+1·0392	+0·7353	+0·8921	+1·2623	+0·0213
+0·8651	+0·8076	+1·0613	+0·7447	+0·8954	+1·2442	+0·0304
+0·6821	+0·7270	+0·8657	+0·5499	+0·7156	+1·0997	—0·0768
—1·6733	—1·6876	—1·3746	—1·9100	—1·6470	—1·4773	—0·0709
—1·9576	—1·9723	—1·6603	—2·1895	—1·8953	—1·7497	—0·3594
+0·2504	+0·1977	+0·4406	+0·1520	+0·2864	+1·0867	+0·0298
—0·0990	—0·1467	+0·1054	—0·2003	—0·0593	+0·5240	+0·0257
—0·1671	—0·2128	+0·0447	—0·2847	—0·1265	+0·5194	—0·0886
+0·0655	—0·0040	+0·1871	+0·0257	+0·0684	+0·3413	—0·1965
—0·1133	—0·1439	+0·1506	—0·5043	—0·0736	+1·1067	—0·4809
+0·2179	+0·1774	+0·4492	+0·0070	+0·2597	+1·0020	—0·0544
+0·0520	+0·0125	+0·2862	—0·1620	+0·2895	+0·8310	—0·1808
+0·1976	+0·1518	+0·4107	+0·0629	+0·2382	+0·8733	+0·0973
+0·3845	+0·3337	+0·5803	+0·2855	+0·4221	+1·0048	+0·2993
+0·1928	+0·1587	+0·4315	—0·0107	+0·2347	+0·9410	+0·1378
+1·2357	+1·1790	+1·4133	+0·9731	+1·2671	+1·8573	—0·4976
+0·6300	+0·5649	+0·7771	+0·5348	+0·6463	+1·1609	—0·5191
29·5258	28·8412	33·3834	25·1488	30·6619	45·3547	6·3920

Wir können leider, ohne die hier vorgezeichneten Grenzen weit zu überschreiten, von den weiteren Ergebnissen, Vergleichungen u. s. w. dieses höchst interessanten *Report's* keine weiteren Mittheilungen machen und müssen auf dieses Werk selbst verweisen. (Der Titel dieses Buches ist: *„Report upon the Physics and Hydraulics of the Mississippi River; upon* *the Protection of the Alluvial Region against overflow; and upon the Deepening of the Mouths: Based upon Surveys and Investigations. Made etc. Prepared by Captain A. A. Humphreys and Lieut. H. L. Abbot, Corps of Topographical Engineers, United States Army.*“ *Philadelphia, G. B. Lippincott & Comp.* 1861.)

Anhang.

Ueber die wesentlichsten Eigenschaften der Kräftepaare, nebst einigen ihrer wichtigsten Anwendungen.

Wesentliche Eigenschaften der Kräftepaare.

1. Wie bereits in §. 21 (Anmerk.) bemerkt, haben zwei gleiche, parallele, jedoch entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche man nach Poinsot ein Kräftepaar, Gegenpaar oder schlechtweg Paar (*couple*) nennt, keine Resultirende, indem ihre Grösse $R = P - P = 0$ und ihr Arm $= \infty$ wird, d. h. es gibt keine einzelne Kraft, welche mit einem solchen Paar im Gleichgewichte stehen könnte. Dagegen ist es möglich, das Gleichgewicht durch ein zweites Kräftepaar herzustellen, und es haben die Paare vorzüglich in der Statik einen solchen Einfluss, dass wir es angezeigt finden, die wichtigsten Eigenschaften derselben hier noch in Kürze zu entwickeln und auf einige besondere Fälle und Beispiele anzuwenden.

2. Erklärungen.

a) Die normale Entfernung der beiden ein Paar bildenden Kräfte heisst Breite oder Arm des Kräftepaares.

b) Ist P die Kraft eines Paares $(P, -P)$ und p dessen Arm, so heisst das Product Pp das statische Moment der Kraft P oder das Moment des Paares $(P, -P)$; häufig wird das Paar auch durch sein Moment Pp bezeichnet und eben so oft wird auch unter der Benennung Paar $(P, -P)$ dessen Moment selbst verstanden.

c) Zwei Kräftepaare heissen gleich, wenn sie gleiche Kraft und gleichen Arm (also auch gleiche Momente) haben.

d) So wie eine einzelne Kraft ihrem Angriffspunct in gerader Linie eine progressive oder translatorische Bewegung zu geben strebt, so sucht ein Kräftepaar die zugehörige, d. i. die Ebene, in welcher das Paar liegt (auch

Paarebene genannt), um irgend einen im Allgemeinen noch unbestimmten Punct zu drehen.

e) Hat ein Kräftepaar das Bestreben, die zugehörige Ebene in jener Richtung zu drehen, in welcher sich die Zeiger einer Uhr bewegen, so wird das Paar rechts-, im Gegentheile linksdrehend genannt. Um über die Drehrichtung eines Kräftepaares entscheiden zu können, darf man sich nur zwischen beiden Kräften irgend einen Punct als Drehungspunct denken.

f) Da man die statischen Momente der rechts und links drehenden Kräfte (Statik 19, Anmerk. 1) mit entgegengesetzten Zeichen in die Rechnung einführen muss, so pflegt man das Moment eines rechtsdrehenden Paares mit $+$, jenes eines linksdrehenden mit $-$ zu bezeichnen.

Hat also ein rechtsdrehendes Paar die Kraft P und den Arm p, so wie ein linksdrehendes die Kraft Q und den Arm q, so sind diese beiden Kräftepaare in die Rechnung mit $+Pp$ und $-Qq$ einzuführen und dadurch auch vollkommen bestimmt.

g) Endlich versteht man unter Achse eines Paares jede Gerade, welche auf der Paarebene perpendikulär steht; sie kann zugleich als Umdrehungsachse dieser Ebene gelten.

Dies vorausgeschickt, ergeben sich nun für die Kräftepaare die folgenden Sätze.

3. Die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte eines Paares auf was immer für einen in der Ebene des Paares liegenden Punct bezogen, ist gleich dem Momente des Kräftepaares.

Nimmt man O (Fig. 1) als Mittelpunct der statischen Momente der Kräfte P, P', welche ein Paar bilden, und setzt die auf die Richtung der Kräfte gefällten Perpendikel $Oa = a$ und $Ob = b$, so ist die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte P und P', welche ihrer entgegengesetzten Richtung wegen mit $+$ und $-$ zu bezeichnen sind, $= Pb - P'a$, oder wenn man den Arm des Paares $ab = p$ setzt, wodurch $b = a + p$ wird, sofort wegen $P' = P$:

$$P(a + p) - P'a = Pp,$$

so, dass also die Lage des Punctes O hierauf ohne Einfluss ist.

4. Zwei gleiche, in derselben Ebene liegende Kräftepaare (Erkl. *c*)) von entgegengesetzten Drehrichtungen, halten sich das Gleichgewicht.

Liegen die beiden Paare P und P' (von gleicher Grösse und gleichem Arm) wie in Fig. 2 auf- oder in einander, so wirken in jeder der beiden Geraden, wegen $P' = P$, zwei gleiche Kräfte nach gerade entgegengesetzter Richtung, die sich sonach aufheben oder im Gleichgewichte halten.

Schneiden sich, wie in Fig. 3, die beiden Paare P und P', so setze man die in den Puncten A und B angreifenden gleich grossen Kräfte P, P' zusammen, so erhält man zwei Resultirende R von gleicher Grösse, welche nach der Diagonale des verschobenen Quadrates CD in entgegengesetzter Richtung wirken, sich also wieder das Gleichgewicht halten.

Sind endlich die beiden Paare P, P', wie in Fig. 4, zu einander parallel, so füge man zu diesen noch zwei Paare Q, Q' hinzu, welche den gegebenen gleich sind, mit diesen in derselben Ebene liegen, sich schneiden und entgegengesetzte Drehrichtungen haben. Da sich diese hinzugefügten beiden Paare nach dem vorigen Falle das Gleichgewicht halten, so haben diese auf den Gleichgewichtszustand der ursprünglichen beiden Paare keinen Einfluss.

Nun steht aber nach dem vorigen Falle das Paar P mit jenem Q', so wie das Paar P' mit jenem Q im Gleichgewicht, folglich müssen, da, wie eben bemerkt, die Paare Q und Q' für sich im Gleichgewichte sind, auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare $(P, -P)$ und $(P', -P')$ an und für sich im Gleichgewichte stehen.

Zusatz. Aus diesem Lehrsatze folgt, dass man, ohne die Wirkung eines Kräftepaares zu ändern, dasselbe in dessen Ebene beliebig verschieben und so jeden beliebigen Punct derselben als Angriffspunct wählen kann.

5. Zwei in derselben Ebene wirksame Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen halten sich das Gleichgewicht.

Sind $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 5) die beiden Paare und p, q ihre Arme, folglich (Nr. **2**, *b*)) Pp, Qq ihre Momente; so verschiebe man das Paar Q in der zugehörigen Ebene so, dass es das andere Paar P rechtwinkelig durchschneidet, construire in den Puncten A und B aus den Kräften P und Q die beiden Resultirenden R, so sind diese erstens einander gleich, liegen wegen (nach der Voraussetzung) $Pp = Qq$, oder $P : Q = q : p$ in der Richtung der Diagonale des Rechteckes CD und sind entgegengesetzt gerichtet, folglich im Gleichgewicht. Da nun diese beiden Resultanten im Gleichgewichte stehen, so halten sich auch die beiden Kräftepaare selbst das Gleichgewicht.

Zusatz. Man kann daher bei einem Kräftepaar Kraft und Arm beliebig verändern, wenn nur das neue Paar das Moment des ursprünglichen behält. Soll ein Paar Pp in ein gleichgeltendes vom Arm s umgeändert werden, so hat man die Kraft S aus der Relation $Ss = Pp$ zu bestimmen. Für $s = 1$ heisst das Paar $S = Pp$ ein reducirtes Kräftepaar.

Anmerkung. Dass umgekehrt zwei in derselben Ebene liegende Paare von entgegengesetzten Drehrichtungen nur im Gleichgewichte stehen können, wenn sie gleiche Momente haben, lässt sich wie folgt beweisen.

Ist (Fig. 6) P das rechts- und Q das linksdrehende Paar, der Arm des erstern $AA' = p$, jener des letztern $BB' = q$; so verlege man die Angriffspuncte der vier Kräfte in irgend eine durch den Durchschnittspunct C aus AA' und BB' gehende Gerade CD; so ist für das Gleichgewicht, da die Kräfte P, Q die Gerade CD nach der einen, jene P', Q' nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben:

$$P \,.\, CA + Q \,.\, CB' = P' \,.\, CA' + Q' \,.\, CA \ldots (m)$$

oder wenn man $CA' = a$ und $CB' = b$ setzt, auch:

$$P(a + p) + bQ = aP' + Q'(b + q),$$

oder wegen $P' = P$ und $Q' = Q$, endlich:

$$Pp = Qq.$$

Diese letztere Relation folgt auch unmittelbar aus der vorigen (m), wenn man den Satz in Nr. 3 berücksichtigt.

6. Zwei Kräftepaare in derselben Ebene von gleichen Momenten und gleichen Drehrichtungen sind gleichgeltend.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden in Nr. 5 (Zusatz).

7. Zwei oder mehrere in einer Ebene liegende Kräftepaare lassen sich immer zusammensetzen oder zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen.

Um diese Zusammensetzung zu bewirken, bringe man nach dem Vorigen (Nr. 5, Zusatz) sämmtliche Paare auf denselben Arm und vereinige durch gehöriges Verschieben sowohl die rechts- als auch die linksdrehenden Paare mit einander; so entstehen dadurch zwei Paare von gleicher Breite und entgegengesetzten Drehrichtungen, die sich wieder zu einem einzigen Kräftepaar von demselben Arm vereinigen lassen, wodurch endlich entweder ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder Gleichgewicht entsteht.

Hat man z. B. die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, Rr mit den beiden linksdrehenden Qq, Ss zu vereinigen, so bringe man z. B. die drei letztern auf den Arm oder die Breite p des erstern, d. h. man verwandle die Paare Rr, Qq, Ss in die gleichgeltenden $R'p$, $Q'p$, $S'p$, indem man die Kräfte R', Q', S' aus den Relationen $R'p = Rr$, $Q'p = Qq$, $S'p = Ss$ bestimmt.

Hat man nun durch die genannte Verschiebung die beiden rechtsdrehenden Paare Pp, $R'p$, so wie auch die beiden linksdrehenden $Q'p$ $S'p$ mit einander vereinigt und wieder, wie in Fig. 7, gehörig verschoben, so erhält man das rechtsdrehende Paar $P + R'$ und das linksdrehende $Q' + S'$ und aus diesen beiden Paaren endlich, jenachdem $P + R' >, <, = Q' + S'$ ist, als Resultat ein rechtsdrehendes oder ein linksdrehendes Paar oder das Gleichgewicht.

Ist U das resultirende Kräftepaar, so ist also $U = (P + R') - (Q' + S')$, oder wenn man mit dem gemeinschaftlichen Arm p multiplicirt:

$$Up = Pp + R'p - Q'p - S'p,$$

oder mit Rücksicht auf die Erklärung f) in Nr. 1, im algebraischen Sinne genommen:

$$Up = Pp + R'p + Q'p + S'p.$$

Stellt man endlich für $R'p$, $Q'p$ ... die ursprünglichen Werthe wieder her, auch:

$$Up = Pp + Rr + Qq + Ss.$$

Aus dieser Relation ergibt sich ganz einfach das Gesetz, nach welchem sich das resultirende Kräftepaar durch Rechnung finden lässt.

Sind nämlich Pp, $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ ... die Momente der verschiedenen in derselben Ebene liegende Kräftepaare, so wie Uu jenes des resultirenden Paares, so ist:

$$Uu = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma (Pp),$$

dabei diese Summe der Momente im algebraischen Sinne verstanden.

Von den Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen.

8. Liegen zwei Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehrichtungen in zwei

parallelen, fest mit einander verbundenen Ebenen, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Es seien M, N (Fig. 8) die beiden parallelen Ebenen und $P_1 p_1$, $Q_1 q_1$ die Momente der in diesen liegenden Paare; also nach der Voraussetzung $P_1 p_1 = Q_1 q_1$. Man verwandle zuerst jedes Paar nach Nr. **5** (Zusatz) in ein gleichgeltendes von einem gleichen, z. B. dem Arm $AB = CD = a$, wodurch die Kräfte P_1, Q_1 in P und Q übergehen mögen, so, dass $Pa = Qa = P_1 p_1 = Q_1 q_1$, also $Q = P$ wird; hierauf verschiebe man diese in den Ebenen M und N liegenden Paare $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ so, dass die Arme AB und CD, mithin auch die Kräfte selbst zu einander parallel werden. Dies vorausgesetzt, geben die beiden gleich (in der Zeichnung aufwärts) gerichteten Kräfte P und Q die Resultirende $R = P + Q = 2P$, so wie die beiden nach entgegengesetzter Richtung (hier nach abwärts wirkenden) Kräfte P' und Q' die Resultante $R' = P' + Q' = 2P$.

Da nun diese beiden Resultirenden, welche mit den Componenten parallel laufen, einander gleich sind und in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte O der beiden in der durch AB und CD gedachten Ebene liegenden Geraden AC und BD angreifen und daher gerade entgegengesetzt wirken, so heben sie sich auf, und es sind sonach auch die beiden ursprünglichen Kräftepaare selbst im Gleichgewicht.

Zusatz. Nach diesem Verfahren lässt sich also (da die gegenseitige Entfernung der parallelen Ebenen keinen Einfluss hat) ein Kräftepaar mit seiner Ebene parallel beliebig verschieben. Auch lassen sich eben so beliebig viele in parallelen Ebenen liegende Paare in eine einzige Ebene bringen und nach Nr. **7** zu einem Kräftepaar vereinigen.

Hieraus folgt, dass auch umgekehrt (Nr. **5**, Anmerkung) zwischen zwei in parallelen Ebenen liegenden Paaren von entgegengesetzten Drehrichtungen das Gleichgewicht nur bestehen kann, wenn ihre Momente einander gleich sind.

9. Liegen zwei Kräftepaare in zwei sich schneidenden Ebenen, so lassen sich diese durch ein einziges Kräftepaar ersetzen.

Es seien MN, $M'N'$ (Fig. 9) die beiden in AB sich schneidenden Ebenen. Man bringe wieder beide Paare auf dieselbe

Breite $AB = a$, wofür die Kräfte dann $(P, -P')$ und $(Q, -Q')$ in den Ebenen MN und $M'N'$ sein mögen. Verschiebt man jetzt die Paare in den Ebenen so, dass von den vier Kräften je zwei in den Puncten A und B angreifen und auf der Durchschnittslinie AB normal stehen; so liegen von den vier Kräften der beiden Paare jene P, Q' und P', Q in parallelen auf AB normalen Ebenen. Construirt man daher aus P, Q' und P', Q die Resultirenden R, R', so sind diese (wegen $P' = P$ und $Q' = Q$) einander gleich, liegen in einer Ebene, welche mit den gegebenen dieselbe Durchschnittslinie AB hat und wirken nach parallelen, jedoch entgegengesetzten Richtungen; es bildet also (R, R') das resultirende, den beiden gegebenen gleichgeltende Kräftepaar von der Breite a, oder es ist Ra das neue oder resultirende Paar.

Ist nun $MAQ' = \alpha$ der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen, so ist (Statik, Nr. 8):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \, Cos\, \alpha} \ldots (1).$$

Ist $RAQ' = \varphi$ der Neigungswinkel der Ebene des resultirenden Paares R mit der Ebene $M'N'$ des Paares Q, so ist:

$$Sin\, \varphi = \frac{P \, Sin\, \alpha}{R} \ldots (2),$$

wodurch auch die Lage der Ebene des neuen Paares bestimmt ist.

Zusatz 1. Waren $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ die ursprünglich gegebenen Paare, so hat man zur genannten Umwandlung derselben auf die gemeinschaftliche Breite a die beiden Relationen $Pa = P_1 p_1$ und $Qa = P_2 p_2$. Multiplicirt man daher die vorige Gleichung (1) durchaus mit a, so erhält man:

$$Ra = \sqrt{(Pa)^2 + (Qa)^2 + 2 Pa \,.\, Qa \,.\, Cos\, \alpha},$$

oder mit Rücksicht auf die vorigen Relationen:

$$Ra = \sqrt{(P_1 p_1)^2 + (P_2 p_2)^2 + 2 P_1 p_1 \cdot P_2 p_2 \,.\, Cos\, \alpha} \ldots (1').$$

Auf ähnliche Weise nimmt auch die obige Gleichung (2) die Form an:

$$Sin\, \varphi = \frac{P_1 p_1 \, Sin\, \alpha}{Ra} \ldots (2').$$

Wirken nun aber zwei Kräfte $P_1 p_1$ und $P_2 p_2$ auf einen Punct unter einem Winkel α und ist Ra ihre Resultirende, sowie φ der Winkel, welchen dieselbe mit der Kraft $P_2 p_2$ einschliesst; so erhält man zur Bestimmung der Grösse und Lage derselben nach Nr. 8 (Statik) genau die vorigen beiden Relationen (1') und (2'). Hieraus folgt also, dass man die in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare genau so zerlegen und zusammensetzen kann, wie einfache auf einen Punct wirkende, in einer Ebene liegende Kräfte, wenn man statt der Kräfte die Momente der Paare, und statt der Winkel der Kräfte die Winkel der Ebenen setzt, in welchen die Kräftepaare liegen.

Z u s a t z 2. Die Zerlegung und Zusammensetzung mehrerer in verschiedenen Ebenen liegenden Kräftepaare lässt sich oft durch Einführung ihrer Umdrehungsachsen (Erkl. *g*)) und zwar in folgender Weise vereinfachen.

Es seien MM, NN, RR (Fig. 9′) die Durchschnittslinien dreier Paarebenen mit der Ebene des Papiers, welche auf der durch A gehenden gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der drei Ebenen perpendikulär sein soll. Da man aber die Achse eines Paares durch jeden beliebigen Punct der Paarebene legen kann, indem sich das Paar in seiner Ebene willkürlich verschieben lässt; so können die in der Papierebene durch den Punct A auf diese Durchschnittslinien gezogenen Perpendikel Am, An, Ar für die Achsen dieser drei Paare genommen werden, welche offenbar unter einander dieselben Winkel, wie die entsprechenden Paarebenen selbst einschliessen.

Ist nun das eine in der Ebene RR liegende Paar die Resultirende aus den beiden andern in den Ebenen MM, NN liegenden Paaren, so bildet nach der vorigen Bemerkung dessen Moment Ra die Diagonale des aus den Momenten $P_1 p_1$, $P_2 p_2$ construirten Parallelogrammes. Trägt man daher diese Momente auf den Achsen Am, An auf, ist nämlich $Aa = P_1 p_1$, $Ab = P_2 p_2$ und ergänzt das Parallelogramm; so ist die Richtung der Diagonale Ar desselben nicht nur die Achse des resultirenden Paares, sondern zugleich auch $Ac = Ra$ dessen Moment.

Z u s a t z 3. Da Kräftepaare keine anderen gegenseitigen Lagen als die bisher betrachteten haben können, so folgt schliesslich der allgemeine Satz, d a s s s i c h b e l i e b i g v i e l e K r ä f t e p a a r e, i n b e l i e b i g e n E b e n e n l i e g e n d, i m m e r z u e i n e m e i n z i g e n K r ä f t e p a a r v e r e i n i g e n l a s s e n.

10. Vereinigung eines Kräftepaares mit einer einzelnen Kraft.

Liegt die gegebene, im Puncte A (Fig. 10) angreifende Kraft P mit dem Paar Qq in derselben Ebene, so verwandle man zuerst das letztere in ein gleichgeltendes von der Kraft P, d. i. wenn a der entsprechende Arm ist (aus $Pa = Qq$ zu bestimmen) in das Paar Pa. Hierauf verschiebe man das neue Paar (P, P') in seiner Ebene so, dass die gegebene Kraft P durch die eine Kraft P' des Paares vernichtet oder aufgehoben wird; so bleibt als Resultirende noch die eine durch den Punct A' (welcher vom ursprünglichen A verschieden ist) gehende Kraft P, welche der gegebenen gleich, mit ihr parallel und nach derselben Richtung wirksam ist.

Liegt die gegebene Kraft P zwar nicht in der Ebene des Paares selbst, jedoch mit dieser parallel, so verschiebe man diese Ebene mit sich parallel (wodurch Nr. 8, Zusatz, in der Wirkung des Paares nichts geändert wird) bis sie die gegebene Kraft aufnimmt, und verfahre im Uebrigen wie vorhin.

Zusatz. Hat endlich die gegebene Kraft eine solche Lage, dass sie die Ebene des Paares schneidet, so lässt sich diese Vereinigung nicht bewerkstelligen.

11. Verschiebung einer Kraft nach paralleler Richtung.

Will man eine Kraft P, welche im Puncte A (Fig. 11) angreift, mit sich selbst parallel so verschieben, dass sie durch irgend einen Punct O geht, so darf man durch diesen letztern Punct nur zwei mit der gegebenen Kraft P gleiche, parallel und entgegengesetzt wirkende (sich also aufhebende) Kräfte P', P'' anbringen; so hat man (wie vorhin) durch den Punct O die Kraft P' mit der ursprünglichen P gleich, parallel und in derselben Richtung, so wie das Paar (P, P'') vom Arm $BO = a$ wirkend, dessen Moment Pa gleich ist dem statischen Momente der gegebenen Kraft P auf den neuen Angriffspunct O bezogen. Die drei Kräfte $P = P' = P''$ bewirken also dasselbe, was die Kraft P allein bewirkt.

Ist also z. B. ein Körper im Puncte O festgehalten und durch eine excentrisch wirkende Kraft P in A angegriffen, so wird, wenn man nach dem eben angedeuteten Verfahren diese Kraft P in die drei Kräfte P, P', P'' auflöst, das Paar (P, P'') auf O keinen Druck, sondern blos das Bestreben zu einer Drehung, welche nur durch ein in derselben Ebene wirkendes Paar $Qb = Pa$ aufgehoben werden kann, äussern, während ein Druck auf den Punct O durch die Kraft $P' = P$ in einer mit der Kraft P parallelen Richtung erzeugt wird.

Anwendungen.

12. Um von den bisher entwickelten Eigenschaften und Sätzen der Kräftepaare einige Anwendungen zu zeigen, so wollen wir zuerst zwei in derselben Ebene liegende Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ betrachten, welche gleiche Momente $Pa = Qb$ und entgegengesetzte Drehrichtungen haben, und so angeordnet sind, wie es aus Fig. 12 zu ersehen.

Da in diesem Falle (Nr. 5) Gleichgewicht besteht und die in C wirkende Kraft $P + Q = R$ der Resultante aus den beiden in A und B wirkenden parallelen Kräften P, Q gleich und entgegengesetzt ist; so folgt, dass die Resultirende aus zwei parallelen Kräften der Summe dieser Kräfte gleich und mit diesen parallel ist, und dass ferner jede beliebig gezogene Gerade $A'B'$ von den drei parallelen Kräften, wegen (nach der Voraussetzung) $Pa = Qb$, oder

$$P : Q : P + Q = b : a : a + b,$$

im Verhältniss von

$$b' : a' : a' + b' = P : Q : R$$

geschnitten wird. (Vergleiche §. 20.)

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies System von Angriffspuncten.

13. In einem freien Systeme von n Puncten M, M_1, M_2 . . . (Fig. 13) wirken die Kräfte P, P_1, P_2 . . . nach beliebigen Richtungen; die Coordinaten dieser Angriffspuncte auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem AX, AY, AZ bezogen, seien der Reihe nach x, y, z, $x_1 y_1 z_1$ u. s. w., so wie die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 . . . mit den Axen der x, y, z bilden, beziehungsweise α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w.

Betrachtet man nun zuerst die Kraft P an ihrem Angriffspunct M, so kann man diese, wenn man durch den Ursprung A der Coordinaten zwei mit P gleiche und parallele entgegengesetzt wirkende Kräfte P', P'' hinzufügt, diese Kraft P ohne Aenderung nach Nr. **11** in eine Kraft P', welche in A angreift und ein Paar (P, P'') mit den Angriffspuncten M und A auflösen.

Verfährt man auf gleiche Weise auch mit den übrigen Kräften $P_1, P_2 \ldots$, so entstehen:

1. n Kräfte im Puncte A wirksam, welche den gegebenen gleich und parallel sind, und mit ihnen dieselbe Richtung haben;

2. n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich sind und den Punct A, so wie beziehungsweise die Puncte $M, M_1 \ldots$ als Angriffspuncte haben.

Die Resultante der in A wirksamen n Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ ist aber (Statik Nr. **14**):

$$R = \sqrt{(\Sigma P \, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \beta)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \gamma)^2} \ldots (a),$$

so wie ihre Lage oder Richtung aus den Relationen:

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P \, Cos\, \alpha)}{R}, \quad Cos\, b = \frac{\Sigma(P \, Cos\, \beta)}{R}, \quad Cos\, c = \frac{\Sigma(P \, Cos\, \gamma)}{R} \ldots (b)$$

bestimmt wird, wenn a, b, c die Winkel der Resultante mit den Axen der x, y, z bezeichnen.

Was ferner die n Kräftepaare $(P, -P)$, $(P_1, -P_1) \ldots$ betrifft, so lassen sich diese (Nr. **9**, Anmerk.) immer zu einem Paar Q vereinigen und es kommt jetzt nur noch darauf an, die Grösse von Q zu bestimmen.

14. Zu diesem Behufe zerlege man zuerst die zu dem Paare P (in A und M wirksam) gehörigen Kräfte in drei Componenten nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinatenaxen x, y, z; werden diese beziehungsweise durch p, q, r bezeichnet, so sind diese:

$$p = P \, Cos\, \alpha, \quad q = P \, Cos\, \beta, \quad r = P \, Cos\, \gamma \ldots (c).$$

Dadurch entstehen aber drei Kräftepaare $(p, -p)$, $(q, -q)$, $(r, -r)$ mit den Angriffspuncten M und A und den Momenten $p \cdot AE$, $q \cdot AF$, $r \cdot AC$, d. i.:

$$P \, Cos\, \alpha \sqrt{y^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \beta \sqrt{x^2 + z^2}, \; P \, Cos\, \gamma \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (d).$$

Bringt man jetzt in den Puncten B und C der Geraden BC nach ihrer Richtung zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte $p'' = p' = p$ an, wodurch in dem Systeme nichts geändert wird, vereinigt die Kraft p in A mit p' in C, so wie die Kraft p in

M mit jener p'' in B zu einem Paar; so hat man das in A und M wirksame Paar $p \,.\, AE$ in die zwei ebengenannten Paare (p, p'), (p, p''), d. i. in die Paare py und pz aufgelöst oder zerlegt.

Auf dieselbe Weise kann man das Kräftepaar $q \,.\, AF$ in die beiden Paare qx (in A und C) und qz (in M und D), so wie das Kräftepaar $r \,.\, AC$ in die beiden äquivalenten Paare rx (in A und F) und ry (in D und M) auflösen (wenn man nämlich beziehungsweise in C und D $q' = q'' = q$ in der Geraden CD, und in F und D nach der Geraden FD die Kräfte $r' = r'' = r$ in entgegengesetzter Richtung anbringt).

Durch diese Zerlegungen haben wir daher anstatt der vorigen drei Kräftepaare, ausgedrückt in Relat. (d), die sechs Paare:

$$py, \; qx, \; rx, \; pz \text{ und } qz, \; ry.$$

Von diesen liegen das 1. und 2. Paar in der Ebene der xy, das 3. und 4. Paar in der Ebene der xz und einer mit dieser parallelen Ebene, so wie das 5. und 6. Paar in einer mit der Ebene der yz parallelen Ebene.

Verlegt man, was nach Nr. 8, Zusatz, für Paare in parallelen Ebenen gestattet ist, das 4. Paar in die Ebene der xz, so wie das 5. und 6. Paar in jene der yz und versieht die sämmtlichen Paare nach Nr. 2, f) mit ihren Vorzeichen, indem man die Richtung von der Seite der positiven x gegen jene der positiven z, von da zu den positiven y und von da zurück zu den positiven x als die rechtsdrehende, mithin die entgegengesetzte als die linksdrehende nimmt; so hat man statt der im Puncte M angreifenden Kraft, ausser jener bereits berücksichtigten durch A gehenden gleichen Kraft P', die in den drei coordinirten Ebenen der xy, xz und yz liegenden Paare (diese beziehungsweise von den positiven z, y und x aus betrachtet), d. i. ihre Momente:

$$py - qx, \quad rx - pz \text{ und } qz - ry,$$

oder wenn man für p, q, r die obigen Werthe (c) setzt, auch:

$$Py \operatorname{Cos} \alpha - Px \operatorname{Cos} \beta, \; Px \operatorname{Cos} \gamma - Pz \operatorname{Cos} \alpha, \; Pz \operatorname{Cos} \beta - Py \operatorname{Cos} \gamma \,..\, (e).$$

Verfährt man nun, wie es mit dem Kräftepaar P geschehen, eben so auch mit den übrigen Paaren $P_1, P_2 \ldots$, so erhält man schliesslich durch gehörige Vereinigung die drei beziehungsweise in den Ebenen der xy, xz, yz liegenden Kräftepaare L, M, N, deren Werthe sind:

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma[P(y\,Cos\,\alpha - x\,Cos\,\beta)] \\ M &= \Sigma[P(x\,Cos\,\gamma - z\,Cos\,\alpha)] \\ N &= \Sigma[P(z\,Cos\,\beta - y\,Cos\,\gamma)] \end{aligned}\right\} \ldots (f).$$

Werden nun in gegebenen speciellen Fällen diese drei Kräftepaare nach dem in Nr. **9** angegebenen Verfahren zusammengesetzt, so erhält man das genannte resultirende Kräftepaar Q, dessen Ebene sofort durch den Ursprung A geht.

Liegt, als besonderer Fall, die Resultante R (Relat. (a)) in der Ebene dieses Paares Q oder mit dessen Ebene parallel, so lässt sich die Kraft R nach Nr. **10** mit diesem Paar Q vereinigen und man erhält dadurch eine Kraft $R' = R$, welche mit R parallel und gleich gerichtet ist, jedoch einen andern Angriffspunct besitzt.

Ausser diesem besonders günstigen Fall würden sich die n Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ des Systemes blos durch eine Kraft R und ein Kräftepaar Q ersetzen lassen.

15. Für das vollständige Gleichgewicht muss sowohl $R = 0$ als auch $Q = 0$ sein; daraus folgen die Bedingungsgleichungen (Relat. (a) und (f)):

$$\Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0, \quad \Sigma(P\,Cos\,\beta) = 0, \quad \Sigma(P\,Cos\,\gamma) = 0$$

und $$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

(Vergleiche Statik Nr. **20**, Anmerk. 2, Relat. (s).)

Finden von diesen sechs Bedingungsgleichungen blos die drei ersten Statt, so besteht blos hinsichtlich der fortschreitenden, keineswegs aber auch bezüglich der drehenden Bewegung Gleichgewicht.

Bestehen dagegen blos die drei letztern Bedingungsgleichungen, ist also R nicht Null, so findet zwar keine drehende, wohl aber eine fortschreitende Bewegung Statt.

16. Sind, als specieller Fall, die sämmtlichen Kräfte zu einander parallel und wirken diese theils nach einer, theils nach der entgegengesetzten Richtung; so sind die Winkel α für die in derselben Richtung wirkenden Kräfte einander gleich, dagegen gehen sie für die entgegengesetzt wirkenden Kräfte in die Supplementwinkel über; dasselbe gilt auch für die Winkel β und γ.

Hat nun z. B. die Kraft P_r gegen die übrigen die entgegengesetzte Richtung, so geht dafür die Componente $P_r\,Cos\,\alpha_r$ in $P_r\,Cos\,(180^0 - \alpha_r) = -P_r\,Cos\,\alpha_r$, gerade so über, als ob man den

Winkel α_r als spitz beibehalten, dafür aber die Kraft P_r negativ genommen hätte. Ueberträgt man daher einfach die verschiedenen Zeichen der Cosinus auf die Kräfte selbst, wodurch also $\Sigma(P)$ im algebraischen Sinne zu verstehen ist; so hat man aus Nr. **13**, Relat. (a):

$$R = \sqrt{(\Sigma P)^2\, Cos\, \alpha^2 + (\Sigma P)^2\, Cos\, \beta^2 + (\Sigma P)^2\, Cos\, \gamma^2} =$$
$$\Sigma(P) \sqrt{Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2},$$

oder wegen $Cos\, \alpha^2 + Cos\, \beta^2 + Cos\, \gamma^2 = 1$ (Comp. §. 580) auch:

$$R = \Sigma(P) \ldots (g),$$

d. h. die Resultante ist gleich der algebraischen Summe aus den parallelen Kräften.

Ferner ist, Nr. **13**, Relat. (b):

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \alpha}{\Sigma(P)},\quad Cos\, b = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \beta}{\Sigma(P)},\quad Cos\, c = \frac{\Sigma(P)\, Cos\, \gamma}{\Sigma(P)},$$

d. i. $\qquad Cos\, a = Cos\, \alpha,\ Cos\, b = Cos\, \beta,\ Cos\, c = Cos\, \gamma,$

oder: $\qquad a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,$

d. h. die Resultirende R ist mit den gegebenen Kräften parallel.

Was ferner die Relationen (f) (Nr. **14**) betrifft, so gehen sie für diesen Fall, wegen $Cos\, \alpha_1 = Cos\, \alpha_2 \ldots = Cos\, \alpha$, $Cos\, \beta_1 = Cos\, \beta_2 = \ldots = Cos\, \beta$ und $Cos\, \gamma_1 = Cos\, \gamma_2 = \ldots = Cos\, \gamma$ über in:

$$\left.\begin{aligned} L &= Cos\, \alpha\, \Sigma(Py) - Cos\, \beta\, \Sigma(Px) \\ M &= Cos\, \gamma\, \Sigma(Px) - Cos\, \alpha\, \Sigma(Pz) \\ N &= Cos\, \beta\, \Sigma(Pz) - Cos\, \gamma\, \Sigma(Py) \end{aligned}\right\} \ldots (h).$$

17. Die durch das in Nr. **13** eingeschlagene Verfahren entstehenden n Kräftepaare, welche den gegebenen Kräften gleich und parallel sind, fallen im vorliegenden speciellen Fall in Ebenen, welche sich sämmtlich in einer mit den Kräften parallelen Geraden AS schneiden, daher liegt auch (Nr. **9**) das resultirende Paar Q in einer durch diese Gerade AS gehenden Ebene; da nun aber die im Puncte A angreifende Resultante R ebenfalls mit AS zusammenfällt, so liegt diese Kraft mit dem Paar Q in einerlei Ebene und lässt sich daher (Nr. **10**) mit diesem Paare Q vereinigen.

Verwandelt man nämlich, wie es in Nr. **10** angedeutet, das Paar in ein gleichgeltendes von der Kraft R, setzt also

$$Q = Rr \ldots (i)$$

und verschiebt das letztere oder neue Paar so, dass dadurch die in A angreifende Mittelkraft R aufgehoben wird, so bleibt als neue Resultirende eine Kraft R' übrig, welche der Mittelkraft R gleich, mit ihr parallel und gleich gerichtet ist, nur hat diese jetzt einen andern Angriffspunct O.

Um diesen Angriffs- oder Mittelpunct der parallelen Kräfte zu bestimmen, seien X, Y, Z dessen Coordinaten. Zerlegt man die durch diesen Punct gehende Mittelkraft R in drei Seitenkräfte parallel mit den rechtwinkeligen Coordinaten-Axen und verfährt mit diesen letztern genau so, wie dies in Nr. **14** mit den Componenten p, q, r geschehen; so erhält man drei Kräftepaare, welche in den coordinirten Ebenen der xy, xz, yz liegen, und zwar sind diese (analog mit den Relat. (e) in Nr. **14**) beziehungsweise:

$$\left.\begin{array}{l} RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta,\quad RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma \end{array}\right\}\ldots(k).$$

Da nun die Kräftepaare Q und Rr (vorige Relation (i)) einander gleich sind, so müssen es auch ihre in einerlei Ebene liegenden Componenten sein, d. i. es müssen die vorigen Ausdrücke (k) den obigen von L, M, N (Relat. (h)) gleich sein; man hat daher die drei Gleichungen:

$$RY\,Cos\,\alpha - RX\,Cos\,\beta = Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px),$$
$$RX\,Cos\,\gamma - RZ\,Cos\,\alpha = Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) - Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz),$$
$$RZ\,Cos\,\beta - RY\,Cos\,\gamma = Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py),$$

aus welchen sofort die Coordinaten X, Y, Z zu bestimmen sind.

Multiplicirt man zu diesem Behufe die erste dieser Gleichungen mit $Cos\,\gamma$, die zweite mit $Cos\,\beta$ und addirt dann beide Producte, so entsteht die mit $Cos\,\alpha$ multiplicirte dritte Gleichung mit entgegengesetztem Zeichen, oder es ist überhaupt, wenn man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $Cos\,\gamma$, $Cos\,\beta$, $Cos\,\alpha$ multiplicirt, die Summe aus je zweien immer gleich der dritten mit entgegengesetztem Zeichen, so, dass man eigentlich nur zwei verschiedene oder unabhängige Gleichungen hat, indem die dritte nur eine Folge der beiden andern ist.

Benützt man daher blos die beiden ersten Gleichungen und bringt diese auf die Form:

$$[RX - \Sigma(Px)]\,Cos\,\beta + [\Sigma(Py) - RY]\,Cos\,\alpha = 0,$$
$$[RZ - \Sigma(Pz)]\,Cos\,\alpha + [\Sigma(Px) - RX]\,Cos\,\gamma = 0,$$

so sieht man sogleich, dass wenn die Kräfte P und ihre Coordinaten x, y, z ihre Unabhängigkeit und Allgemeinheit behalten sollen, diese Gleichungen nur Null werden können, indem jeder einzelne Summand Null wird. Da ferner von den beiden Factoren dieser Summanden jener $Cos\,\alpha$ oder $Cos\,\beta$ oder $Cos\,\gamma$ im Allgemeinen nicht Null ist, so muss es sofort der andere sein; dadurch erhält man endlich die drei verschiedenen Bedingungsgleichungen:

$$RX - \Sigma(Px) = 0,\quad RY - \Sigma(Py) = 0,\quad RZ = \Sigma(Pz)$$

und daraus die gesuchten Coordinaten, wegen $R = \Sigma(P)$ (Relat. (g)):

$$X = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad Y = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad Z = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \ldots (l).$$

(Man vergleiche Statik Nr. **15**.)

18. Findet in dem Systeme der parallelen Kräfte vollständiges Gleichgewicht Statt, so muss, da ein Kräftepaar Q mit einer einzelnen Kraft R nicht im Gleichgewichte, also $Q + R$ nur Null sein kann, wenn sowohl $R = 0$ als $Q = 0$ ist; so folgt, dass wegen $R = \Sigma(P) = 0$ für's Erste, damit keine fortschreitende Bewegung Statt hat, die algebraische Summe der Kräfte Null sein muss.

Was die zweite Bedingungsgleichung $Q = 0$ betrifft, welche sich auf das Drehbestreben des Systemes bezieht, so zerfällt diese (Relat. (h) Nr. **16**) in die drei folgenden: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so dass man also für das vollständige Gleichgewicht scheinbar die vier Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0,\quad Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px) = 0,$$
$$Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) - Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz) = 0,\quad Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py) = 0$$

erhält, allein da von diesen drei letztern Gleichungen, wie bereits bemerkt, jede eine Folge der beiden übrigen ist, so reduciren sich diese eigentlich auf drei, d. i. auf $R = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Wird von diesen Bedingungen blos die erste erfüllt, so findet zwar keine progressive, wohl aber eine drehende Bewegung statt, bestehen blos die beiden letztern Bedingungsgleichungen, so hat das System keine drehende, dafür aber eine fortschreitende Bewegung. Im erstern Falle reducirt sich das System der Kräfte auf ein Paar, und es besitzt dann keinen Mittelpunct der Kräfte.

19. Wählt man das rechtwinkelige Coordinatensystem so, dass die Kräfte mit einer, z. B. mit der Achse der z parallel laufen, folglich auf der Ebene der xy perpendikulär stehen, so folgen für das Gleichgewicht aus den vorigen Relationen, wegen $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ und $\gamma = 0$, die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(P) = 0, \\ \Sigma(Px) = 0,\ \ \Sigma(Py) = 0\end{array}\right\} \ldots (m),$$

d. h. es muss sowohl die algebraische Summe der Kräfte, als auch jene der Momente auf zwei sich rechtwinkelig schneidenden mit den Kräften parallelen Ebenen Null sein.

20. Wirken die sämmtlichen parallelen Kräfte nach ein und derselben Richtung, so ist ihre Resultirende $R = \Sigma(P)$ gleich der Summe der Kräfte, und ihr Angriffspunct liegt im Mittelpunct der Kräfte, dessen Coordinaten aus den obigen Relationen (l) gefunden werden.

Sind sämmtliche n Kräfte einander gleich, so ist

$$R = \Sigma(P) = nP,$$

$$X = \frac{P\Sigma(x)}{nP} = \frac{1}{n}\Sigma(x),\ \ Y = \frac{1}{n}\Sigma(y),\ \ Z = \frac{1}{n}\Sigma(z),$$

und es heisst in diesem Falle der Angriffspunct X, Y, Z Mittelpunct der mittlern Abstände.

21. Aus dem oben in Nr. **13** und ferner behandelten allgemeinen Falle der wirkenden Kräfte im Raume lassen sich auch leicht die Relationen und Bedingungen für den besondern Fall ableiten, in welchem die sämmtlichen, übrigens in dieser nach beliebigen Richtungen wirkenden n Kräfte in einer Ebene liegen.

Nimmt man nämlich diese Ebene zu einer der coordinirten, z. B. zur Ebene der xy, so erhält man aus den Relationen (a) und (b) in Nr. **13** wegen $z = z_1 = z_2 = \ldots = 0$ und $\gamma = 90^0$, sofort:

$$R = \sqrt{(\Sigma P \, Cos\, \alpha)^2 + (\Sigma P \, Cos\, \beta)^2},$$

und

$$Cos\, a = \frac{\Sigma(P \, Cos\, \alpha)}{R},\ \ Cos\, b = \frac{\Sigma(P \, Cos\, \beta)}{R}.$$

Da ferner hier das Kräftepaar Q mit jenem L zusammenfällt, so hat man (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$Q = L = \Sigma[P(y \, Cos\, \alpha - x \, Cos\, \beta)],$$

oder da, wenn p das aus einem Punct der Kraftebene auf die Kraft P gefällte Perpendikel bezeichnet, sofort (Statik Nr. **20**, Anmerk. 1) $p = y \, Cos\, \alpha - x \, Cos\, \beta$ ist, auch:

$$Q = \Sigma(Pp).$$

Da sich nun das Paar Q mit der Kraft R, welche zusammen in derselben Ebene liegen, nach Nr. **10** vereinigen lassen, indem man $Q = Rr$ setzt, so hat man endlich statt der vorigen Relation, jene:

$$Rr = \Sigma(Pp),$$

woraus sofort folgt, dass das statische Moment der Mittelkraft gleich ist der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte, diese Momente auf einen beliebigen in der Ebene augenommenen Punct bezogen. (Vergl. Statik Nr. **20**, Relat. (2).)

Für das Gleichgewicht erhält man aus den obigen sechs Relationen in Nr. **15** die drei Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P \, Cos\, \alpha) = 0, \; \Sigma(P \, Cos\, \beta) = 0 \text{ und } L, \text{ d. i. } \Sigma(Pp) = 0.$$

(Vergl. Statik Nr. **20**, Anmerk. 1 Relat. (l).)

22. Sind die in der eben betrachteten Ebene liegenden Kräfte unter einander parallel, so erhält man wegen $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta$ entweder aus der unmittelbar vorhergehenden, noch einfacher aber aus den Relationen in Nr. **16** und **17**:

$$R = \Sigma(P), \; a = \alpha, \; b = \beta, \; Q = Rr = \Sigma(Pp), \; RX = \Sigma(Px) \text{ und } RY = \Sigma(Py).$$

Für das vollständige Gleichgewicht erhält man aus Nr. **18** die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } Cos\, \alpha \; \Sigma(Py) - Cos\, \beta \; \Sigma(Px) = 0.$$

23. Verschiebt man die Coordinatenaxen X, Y in ihrer Ebene so, dass jene Y zu den gegebenen Kräften parallel wird, so erhält man wegen $\alpha = 90^0$ und $\beta = 0$, aus den letztern Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P) = 0 \text{ und } \Sigma(Px) = 0,$$

es muss nämlich sowohl die algebraische Summe der Kräfte als auch die ihrer statischen Momente auf den Anfangspunct der Coordinaten (welcher sofort ein willkürlicher ist) gleich Null sein.

Besteht blos die erste dieser beiden Bedingungsgleichungen, so findet keine fortschreitende, dagegen eine drehende Bewegung Statt. Das Umgekehrte tritt ein, wenn von diesen Gleichungen nur die letztere erfüllt wird.

24. Ist das in Nr. **13** und ferner betrachtete allgemeine System nicht vollkommen frei, sondern besitzt dasselbe z. B. einen festen Punct O, so vermindert sich die Zahl der für das Gleichgewicht gefundenen Bedingungsgleichungen von sechs auf drei. Nimmt man nämlich diesen Punct O zum Ursprung der Coordinaten, so ist er auch zugleich der Angriffspunct der n Kräfte und vernichtet sonach die Resultirende R von selbst; es bleibt daher von den obigen Bedingungsgleichungen $R=0$ und $Q=0$ für diesen Fall nur noch die letztere, welche sofort wieder in die drei Bedingungsgleichungen:

$$L=0,\ M=0,\ N=0$$

für die Ebenen der xy, xz, yz zerfällt.

Der auf den Punct O ausgeübte Druck ergibt sich aus dem Werthe von R.

25. Hat das System zwei feste Puncte O und S, so wähle man wieder den Punct O zum Anfangspunct der Coordinaten, ferner die Gerade OS zu einer, z. B. zur Achse Z. Dies vorausgesetzt, wird wie zuvor die Resultirende R der n Kräfte durch den festen Punct O aufgehoben, und es bleiben wieder nur in den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise die drei Kräftepaare L, M, N übrig.

Da jedoch die Gerade OS eine Drehungsachse des Systemes bildet, so werden die in den Ebenen xz und yz liegenden Paare M und N durch diese feste Achse aufgehoben, so, dass nur noch die einzige Bedingungsgleichung $L=0$, d. i. (Nr. **14**, Relat. (f)):

$$\Sigma[P(y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Cos}\beta)]=0$$

bestehen bleibt.

26. Kann sich das System (oder der Körper) längs dieser Achse OS verschieben, so werden von den drei Componenten:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos}\alpha),\ \Sigma(P \operatorname{Cos}\beta),\ \Sigma(P \operatorname{Cos}\gamma),$$

welche die Resultirende R (Nr. **13**, (a)) bilden, nur die beiden erstern, d. i. jene nach den Achsen der x und y aufgehoben, so, dass also die Bedingungsgleichung für die letztere Componente, so wie jene für die Drehung noch bestehen bleibt.

Man hat nämlich in diesem Falle für das Gleichgewicht die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos}\gamma)=0 \text{ und } \Sigma[P(y \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Cos}\beta)]=0.$$

Um dabei auch die auf die beiden festen Puncte O und S stattfindenden Drücke R und R' zu finden, so ersetze man diese Pressungen durch die sogenannten Reactionskräfte, d. h. durch Kräfte R und R', welche in den Puncten O und S den Drücken gleich, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht werden. Mit Hinzufügung oder Einführung dieser beiden Kräfte R, R' kann man das System sofort wieder wie ein vollkommen freies behandeln.

Man zerlege nun jede dieser beiden Kräfte R und R' (Fig. 14) in die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten p, q, r und p', q', r' und bringe ausserdem im Puncte O nach der Achse der x die zwei gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte $p' = p''$, so wie nach der Achse der y jene $q' = q''$ an, so bilden sich ausser den Kräften $p + p'$, $q + q'$ und r in O und r' in S nach den drei Achsen in den angedeuteten Richtungen noch die in den Puncten S und O angreifenden Paare (p', p'') und (q', q'').

Haben die beiden Puncte O und S die Entfernung $OS = a$ von einander, so müssen sofort für das Gleichgewicht die folgenden sechs Bedingungsgleichungen, und zwar bezüglich der fortschreitenden Bewegung, jene:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) = p + p', \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) = q + q', \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma) = r + r',$$

und hinsichtlich der drehenden Bewegung, mit Rücksicht auf den Sinn der Drehungsrichtung (und zwar nach der Bemerkung in Nr. **14**, nach welcher die Drehung von $+X$ zu $+Z$, von da zu $+Y$ und endlich von da gegen $+X$ als positiv genommen wird) in den Ebenen der xy, xz und yz beziehungsweise jene:

$$L = 0, \quad M + p'a = 0 \quad \text{und} \quad N - q'a = 0$$

bestehen.

Aus diesen sechs Gleichungen folgt:

$$r + r' = \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma), \quad p = \frac{M + a\,\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha)}{a}, \quad p' = -\frac{M}{a},$$

$$q = \frac{a\,\Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) - N}{a} \quad \text{und} \quad q' = \frac{N}{a},$$

wobei die Werthe von M und N in Nr. **14**, Relation (f) angegeben sind.

Die Drücke auf die Puncte O und S normal zur Achse OS sind sonach durch p, q, p', q' vollkommen bestimmt, während sich von dem Drucke nach der Richtung der Achse nur die Summe $r + r'$ angeben lässt; es bleibt sonach, bei Voraussetzung eines absolut festen Systemes, jeder einzelne Druck auf die Puncte O und S unbestimmt und kann die Summe $r + r'$ auf diese beliebig vertheilt werden.

Liegen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ in Ebenen, welche mit jener der xy parallel, also normal zur Drehungsachse OS sind, so wird, wegen $\gamma = 90^0$, die genannte Summe, also der Druck nach dieser Achse $r + r' = 0$.

Die übrigen Werthe sind für diesen besondern Fall, wenn man gleich für M und N die entsprechenden Werthe aus Relation (f) setzt:

$$p = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\alpha) - \Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a}, \quad p' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\alpha)}{a},$$

$$q = \frac{a\,\Sigma(P\,Cos\,\beta) - \Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a}, \quad q' = \frac{\Sigma(Pz\,Cos\,\beta)}{a}.$$

Liegen endlich sämmtliche Kräfte in einer Ebene, welche mit der Ebene der xy parallel ist und von dieser den Abstand $\frac{1}{2}a$ hat, so folgt aus diesen letztern Relationen:

$$p = p' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\alpha) \text{ und } q = q' = \tfrac{1}{2}\Sigma(P\,Cos\,\beta).$$

Fällt diese Ebene mit jener der xy zusammen, so wird wegen $z = 0$, sofort:

$$p = \Sigma(P\,Cos\,\alpha), \; p' = 0, \; q = \Sigma(P\,Cos\,\beta), \; q' = 0.$$

Anmerkung. Besitzt ein vollkommen festes System mehr als zwei feste Puncte, so sind die Drücke auf diese Puncte immer unbestimmt, und wenn sich in der Wirklichkeit in einem solchen Falle dennoch bestimmte Werthe dafür ergeben, so rührt dies nur daher, dass sich die Form eines jeden physischen Körpers oder Systemes durch die Einwirkung von Kräften immer mehr oder weniger ändert, es also in dieser Hinsicht kein absolut festes System gibt.

27. Zur Erläuterung dieser Bemerkung wollen wir den Fall annehmnn, dass sich die sämmtlichen Angriffspuncte der Kräfte in einer Ebene befinden, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes in beliebig vielen Puncten gestützt sein soll.

Nimmt man diese Ebene als coordinirte Ebene der xy und denkt sich in den Stützpuncten normale Kräfte $p, p_1, p_2, \ldots$ welche den in diesen Puncten stattfindenden Drücken gleich und entgegengesetzt sind, und die wir kurz Reactionskräfte nennen wollen (Statik Nr. **131**, 15.), welche also mit der Achse der z parallel sind und nach einerlei Richtung wirken sollen; so dürfen die an dieser Ebene wirkenden Kräfte, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, weder nach den Axen der x und y eine Wirkung, noch um die Achse der z eine Drehung hervorbringen.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher durch die Relationen gegeben:

$$\Sigma(P \, Cos \, \alpha) = 0, \quad \Sigma(P \, Cos \, \beta) = 0, \quad L = 0.$$

Werden die zur Herstellung des Gleichgewichtes angebrachten, mit der Achse Z parallelen Reactionskräfte $p, p_1 \dots$ zu einer Resultirenden r vereinigt, welche also gleich ist der Summe dieser Kräfte und mit diesen dieselbe Richtung hat; so muss ihr Angriffspunct (für's Gleichgewicht) innerhalb des convexen Polygones liegen, welches in der Ebene entsteht, wenn man die Stützpuncte durch gerade Linien mit einander verbindet. Hieraus folgt aber, dass auch die Resultante aus den Componenten der gegebenen Kräfte nach der Achse der z, d. i. $\Sigma(P \, Cos \, \gamma)$ ihren Angriffspunct innerhalb dieses genannten Polygones haben und der Kraft r entgegen gerichtet sein muss.

Zur Bestimmung des Druckes gegen die einzelnen Stützpuncte hat man nun, wenn man die rechtwinkeligen Coordinaten der angenommenen Reactionskräfte $p, p_1 \dots$ nach den Axen der x und y beziehungsweise mit $u, u_1, u_2 \dots$ und $v, v_1, v_2 \dots$ bezeichnet, im Stande des Gleichgewichtes:

$$\Sigma(p) = \Sigma(P \, Cos \, \gamma), \quad \Sigma(pu) = M \text{ und } \Sigma(pv) = N \dots (m),$$

dabei ist (aus Relat. (f) in Nr. **14** wegen $z = 0$):

$$M = \Sigma(Px \, Cos \, \gamma) \text{ und } N = -\Sigma(Py \, Cos \, \gamma).$$

Da man nun zur Bestimmung der Drücke oder Kräfte p, $p_1 \dots$ nur die drei Bedingungsgleichungen (m) erhält, so folgt, dass diese Drücke u n b e s t i m m t sein werden, sobald man mehr als drei Stützpuncte annimmt.

Auch tritt dieselbe Unbestimmtheit ein, wenn die sämmtlichen Kräfte und die drei Stützpuncte in einer g e r a d e n L i n i e, z. B. in der Axe der x liegen, weil dafür wegen $y = 0$ und $v = 0$, die dritte der vorigen Bedingungsgleichungen, in $0 = 0$ übergeht und sonach nur zwei Gleichungen bestehen.

Ist endlich nur ein Stützpunct vorhanden, so muss für das Gleichgewicht, wie sich von selbst versteht, die Resultirende durch diesen Stützpunct gehen.

Rotation eines Körpers um eine Achse *).

28. Eine weitere wichtige Anwendung finden die Kräftepaare in der Theorie der drehenden Bewegung eines Körpers um irgend eine Achse.

Es sei, um diese Anwendung zu zeigen, von den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen X, Y, Z (Fig. 22), auf welche wir die materiellen Puncte eines rotirenden Körpers beziehen wollen, jene Z die Rotationsachse, ferner sei w die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung (zugleich das Mass dieser Bewegung), so wie für irgend einen materiellen Punct $\mathrm{d}m$ des rotirenden Körpers x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten, und r der Abstand dieses Punctes von der Drehachse Z. Dies vorausgesetzt, besitzt der materielle Punct $\mathrm{d}m$ die Geschwindigkeit rw und zwar nach der Richtung der Tangente des Kreises vom Radius r, nach welcher dieses Massentheilchen durch eine Kraft p, deren Mass (Nr. **131**, 3.) $rw\,\mathrm{d}m$ ist, wie von der Ruhe aus getrieben oder in Bewegung gesetzt wird.

Auf dieselbe Weise werden alle materiellen Theilchen oder Puncte des Körpers durch ähnliche Kräfte $wr\,\mathrm{d}m$ getrieben oder bewegt, welche ihren Massen $\mathrm{d}m$ und Abständen r von der Rotationsachse proportional sind, und deren Richtungen zugleich auf diesen Geraden r und der Achse Z perpendikulär stehen.

29. Zerlegen wir nun, um diese Kräftenelemente auf andere Kräfte zu reduciren, welche mit ihnen gleichgeltend sind, d. i. die nämliche rotirende Bewegung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit w hervorbringen können, die genannte Kraft $p = wr\,\mathrm{d}m$ in drei auf einander senkrechte Seitenkräfte und zwar nach den Richtungen der Coordinatenachsen; so erhält man, wenn diese Componenten beziehungsweise durch X', Y', Z' bezeichnet werden, wie leicht zu sehen:

$$X' = wy\,\mathrm{d}m, \quad Y' = -\,wx\,\mathrm{d}m, \quad Z' = 0.$$

Verlegt man jetzt diese Kräfte mit sich parallel in den Anfangspunct A der Coordinaten, so erhält man nach dem Vor-

---

*) Mit Benützung der trefflichen Poinsot'schen Abhandlung: „*Théorie nouvelle de la Rotation des corps.*" (*Paris* 1852.)

gange in Nr. **13** (wobei $P \, Cos \, \alpha = X'$, $P \, Cos \, \beta = Y'$, $P \, Cos \, \gamma = Z'$, $\Sigma (P \, Cos \, \alpha) = \int w y \, \mathrm{d}m$, $\Sigma (P \, Cos \, \beta) = - \int w x \, \mathrm{d}m$ und $\Sigma (P \, Cos \gamma) = 0$ ist) für's Erste die im Puncte A nach den Achsen X und Y wirkenden Kräfte:

$$X' = w y \, \mathrm{d}m, \quad Y' = - w x \, \mathrm{d}m,$$

und dann drei Kräftepaare L', M', N' beziehungsweise parallel mit den Ebenen der xy, xz, yz, deren Momente durch (Nr. **14**, Relation (e)):

$$X'y - Y'x, \quad Z'x - X'z, \quad Y'z - Z'y$$

ausgedrückt sind. Setzt man für X', Y', Z' die Werthe, so reduciren sich diese drei Paare oder deren Momente auf:

$$L' = w(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}m = w r^2 \, \mathrm{d}m, \quad M' = - w y z \, \mathrm{d}m, \quad N' = - w x z \, \mathrm{d}m.$$

Verfährt man nun auf dieselbe Weise mit den sämmtlichen Kräften $w r \, \mathrm{d}m$ des Systemes der materiellen Puncte des rotirenden Körpers, so reduciren sich diese

1. auf die beiden im Puncte A angreifenden und nach AX und AY wirksamen Kräfte $X = w \int y \, \mathrm{d}m$ und $Y = - w \int x \, \mathrm{d}m$, deren Resultirende R auf der Achse AZ perpendikulär steht und die Grösse hat (analog mit R in Nr. **13**, Relat. (a)):

$$R = w \sqrt{(\int x \, \mathrm{d}m)^2 + (\int y \, \mathrm{d}m)^2} \ldots (1),$$

oder auch, wenn man die Länge des aus dem Schwerpunct O des Körpers von der Masse m auf die Umdrehungsachse AZ gefällten Perpendikels mit δ bezeichnet:

$$R = w m \delta \ldots (1')$$

(wegen, Stat. Nr. **32**, $x_1 m = \int x \, \mathrm{d}m$, $y_1 m = \int y \, \mathrm{d}m$ und $\delta^2 = x_1^2 + y_1^2$);

2. auf die beiden Paare $M = - w \int y z \, \mathrm{d}m$, $N = - w \int x z \, \mathrm{d}m$, welche beziehungsweise in mit den coordinirten Ebenen xz und yz parallelen Ebenen liegen und sich daher nach Nr. **8**, Zusatz, in diese coordinirten Ebenen selbst verlegen und sonach zu Einem Paar K vereinigen lassen, welches in einer durch AZ gehenden Ebene liegt; dieses resultirende Paar hat (Nr. **9** Zusatz, Relat. (1') wegen $\alpha = 90^0$) die Grösse:

$$K = w \sqrt{(\int x z \, \mathrm{d}m)^2 + (\int y z \, \mathrm{d}m)^2} \ldots (2);$$

und endlich

3. auf das in einer mit xy parallelen Ebene liegende, also auf der Achse AZ perpendikulären Kräftepaar, dessen Moment

$$L = w \int (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}m = w \int r^2 \, \mathrm{d}m \ldots (3)$$

ist.

Nimmt man daher die fünf Integrale $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$ und $\int (x^2+y^2)\,dm$ innerhalb jener Grenzen, welche sich auf den ganzen rotirenden Körper beziehen, so lassen sich aus den vorigen Relationen (1), (2), (3) die Werthe der Kraft R und der Paare K, L vollständig bestimmen, welche Kräfte R, K, L zusammen genau auch die in Rede stehende Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit w erzeugen können.

Zusatz 1. Geht die Umdrehungsachse AZ durch den Schwerpunct des Körpers, so ist $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, folglich auch (Relat. (1)) $R = 0$.

In diesem Falle reduciren sich daher die sämmtlichen Kräfte auf die beiden Paare K und L in (2) und (3), welche sich übrigens (wieder nach Nr. **9**, Zusatz, wobei ebenfalls $\alpha = 90^0$ ist) zu einem Paare J vereinigen lassen, dessen Grösse oder Moment

$$J = \sqrt{K^2 + L^2} \ldots (4)$$

ist; hieraus folgt daher, dass sich die Kräfte, welche im Stande sind einen Körper um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse zu drehen, immer auf ein Kräftepaar reduciren lassen.

Dabei kann noch bemerkt werden, dass dieses Paar J im Allgemeinen nicht auf der Achse AZ perpendikulär steht, indem (Nr. **9**, Zusatz, Relat. (2')) diese Paarebene mit der Achse AZ einen Winkel φ bildet, dessen Cosinus

$$Cos\,\varphi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2}} \ldots (5)$$

ist, und welcher daher nur für $K = 0$ verschwinden kann.

Zusatz 2. Ist als specieller Fall die Rotationsachse AZ eine sogenannte Hauptachse des Körpers, so sind dafür die Momente:

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int yz\,dm = 0 \ldots (6),$$

folglich ist auch (Relat. (2)) das Paar $K = 0$, und es reduciren sich die sämmtlichen Kräfte auf das einzige Paar $J = L = w \int r^2\,dm$, welches jetzt (Relat. (5)) auf der Rotationsachse perpendikulär steht;

die Kräfte also, welche einen Körper um eine seiner Hauptachsen drehen können, lassen sich immer auf ein Paar reduciren, dessen Ebene auf dieser Achse perpendikulär ist.

Da sich nun aber auch wieder umgekehrt irgend ein auf einer Hauptachse eines freien Körpers perpendikulär stehendes Paar L in Elementarkräfte $wr\,\mathrm{d}m$ zerlegen lässt, welche im Stande sind, denselben mit der Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{L}{\int r^2 \mathrm{d}m} = \frac{L}{\mu}$$

um diese Achse zu drehen, so folgt auch (wegen $\int r^2 \mathrm{d}m = \mu$ Dynamik Nr. **135**):

dass wenn an einem freien Körper ein Kräftepaar angebracht ist, dessen Ebene auf einer seiner Hauptachsen perpendikulär steht, dasselbe den Körper um diese Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, welche gleich ist dem Momente dieses Paares, dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf dieselbe Achse.

Anmerkung. Wirkt also ein Kräftepaar J auf einen freien Körper in irgend einer Ebene desselben, so lässt sich die dadurch hervorgebrachte Drehung mit Hilfe des letzten Satzes leicht bestimmen. Denn zerlegt man das gegebene Paar J in die drei Paare L, M, N beziehungsweise senkrecht auf die drei Hauptachsen des Körpers, und bezeichnet man das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf diese Achsen respective mit μ_1, μ_2, μ_3, so wie die Winkelgeschwindigkeiten der betreffenden Rotationen durch w_1, w_2, w_3, so hat man:

$$w_1 = \frac{L}{\mu_1}, \quad w_2 = \frac{M}{\mu_2}, \quad w_3 = \frac{N}{\mu_3}$$

und wenn man diese drei Rotationen wieder in Eine w zusammensetzt, so erhält man sowohl die Achse als auch die Grösse der Rotation, welche das gegebene Paar J im ersten Augenblicke in dem als ruhend gedachten Körper zu erzeugen streben.

30. Aus den bisherigen Entwickelungen ergeben sich nun die beiden wichtigen Folgerungen:

1. Lässt sich ganz einfach die Kraft R und das Paar J finden, welche zusammen im Stande sind, irgend eine gegebene Bewegung zu erzeugen. Denn wie diese Bewegung auch immer sein mag, so kann man sie stets so ansehen, als wäre sie aus zweien zusammengesetzt, nämlich aus einer progressiven oder translatorischen, welche der Bewegung des Schwerpunctes des Körpers gleich und parallel ist, und einer rotirenden Bewegung um eine durch diesen Schwerpunct gehenden

Achse. Man braucht daher die Kraft R nur so zu wählen, dass sie die erstere Bewegung, und das Paar J so anzunehmen, dass es die letztere Bewegung hervorbringen kann.

2. Wirken umgekehrt beliebig viele Kräfte auf einen Körper, so denke man sich dieselben sämmtlich mit sich parallel in den Schwerpunct des Körpers verlegt, so setzen sie sich zu einer einzigen Kraft, so wie die entstehenden Paare zu einem einzigen Paar J zusammen.

Die im Schwerpuncte angebrachte Resultirende R sucht in den sämmtlichen materiellen Puncten des Körpers die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $v = \frac{R}{m}$ nach der Richtung dieser Kraft R zu erzeugen, während das Kräftepaar J das Bestreben hat, in dem Körper eine Drehbewegung w um eine durch dessen Schwerpunct gehende Achse AZ hervorzubringen, deren Lage nach dem Obigen bestimmt werden kann.

Centrifugalkraft.

31. Um ferner auch die Centrifugalkräfte eines rotirenden Körpers zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dass durch diese drehende Bewegung (wobei jedes materielle Theilchen dm des Körpers die Kraft $rw\,dm$ besitzt oder durch diese gleichsam animirt oder getrieben wird) in jedem materiellen Punct dm in jedem Augenblick eine unendlich kleine Kraft f, die sogenannte Centrifugalkraft entsteht oder erzeugt wird, welche dieses Theilchen vom Mittelpunct des betreffenden Kreises zu entfernen strebt.

Würde das materielle Theilchen dm, dieses als vollkommen frei gedacht, blos von der einzigen Kraft $p = v\,dm$ nach der Tangente eines Kreises getrieben, so könnte dasselbe auch nicht den kleinsten Theil des Kreisbogens zurücklegen, wenn es nicht jeden Augenblick durch eine bestimmte Kraft, die sogenannte Centripetalkraft, gegen den Mittelpunct des Kreises gezogen und so auf dessen Peripherie erhalten würde, indem ohne diese Kraft das Theilchen mit der erlangten Geschwindigkeit v nach der Tangente fortgehen und sich sonach vom genannten Mittelpuncte entfernen würde.

Da die Centripetalkraft, welche der Centrifugalkraft gleich und entgegengesetzt ist, daher auf diese bezogen durch $-f$ bezeichnet wird, von der Natur der Schwerkraft ist, so lässt sich diese beschleunigende Kraft auch leicht nach denselben Gesetzen bestimmen, und zwar ist ihre Grösse (Dynamik Nr. **130**) im vorliegenden Falle $f = rw^2\,\mathrm{d}m$.

Denkt man sich daher in jedem materiellen Theilchen $\mathrm{d}m$ des rotirenden Körpers zu der Tangentialkraft $rw\,\mathrm{d}m$ noch die entsprechende Centripetalkraft $-rw^2\,\mathrm{d}m$ hinzugefügt, so wird sich das ganze System dieser materiellen Puncte, d. i. der Körper selbst, um die angenommene Achse AZ mit der Winkelgeschwindigkeit w vollkommen frei und ungezwungen so drehen, dass die Theilchen des Körpers, selbst wenn sie nicht mit einander verbunden wären, dadurch nicht im Geringsten afficirt werden.

Anmerkung. Im vorliegenden Falle wird jedes materielle Theilchen $\mathrm{d}m$ allerdings nur von der Tangentialkraft p getrieben; allein man kann, ohne Aenderung des Bewegungszustandes dieser Kraft p, die Centripetalkraft $-f$ hinzufügen, wenn man an diesen Punct zugleich noch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft $+f$ anbringt. Da es nun erlaubt ist, die Impulsionskraft $rw\,\mathrm{d}m$ durch die drei gleichgeltenden $rw\,\mathrm{d}m$, $-rw^2\,\mathrm{d}m$, $+rw^2\,\mathrm{d}m$ zu ersetzen, so kann man sich vorstellen, dass während eines Zeitelementes $\mathrm{d}t$ die beiden erstern dazu verwendet werden, um das Theilchen $\mathrm{d}m$ frei durch den Kreisbogen $rw\,\mathrm{d}t$ zu bewegen, während die dritte Kraft $+rw^2\,\mathrm{d}m$ dieses Theilchen vom Mittelpunct zu entfernen sucht.

Auf diese Weise nun werden die sämmtlichen materiellen Puncte des Körpers, in Folge seiner rotirenden Bewegung um die Achse AZ, von ganz ähnlichen beschleunigenden Kräften $+f$ getrieben, welche den innern Zustand desselben in so ferne afficiren, als sie den Cohäsionskräften entgegen, oder auf die Bänder, wenn man sich solche vorstellen will, welche diese Theilchen zurückhalten, ziehend oder spannend wirken.

32. Alle diese unendlich kleinen Centrifugalkräfte f lassen sich aber nach dem obigen Verfahren ganz leicht auf eine einzige beschleunigende Kraft R' und ein beschleunigendes Kraftpaar K' reduciren, wenn man einfach berücksichtiget, dass diese Kräfte $f = rw^2\,\mathrm{d}m$ bis auf den Factor w eben so ausgedrückt sind, wie die, die Theilchen $\mathrm{d}m$ animirenden Tangentialkräfte $p = rw\,\mathrm{d}m$, und dass sie nicht wie diese letzteren nach den Tangenten, sondern nach den Radien der zu durchlaufenden Kreise wirksam, folglich auf diesen Kräften p und der Achse AZ zugleich perpendikulär sind.

Verfährt man daher mit diesen Kräften f genau so, wie früher (Nr. **29**) mit jenen p, und verlegt die nach den Achsen der X, Y, Z entstehenden drei Componenten von f wieder in den Anfangspunct A, so erhält man erstens die mit der obigen R in Relat. (1) analoge Kraft:

$$R' = w^2 \sqrt{(\int x\,\mathrm{d}m)^2 + (\int y\,\mathrm{d}m)^2} = wR \ldots (7)$$

oder auch:

$$R' = \delta w^2 m \ldots (7')$$

(wenn man nämlich für R den Werth aus Relat. (1′) in Nr. **29** setzt) und dann das mit K in Relat. (2) analoge Paar:

$$K' = w^2 \sqrt{(\int xz\,\mathrm{d}m)^2 + (\int yz\,\mathrm{d}m)^2} = wK \ldots (8),$$

welches aus den beiden mit M' und N' analogen Paaren, deren Momente $w^2 \int xz\,\mathrm{d}m$, $w^2 \int yz\,\mathrm{d}m$ sind und beziehungsweise in den Ebenen der xz und yz liegen (oder als in diesen liegend angesehen, d. i. in diese verlegt werden können) resultirt und sonach in einer durch die Achse AZ gehenden Ebene liegen.

Ein mit L analoges, auf der Achse AZ perpendikuläres Paar L' kann hier nicht entstehen, weil die sämmtlichen Centrifugalkräfte durch die Umdrehungsachse AZ gehen, oder weil dafür $L' = Xy - Yx = 0$ wird.

33. Was nun die Lage dieser Kraft R' und des Paares K' anbelangt, so steht erstere offenbar auf der obigen Kraft R perpendikulär, weil die einzelnen Centrifugalkräfte f, von denen R' die Resultirende ist, beziehungsweise auf den einzelnen Tangential- oder Impulsionskräften p, von denen R die Resultante ist, senkrecht und diesen proportional sind.

Aus demselben Grunde ist auch die Achse AK' (Fig. 22) des Paares K' auf der Achse AK des Paares K perpendikulär (d. h. die Paarebenen bilden einen rechten Winkel, Nr. **9**, Zus. 2) und da diese letztere auf AZ, als Achse des Paares L senkrecht steht, so ist auch die erstere Achse AK' perpendikulär auf der Achse AJ des Paares J, welches aus den beiden Paaren L und K (durch Zusammensetzung nach dem in Nr. **9**, Zusatz 2 angegebenen Verfahren) resultirt: es steht also die Achse des aus den Centrifugalkräften entstehenden Paares K' zugleich auf der Rotationsachse AZ und auf der Achse des Paares J der Impulsions- oder Tangentialkräfte perpendikulär, oder die Ebene des Paares K' geht durch die Rotationsachse und steht zugleich auf der Ebene des Paares J senkrecht.

Da nun von den beiden Geraden AR und AJ die erstere die Grösse der Kraft R, und letztere die Achse und Grösse des Paares J vorstellt, welche Kräfte (R und J) zusammen dieselbe Drehung w um die freie Achse AZ bewirken können, so erhält man, wenn α den Neigungswinkel der Achse AJ (des Paares J) mit der Umdrehungsachse AZ bezeichnet (wodurch sofort $K = J \, Sin\, \alpha$ wird) für die beschleunigende Kraft R' und das beschleunigende Paar K', welche Kräfte aus den Centrifugalkräften entstehen, ganz einfach (aus den vorigen Relationen (7') und (8)):

$$R' = wR \text{ und } K' = wJ \, Sin\, \alpha \ldots (9),$$

dabei ist R' zugleich auf der Richtung der Kraft R und der Achse AZ, und K' auf der Achse AJ (des Paares J) und derselben Achse AZ perpendikulär.

Zusatz. Geht die Rotationsachse AZ durch den Schwerpunct des rotirenden Körpers, so ist wegen $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$ sofort (Relat. (7)) $R' = 0$, folglich reduciren sich in diesem Falle die sämmtlichen Kräfte auf das Paar K'.

Ist ausserdem noch die Drehachse eine der drei Hauptachsen des Körpers, so ist wegen $\int xz\,dm = 0$ und $\int yz\,dm = 0$ sofort auch noch (Relat. (8)) $K' = 0$; es halten sich daher in diesem besondern Falle die sämmtlichen Centrifugalkräfte in A (wegen $R' = 0$) das Gleichgewicht, und da auch (wegen $K' = 0$) das Kräftepaar verschwindet, so hat die Umdrehungsachse von keiner Seite her irgend einen Druck zu erleiden; aus diesem Grunde wird sie in diesem Falle eine freie Achse genannt.

Umgekehrt besitzt nur eine solche freie Achse die Eigenschaft, dass sich alle die durch Umdrehung eines Körpers um diese Achse entstehenden Centrifugalkräfte das Gleichgewicht halten oder gegenseitig aufheben; denn es muss dafür sowohl $R' = 0$ als auch $K' = 0$ sein. Aus der erstern Bedingung folgen aber aus Relat. (7) die beiden Bedingungsgleichungen $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, welche aussagen, dass die Umdrehungsachse durch den Schwerpunct gehen muss, während aus der zweiten Bedingung, wegen Relat. (8), die beiden Gleichungen

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int yz\,dm = 0 \ldots (10)$$

folgen, welche anzeigen, dass die Umdrehungsachse eine sogenannte Hauptachse des Körpers sein muss.

Anmerkung. Verschwindet zwar das Kräftepaar K', nicht aber auch die Resultirende R', d. h. wird $K' = 0$, nicht aber auch zugleich $R' = 0$, so ist zwar die Umdrehungsachse wegen $\int xz\,dm = 0$ und $\int yz\,dm = 0$ eine Hauptachse, jedoch, da sie nicht durch den Schwerpunct geht, nicht auch zugleich eine sogenannte freie Achse, indem der Punct A der Achse in jedem Augenblick einen Druck R' zu erleiden hat. Diese Hauptachse kann jedoch die Eigenschaft einer freien Achse erhalten, wenn man diesen Punct A festmacht.

34. Fasst man endlich das Ganze übersichtlich zusammen, so ergeben sich aus den vorhergehenden Betrachtungen und Entwickelungen für die Centrifugalkräfte der Körper, materiellen Ebenen und Linien die nachstehenden Sätze und Eigenschaften.

1. Im Allgemeinen besteht die Centrifugalkraft eines um eine Achse rotirenden Körpers aus der Centrifugalkraft (R' in Relat. (7')) seiner im Schwerpunct vereinigt gedachten Masse und einem Kräftepaar (K'), dessen Ebene durch die Umdrehungsachse geht; die erstere Kraft sucht den Körper von der Achse zu entfernen, das Paar dagegen die Lage dieser Achse zu verändern.

Unabhängig von der obigen Entwickelung lässt sich dieser Satz auch auf folgende Weise ableiten.

Man lege durch den Schwerpunct O des Körpers eine Ebene senkrecht auf die Umdrehungsachse, projicire irgend ein materielles Theilchen dm des Körpers auf diese Ebene und verlege zugleich auch die diesem Theilchen entsprechende Centrifugalkraft (nach Nr. **11**) mit sich parallel in diese Ebene, so erhält man erstlich eine in der Projectionsebene liegende, mit jener p gleichen und gleichgerichteten Kraft p', als Centrifugalkraft des projicirten Elementes dm', und ausserdem noch ein Kräftepaar (p, p'') vom Momente pz, wenn z der Abstand des Theilchens dm von dieser Ebene ist; die Kraft p' hat ihren Angriffspunct im Durchschnitt der Achse mit der Ebene, während das Paar auf der Achse senkrecht steht.

Verfährt man mit allen übrigen materiellen Puncten des Körpers auf dieselbe Weise, so erhält man sowohl ein System von Kräften p', welche in der genannten Ebene liegen und durch den Durchschnittspunct der Achse mit der Ebene, als auch zugleich eine Gruppe von Paaren, deren Ebenen sämmtlich durch die Umdrehungsachse gehen. Die Resultirende R' der Kräfte p', welche natürlich denselben Angriffspunct hat, geht (Dynamik Nr. **132**) durch den Schwerpunct aller dieser projicirten Massentheilchen dm', welcher zugleich auch der Schwerpunct O des Körpers ist, und hat dieselbe Grösse, wie die Centrifugalkraft der in diesem Puncte O

vereinigt gedachten Masse m der materiellen Ebene, welche Masse keine andere als die des Körpers selbst ist.

Was die Gruppe der Kräftepaare betrifft, so lassen sich diese (Nr. 9, Zusatz 3) in ein einziges Paar K' vereinigen, dessen Ebene also wieder durch die Achse geht. Diese Ebene wird jedoch im Allgemeinen nicht in die Richtung der Centrifugalkraft R' fallen, also eine Vereinigung der Kraft R' mit dem resultirenden Paar K' (Nr. **10**, Zusatz) nur in besonderen Fällen möglich sein.

Bezieht man, um noch eine zweite Methode anzuführen, die materiellen Puncte des Körpers anstatt auf die durch den Schwerpunct O gehende, auf eine mit ihr parallele Ebene in einem beliebigen Abstand, welche Ebene man sofort für die coordinirte Ebene der xy nehmen kann, und zerlegt jede Centrifugalkraft $p = rw^2 dm$ in zwei Seitenkräfte, welche beziehungsweise in die Ebenen der xz und yz fallen und mit den Achsen X und Y des rechtwinkeligen Achsensystemes parallel sind; so hat man beziehungsweise $p_x = xw^2 dm$ und $p_y = yw^2 dm$, folglich rücksichtlich der sämmtlichen materiellen Puncte des Körpers zwei Gruppen paralleler, in den Ebenen der xz und yz liegender, auf der Umdrehungsachse Z perpendikulärer, unendlich kleiner Kräfte, deren Resultanten beziehungsweise:

$$R_x = \int(xw^2 dm) = w^2 \int x dm \quad \text{und} \quad R_y = w^2 \int y dm \ldots (a)$$

sind.

Bezeichnet man die Abstände ihrer Angriffspuncte in der Achse Z von der Ebene der xy (d. i. ihre Ordinaten nach Z) mit Z_x und Z_y, so ist:

$$Z_x R_x = w^2 \int xz dm \quad \text{und} \quad Z_y R_y = w^2 \int yz dm \ldots (b).$$

Offenbar lassen sich die beiden Seitenkräfte R_x und R_y nur dann zu einer einzigen Kraft R' vereinigen, wenn sie in der Achse AZ denselben Angriffspunct haben, d. h. wenn

$$Z_x = Z_y \ldots (c)$$

ist.

Handelt es sich in der Praxis blos um die Bestimmung des Druckes auf die Umdrehungsachse oder Welle (oder deren Zapfen), so ist diese Vereinigung auch nicht nöthig.

Ist aber die durch die Relation (c) ausgedrückte Bedingung vorhanden, so entsteht die im Puncte N der Achse Z angreifende Centrifugalkraft:

$$R' = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

wofür $AN = Z_x = Z_y$ ist.

Wird die Achse AZ in diesem Puncte N festgemacht, so wird der Druck R' auf dieselbe aufgehoben und sie besitzt dann die Eigenschaft einer freien Achse.

Findet in besonderen Fällen die Bedingung Statt, dass

$$\int xz dm = 0 \quad \text{und} \quad \int yz dm = 0 \ldots (n)$$

wird, so folgt aus den Relationen (b) sofort auch: $Z_x = 0$ und $Z_y = 0$, zum Beweis, dass jetzt die Resultirenden R_x und R_y in der Ebene der xy selbst liegen und beziehungsweise mit den Achsen AX und AY zusammenfallen. Da man diese Achsen um den Ursprung A in ihrer Ebene xy beliebig (sich immer rechtwinkelig schneidend) herum drehen kann, so folgt, dass in diesem speciellen Falle die materiellen Puncte des Körpers gegen diese Ebene zu beiden Seiten, d. i. ober- und unterhalb (xy horizontal gedacht), symmetrisch liegen, diese Ebene also zugleich auch durch den Schwerpunct geht.

Bekanntlich entspricht die durch Relation (n) ausgedrückte Bedingung der drehenden Bewegung des Körpers um eine seiner Hauptachsen; es ist also jede auf einer durch den Schwerpunct des Körpers gehenden Symmetrie-Ebene senkrechte Gerade eine Hauptachse desselben.

Da in diesem Falle die Centrifugalkraft in dieser Ebene der xy liegt und durch den Schwerpunct geht, also nach dieser Richtung auf die Drehachse Z den Druck R' ausübt, so braucht man nur den Anfangspunct A (als Angriffspunct von R') festzumachen, um diesen Druck aufzuheben.

Geht die Umdrehungsachse zugleich auch durch den Schwerpunct des Körpers, fällt also der Ursprung A mit diesem Punct zusammen, ist also ausser den Relationen (n) auch noch $\int x\,dm = 0$ und $\int y\,dm = 0$, folglich (Relat. (a)) $R_x = 0$ und $R_y = 0$, also auch $R' = 0$; so hört jeder Druck auf die Umdrehungsachse von selbst auf und sie wird daher zur eigentlichen freien oder natürlichen Achse.

Hieraus folgt also, dass für jeden Körper, welcher eine (natürlich durch den Schwerpunct gehende) Symmetrie-Ebene besitzt, eine auf derselben durch den Schwerpunct gehende senkrechte Gerade eine freie Achse ist.

So ist z. B. im Würfel jede der sechs Diagonal-Ebenen eine Symmetrie-Ebene, daher sind für diesen, ausser den drei Geraden, welche die Mittelpuncte der Gegenflächen verbinden, auch noch die sechs Geraden, welche die Halbirungspuncte der parallelen Gegenkanten verbinden, freie Achsen.

Ein gerader Kegel hat ausser seiner geometrischen Achse (nach 4.) noch unzählig viele freie Achsen, welche sämmtlich in der durch den Schwerpunct auf der Achse perpendikulären Ebene liegen und auf der geometrischen Achse senkrecht stehen. Aehnliches gilt für gerade reguläre Prismen und Pyramiden, welche im Allgemeinen eben so viele durch die geometrische Achse gehenden Symmetrie-Ebenen besitzen, als die Grundflächen Seiten haben u. s. w.

2. Denkt man sich den rotirenden Körper durch Ebenen, welche auf der Rotationsachse senkrecht stehen, in unendlich dünne Schichten zerschnitten oder aufgelöst, und liegen die sämmtlichen Schwerpuncte dieser Körperelemente in ein und derselben durch die Achse gehenden Ebene; so ist dessen Centrifugalkraft eben so gross, als ob die gesammte Masse in seinem Schwerpunct concentrirt oder vereinigt wäre; die Richtung dieser Kraft aber geht im Allgemeinen nicht durch den Schwerpunct.

In diesem Falle ist es eben so, als ob eine materielle Ebene um eine in ihr liegende Gerade als Achse rotirte. Mit dem vorigen Fall verglichen, reducirt sich die Projectionsebene hier auf eine gerade, auf der Achse perpendikulären Linie, und man erhält bei demselben Verfahren die durch den Schwerpunct der Ebene gehende Centrifugalkraft R' von derselben Grösse, als ob die gesammte Masse der Ebene in diesem Puncte vereinigt wäre, so wie das Paar K', welches jetzt mit R' in einerlei (d. i. in der rotirenden) Ebene liegt und sich daher mit dieser Kraft vereinigen lässt. Durch diese Verbindung entsteht aber (Nr. **10**) eine mit jener R' gleiche und parallele Kraft, welche jedoch einen andern Angriffspunct hat, folglich nicht mehr durch den Schwerpunct der materiellen Ebene (also auch nicht des rotirenden Körpers) geht.

Nach der vorigen zweiten Methode lasse man die materielle Ebene mit jener der xz, und die Umdrehungsachse mit jener der z zusammenfallen, so reduciren sich die vorigen Relationen (a) und (b), da hier die Ordinaten y Null sind, auf jene:

$$R' = R_x = w^2 \int x \, \mathrm{d}m \ldots (\alpha) \quad \text{und} \quad Z_x = \frac{\int xz \, \mathrm{d}m}{\int x \, \mathrm{d}m} \ldots (\beta),$$

wobei, wenn Z die Ordinate des Schwerpunctes O (nach der Achse der z) ist, im Allgemeinen Z_x von Z verschieden sein wird.

3. Liegen die vorhin (in 2.) genannten Schwerpuncte der Schichten sämmtlich in einer mit der Umdrehungsachse parallelen Geraden, so geht die Centrifugalkraft des Körpers R' zugleich auch durch den Schwerpunct desselben.

Dieser Fall entspricht zugleich der Rotation einer (im Allgemeinen heterogenen) materiellen geraden Linie um eine mit ihr parallelen Achse.

Ist a der Abstand dieser Geraden von der Achse, so hat man nach der vorigen zweiten Methode ganz einfach aus den Relationen (α) und (β), da $x = a$ constant ist:

$$R' = a w^2 \int \mathrm{d}m = a w^2 m \quad \text{und} \quad Z_x = \frac{a \int z \, \mathrm{d}m}{a \int \mathrm{d}m} = \frac{\int z \, \mathrm{d}m}{m},$$

mithin ist (Statik Nr. **32**) $Z_x = Z$ gleich der Ordinate des Schwerpunctes.

Dieser Fall tritt bei allen Rotationskörpern ein, deren geometrische Achsen mit der Umdrehungsachse parallel sind.

4. Geht in diesem letztern Falle die Umdrehungsachse zugleich durch den Schwerpunct des Körpers, so wird die Centrifugalkraft (wegen $a = 0$) $R' = 0$, und die Achse wird, da jetzt jeder Druck auf dieselbe aufhört, zur freien oder natürlichen Achse.

Aus diesem Grunde sind die Achsen der Rotationskörper, ferner die geometrischen Achsen von regulären Prismen, Pyramiden u. s. w. freie Achsen.

Da man nun in der Anwendung, besonders im Maschinenwesen, jeden aus den Centrifugalkräften entstehenden Druck auf die Wellzapfen zu vermeiden hat, so erkennt man leicht, wie wichtig bei drehenden Bestandtheilen, wie Räder, Scheiben u. s. w., das richtige Centriren der betreffenden Massen ist.

Eigenschaften der freien und Hauptachsen.

35. Um diese Achsen noch speciell in's Auge zu fassen, so folgt aus den bisherigen Entwickelungen, dass man bei der Definition der freien oder sogenannten natürlichen Achsen von einem doppelten Gesichtspuncte ausgehen könne. Man kann nämlich erstens die Frage stellen, um welche Achse ein Körper oder festes System materieller Puncte sich drehen müsse, damit die in demselben thätigen Tangentialkräfte $p = rw\,\mathrm{d}m$ sich auf ein einziges Kräftepaar L reducire, dessen Ebene auf dieser Achse senkrecht steht? oder sich zweitens die Aufgabe stellen, jene Drehungsachse zu finden, auf welche bezogen die entstehenden Centrifugalkräfte $f = rw^2\,\mathrm{d}m$ sich gegenseitig aufheben oder im Gleichgewichte halten; denn in beiden Fällen hat die Drehungsachse keinen Druck zu erleiden, also auch keinen Widerstand zu leisten, und das System bewegt sich, auch wenn es vollkommen frei ist, um diese genau so, als ob die Achse fest wäre, d. h. sie wird weder irgend eine fortschreitende Bewegung annehmen, noch sonst, wenn sie auch durch Nichts gehalten ist, ihre Lage gegen den Körper oder das System verändern; endlich wird, dieses System einmal um diese Achse in drehende Bewegung versetzt, und wenn keine äussern Kräfte auf dasselbe einwirken, dabei die Winkelgeschwindigkeit w constant, also die drehende Bewegung eine gleichförmige.

36. Man mag nun die Umdrehungsachse nach der einen oder andern der beiden Bedingungen bestimmen, so kommt man in beiden Fällen (Nr. **29**, Zusätze 1 und 2 und Nr. **33**, Zusatz) zu den Bedingungsgleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0, \quad \int y\,\mathrm{d}m = 0 \ldots (1)$$

und

$$\int xz\,\mathrm{d}m = 0, \quad \int yz\,\mathrm{d}m = 0 \ldots (2),$$

wenn nämlich die Coordinatenachse Z die gesuchte Drehungsachse ist.

Diese gesuchte Achse muss also erstlich (wegen Relat. (1)) durch den Schwerpunct des Systemes gehen und ausserdem noch eine bedingte, durch die Gleichungen (2) zu bestimmende (in 2tens von Nr. **34** näher erörterte) Lage erhalten.

Werden von diesen vier Bedingungsgleichungen nur jene (2) erfüllt, so ist die, offenbar mit der Coordinatenachse Z parallele, jedoch nicht durch den Schwerpunct gehende, Drehungsachse eine sogenannte Hauptachse des Systems oder Körpers, für welche die Centrifugalkraft sofort durch den Schwerpunct geht.

Werden allgemein (da man statt der Achse Z eben so gut die beiden andern Coordinatenachsen Y oder X als Drehungsachsen wählen kann) für irgend einen Punct A eines Systemes oder Körpers bezüglich dreier, durch diesen Punct auf einander rechtwinkelig gelegte Achsen AX, AY, AZ die drei Bedingungsgleichungen:

$$\int xy\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int xz\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int yz\,\mathrm{d}m = 0$$

erfüllt, so ist jede dieser drei Achsen eine Hauptachse des Systems. Bestehen aber ausserdem noch die drei Gleichungen:

$$\int x\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int y\,\mathrm{d}m = 0,\quad \int z\,\mathrm{d}m = 0,$$

d. h. gehen diese Coordinatenachsen zugleich durch den Schwerpunct, so gehen diese Hauptachsen in freie Achsen über.

Anmerkung. Es lässt sich beweisen, dass es in jedem Puncte eines Körpers oder festen Systemes materieller Puncte drei unter sich rechtwinkelige Hauptachsen, folglich auch (wenn dieser Punct der Schwerpunct ist) drei auf einander senkrechte freie oder natürliche Achsen gibt.

Auch besitzen die drei durch irgend einen Punct N eines Körpers gehenden Hauptachsen noch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass wenn man auf diese das Moment der Trägheit des Körpers bezieht, unter allen Trägheitsmomenten dieses Körpers, welche sich auf beliebige, durch denselben Punct N gehende Achsen beziehen, das erste ein Maximum, das zweite ein Minimum und das dritte jedoch keines von beiden ist.

Rad an der Welle.

37. Als weitere Anwendung der Kräftepaare wollen wir noch mit Hilfe derselben für das Rad an der Welle sowohl die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kraft und Last, als auch die Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Legt man durch den Punct C (Fig. 15), in welchem die Achse DE des Wellenrades von der Rad- oder Umdrehungsebene der Kraft P geschnitten wird, zwei der Kraft P gleiche, parallele und entgegengesetzt wirkende Kräfte $P' = P'' = P$, d. h.

ersetzt man die Kraft P durch die ihr gleiche und gleichgerichtete Achsenkraft P' und das Paar (P, P'') vom Arm $CA = R$ gleich dem Halbmesser des Rades (oder verschiebt man die Kraft P nach Nr. **11** aus ihrem Angriffspunct A mit sich parallel nach dem Punct C).

Verfährt man ferner eben so mit der Kraft oder Last Q, indem man durch den Durchschnittspunct C' der Umdrehungsebene der Last mit der Achse die zwei der Last Q gleiche, parallele Kräfte Q', Q'' legt oder die Kraft Q in die mit ihr gleiche, parallele Kraft Q' und das Kräftepaar (Q, Q'') vom Arm $C'B = r$, als Halbmesser der Welle, auflöst; so haben die beiden Achsenkräfte P' und Q', da sie von der Achse DE aufgehoben werden, auf die Bedingung des Gleichgewichtes keinen Einfluss, und es kommen dafür nur noch die beiden, in parallelen Ebenen liegenden, nach entgegengesetzten Richtungen drehenden Kräftepaare (P, P'') und (Q, Q''), deren Momente PR und Qr sind, in Betracht. Nun müssen aber nach Nr. 8 (Zusatz) für das Gleichgewicht diese Momente einander gleich sein, folglich erhält man als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes die bekannte Relation:

$$PR = Qr \ldots (1),$$

wobei die Entfernung CC' der beiden Drehungsebenen ohne Einfluss ist.

Um ferner auch den Druck auf jeden der beiden Zapfen D und E zu finden, so zerlege man die beiden vorhin erhaltenen Achsenkräfte P' und Q', welche hierauf Einfluss haben, jede in eine verticale und horizontale Seitenkraft; seien diese beziehungsweise p und p' für P', so wie q und q' für Q'. Ist ferner O der Schwerpunct und G das Gewicht der Maschine, so ist der gesammte Zapfendruck nach verticaler Richtung, wenn man jenen Theil, welcher auf den Zapfen D kommt, durch x, und jenen, welchen der Zapfen E aufnimmt, durch y bezeichnet, sofort:

$$x + y = p + q + G.$$

Aus den beiden horizontalen Componenten q' und p' dagegen entstehen auf diese Zapfen D und E beziehungsweise die Seitendrücke x' und y', welche weiter unten bestimmt werden.

Sind α und β die Neigungswinkel der Kraft P und Last Q gegen eine Horizontale, so hat man für die erwähnten vier Seitenkräfte:

$$p = P \, Sin\, \alpha, \; p' = P \, Cos\, \alpha, \; q = Q \, Sin\, \beta, \; q' = Q \, Cos\, \beta.$$

Ist ferner die ganze Länge $DE = l$, die Entfernung $DC' = a$, jene $DC = b$ und $DO = c$, so ist für das Gleichgewicht (E als Stützpunct genommen):

$$x \, . \, DE = q \, . \, C'E + G \, . \, OE + p \, . \, CE,$$

d. i.:

$$lx = (l - a)q + (l - c)\,G + (l - b)\,p \ldots (n);$$

ferner (D als Stützpunct angesehen):

$$y \, . \, DE = p \, . \, DC + G \, . \, DO + q \, . \, DC',$$

d. i.:

$$ly = bp + c\,G + aq \ldots (o),$$

aus welchen Gleichungen (n) und (o) die verticalen Drücke in D und E gefunden werden. (Beide Gleichungen addirt geben, wie es sein soll, wieder $x + y = p + q + G$.)

Um ferner auch die horizontalen Drücke x' und y' in D und E zu bestimmen, hat man eben so (für den Stützpunct E):

$$x' \, . \, DE = q' \, . \, C'E \; p' \, . \, CE,$$

d. i.:

$$l\,x' = (l - a)\,q' - (l - b)\,p' \ldots (p),$$

und (D als Stützpunct genommen):

$$y' \, . \, DE = p' \, . \, DC - q' \, . \, DC',$$

d. i.:

$$ly' = b\,p' - a\,q' \ldots (q),$$

aus welchen Gleichungen sofort x' und y' gefunden werden. (Dabei ist der Natur der Sache gemäss, wenn man (q) von (p) abzieht, $x' - y' = q' - p'$ oder umgekehrt $y' - x' = p' - q'$.)

Die Resultirenden s und s' aus x, x' und y, y' für die Zapfen D und E sind beziehungsweise:

$$s = \sqrt{x^2 + x'^2} \text{ und } s' = \sqrt{y^2 + y'^2}.$$

Bilden endlich diese Kräfte als die gesuchten Drücke der Zapfen in ihren Lagern mit der Horizontalen die Winkel φ und φ', so hat man noch:

$$tang\, \varphi = \frac{x}{x'} \text{ und } tang\, \varphi' = \frac{y}{y'}.$$

Wirkt wie gewöhnlich beim Rad an der Welle die Last Q nach verticaler Richtung, so ist wegen $\beta = 90^0$, sofort:

$$q = Q, \; q' = 0, \text{ folglich } l\,x' = (l - b)\,p' \text{ und } l\,y' = b\,p'.$$

Hat auch die Kraft P diese Richtung, so ist auch $\alpha = 90^0$ und daher:

$$p = P,\ p' = 0,\ x' = y' = 0 \text{ und } x + y = P + Q + G.$$

Anwendung der Paare auf einige Bewegungs-Erscheinungen.

38. Um schliesslich noch einige Bewegungs-Erscheinungen zu untersuchen, die sich ebenfalls am einfachsten aus den Eigenschaften der Kräftepaare erklären lassen, so wollen wir zuerst bemerken, dass wenn eine Kugel in irgend einer Richtung gestossen wird, der von der Kugel aufgenommene Stoss immer durch den Mittelpunct derselben geht.

Denn es lässt sich die Stosskraft immer in eine Componente zerlegen, welche in die an die Kugel am Stosspunct gelegten Tangentialebene fällt und sonach verloren geht, und in eine zweite darauf normale, also durch den Mittelpunct der Kugel gehende.

Es werde nun eine auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 16) ruhende Kugel vom Halbmesser $CA = r$ in der Richtung MN vorwärts gestossen und sei die durch den Mittelpunct C nach MN gerichtete Kraft (entweder die ursprüngliche oder durch Zerlegung erhaltene, wobei die darauf senkrechte zweite Componente unberücksichtigt bleibt) $= P$.

Die Kugel wird daher anfangs durch diese Kraft P eine fortschreitende Bewegung erhalten. Da sich jedoch durch die zwischen der Oberfläche der Kugel und jener der Unterlage stattfindende Reibung eine in entgegengesetzter Richtung NM wirkende Reibungskraft p entwickelt oder geltend macht; so verlege man diese nach C, d. h. man ersetze sie nach dem vorhergehenden Verfahren durch eine durch den Mittelpunct C gehende Kraft p', welcher jener p gleich, parallel und mit ihr gleich gerichtet ist, und ein Kräftepaar (p, p'') vom Arm $CA = r$. Dadurch wird aber die vorige Kraft P der progressiven Bewegung beständig um die Kraft $p' = p$ vermindert und endlich auf Null gebracht, während das Paar (p, p''), dessen Moment $= pr$ ist, eine (in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung) Drehung der Kugel nach vorwärts erzeugt.

39. Hat man der Kugel die drehende Bewegung in dieser Richtung nach vorwärts, noch bevor sie auf der Ebene MN (Fig. 17) aufliegt, beigebracht, so entwickelt sich wieder von dem Augenblicke an, in welchem die Kugel die Ebene berührt, die Kraft p der Reibung in der Richtung MN. Wird diese, wie vorhin, durch die mit p gleiche und gleichgerichtete Centralkraft p' und das Paar (p, p'') vom Momente pr ersetzt, so zeigt sich, dass die Kugel durch die Kraft $p' = p$ eine fortschreitende Bewegung in der Richtung MN und gleichzeitig durch das Paar (p, p'') ein Drehbestreben erhält, welches der ursprünglichen Drehbewegung entgegengesetzt ist, und diese daher vermindert.

40. Hat man einer auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 18) liegenden Kugel oder einem kreisförmigen Reife durch einen excentrischen Stoss eine fortschreitende Bewegung nach MN vorwärts und gleichzeitig eine drehende Bewegung nach rückwärts beigebracht, so wird bei der vorigen Zerlegung der hervorgerufenen Kraft p der Reibung, die der Kraft P entgegenwirkende Centralkraft $p' = p$ die fortschreitende Bewegung nach einer gewissen Zeit auf Null bringen, und das Paar (p, p'') vom Moment pr die ursprüngliche Drehbewegung vermindern.

Ist nun diese ursprüngliche Drehung bis zu dem Augenblicke, in welchem die fortschreitende Bewegung aufhört, nicht auch aufgehoben, so rollt die Kugel oder der Reifen wieder gegen M zurück.

41. Betrachtet man ferner die Wirkung der beiden Ruderräder in C und D eines Dampfschiffes AB (Fig. 19), so entwickelt sich bei der Rotation derselben für die Vorwärtsbewegung des Schiffes, durch die Reaction des Wassers gegen die Schaufeln derselben an jeder Seite, d. i. in C und D eine Kraft P, welche mit der Länge des Kiels AB parallel ist und eine im Allgemeinen nahezu durch den Schwerpunct O des Schiffes gehende Resultirende $R = 2P$ in der Richtung BA geben, mit welcher eben das Schiff vorwärts getrieben wird.

Rotirt dagegen von beiden Rädern nur das eine, z. B. jenes in C in der vorigen Richtung, während das zweite in D stille steht, so kann man die Kraft P wieder aus C nach O verlegen, d. h. nach dem Vorhergehenden diese Kraft P durch eine ihr gleiche, parallele und gleichgerichtete P' und das Paar (P, P'') vom Arm OC oder dem Momente $P.OC$ ersetzen. Die erstere Kraft $P' = P$ treibt das Schiff nach vorwärts (gegen vorhin mit der halben Stärke), während das Paar (P, P'') dem Schiffe um den Schwerpunct eine solche Drehung beibringt, dass die Spitze A desselben nach rechts abweicht.

Dieselbe Wirkung wird auch durch ein am Hintertheil des Schiffes angebrachtes Steuerruder hervorgebracht, dessen in das Wasser tauchende Fläche ab die angedeutete Lage hat. Wird die parallel mit AB gerichtete Componente des auf ab stattfindenden Wasserstosses mit p bezeichnet, so wirkt, wenn diese Kraft wieder nach O transferirt wird, die Kraft $p' = p$ der fortschreitenden Bewegung des Schiffes entgegen, während das Paar (p, p'') vom Momente $p.BE$ die genannte Drehung der Spitze A nach rechts bewirkt. Je schneller also das Schiff läuft (wodurch p grösser) und je breiter das Ruder in der Richtung ab ist (wodurch der Arm BE des Paares, also dessen Moment grösser wird), desto wirksamer wird bei derselben Stellung das Ruder.

42. Untersuchen wir endlich noch die Wirkung der Handruder bei der Lenkung eines Kahnes AB in Fig. 20.

Da sich der Kahnführer gewöhnlich am Hintertheile B des Kahnes oder in dessen Nähe befindet, so sei in den drei Figuren Fig. 20 a, b, c ab die Lage der Fläche des im Wasser nach der Richtung EC bewegten oder gestossenen Ruders. Hat nun das Ruder die in Fig. 20_a angedeutete Stellung, so wird durch die Reaction des Wassers eine Kraft P normal auf ab nach der Richtung CE gegen den Schwerpunct O des Kahnes hervorgerufen, deren eine Componente (§. 18, 1. Beispiel) den Kahn in der Richtung BA vorwärts treibt, ohne demselben eine merkliche Drehung zu geben.

Bei einer Ruderstellung wie in Fig. 20_b wirkt die hervorgerufene Kraft P excentrisch, und wenn man diese nach dem vorhergehenden Verfahren parallel nach O verlegt, d. i. diese in $P' = P$, und das Paar (P, P'') vom Moment $P.OE$ auflöst, so wird der Kahn durch die Kraft $P' = P$ nach vorwärts bewegt, dagegen durch das genannte Paar (P, P'') um den Schwerpunct O mit der Spitze A nach links gedreht.

Wird endlich das Ruder in der in Fig. 20_c angedeuteten Weise angewendet, so bringt, wenn man die durch den Stoss des Ruders hervorgerufene Reactionskraft P wieder parallel in den

Schwerpunct O verlegt, die Kraft $P' = P$ nur eine geringe seitliche Bewegung, dagegen das Kräftepaar (P, P'') vom Momente $P \, . \, OE$ eine desto kräftigere Drehung des Kahnes in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung (die Spitze A nach rechts) hervor, je grösser bei gleichem Werthe von P die Entfernung OE ist.

Die Folgerungen für das mehr oder weniger wirksame Lenken oder Steuern eines Kahnes mit solchen Handrudern ergeben sich jetzt von selbst.