Temperatur in gleichen Entfernungen von der Erdoberfläche überall dieselbe wäre, was jedoch wegen der Einwirkung der Sonne nicht der Fall ist; hieraus folgt daher, dass auch das Gleichgewicht in derselben niemals Statt finden kann.

Barometrische Höhenmessung.

292. Denkt man sich unsere Atmosphäre in vollkommener Ruhe und betrachtet man durch ihre ganze Höhe von der Oberfläche der Erde an bis zur äussersten Grenze eine verticale Luftsäule, deren Basis die Flächeneinheit ist, so wird die Beschaffenheit der Luft in dieser Säule genau so sein, wie in der übrigen diese Säule umgebenden Atmosphäre. Kann man daher den Druck der Luft in dieser Säule als Function der Höhe über der Meeresfläche ausdrücken oder bestimmen, so kann man dann auch umgekehrt aus dem in irgend einer Höhe dieser Luftsäule beobachteten Luftdruck auf diese Höhe selbst schliessen.

Es sei nun, um zu dieser Kenntniss zu gelangen, q das Gewicht der cubischen Einheit der atmosphärischen Luft an der Basis dieser Luftsäule, d. i. an der Meeresfläche, und zwar unter dem Drucke P und der Temperatur Null. Unter der Voraussetzung, dass die Schwere nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunct der Erde, deren Halbmesser wir durch r bezeichnen, variire, besitzt dieselbe cubische Einheit Luft bei demselben Drucke P und derselben Temperatur Null in der Höhe z nur das Gewicht $\frac{r^2}{(r+z)^2}q$. Geht dabei die Temperatur von Null in t über und ist (Nr. 288) α der betreffende Ausdehnungscoefficient, so verändert sich der vorige Ausdruck in $\frac{qr^2}{(1+\alpha t)(r+z)^2}$, und wenn überdies noch der Druck P in jenen p übergeht, endlich in jenen:

$$\frac{qr^2}{(1+\alpha t)(r+z)^2} \cdot \frac{p}{P},$$

als Gewicht einer Kubikeinheit atmosphärischer Luft in der Höhe z, unter dem Drucke p und von der Temperatur t^0, wobei q die vorhin erklärte Bedeutung hat.

Betrachtet man nun in der genannten Luftsäule in dieser Höhe z eine unendlich dünne horizontale Schichte von der Höhe oder Dicke dz, so beträgt ihr Inhalt $1 . dz$ cubische Einheiten und es ist sonach das Gewicht dieser Luftschichte:

$$dp = \frac{q r^2}{(1 + \alpha t)(r + z)^2} \frac{p}{P} dz;$$

hieraus folgt, wenn man zugleich berücksichtigt, dass p abnimmt, wenn z zunimmt, daher dp und dz entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{q r^2 dz}{P(1 + \alpha t)(r + z)^2}.$$

Will man q als Gewicht der cubischen Einheit Luft im Niveau der Meeresfläche unter dem Drucke P und bei der Temperatur Null durch die an demselben Orte Statt findende Dichte der Luft δ und der Schwere g ausdrücken, so hat man $q = g\delta$ oder wegen $\delta = \frac{P}{k}$ (Nr. **286**, (m)) sofort $q = \frac{gP}{k}$, also auch:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g r^2}{k(1 + \alpha t)} \frac{dz}{(r + z)^2} \ldots (a).$$

Anmerkung. Die hier aufgestellte Differentialgleichung (a) lässt sich auch aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichtes (1) Nr. **290** und zwar auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnet man die Intensität der Schwere an der Basis der angenommenen Luftsäule durch g und in der Höhe z derselben durch g', so ist für den vorliegenden Fall $X = 0$, $Y = 0$, $Z = - g'$ und daher nach der erwähnten Bedingungsgleichung (1):

$$dp = - \varrho g' dz \ldots (b).$$

Ist aber bei der Temperatur 0^0 und dem Drucke P, V das Volumen und δ die Dichte irgend eines Luftquantums, und gehen, wenn sich blos die Temperatur ändert und in t^0 übergeht, V und δ beziehungsweise in V' und δ' über, so ist, wenn α den Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet, sofort (Nr. **288**) $V' = V(1 + \alpha t)$, und $\delta' = \frac{\delta}{1 + \alpha t}$.

Lässt man endlich, ohne diese Temperatur t zu ändern, den Druck P in p übergehen und bezeichnet den Werth, welchen dadurch die Dichte δ' annimmt, durch ϱ, so ist wegen $\frac{p}{P} = \frac{\varrho}{\delta'}$, sofort $p = \frac{\varrho}{\delta'} P = \frac{P\varrho(1 + \alpha t)}{\delta}$, oder wenn man $\frac{P}{\delta} = k$ setzt, wo k wieder die obige Bedeutung hat, auch (vergl. Nr. **288**, Relat. (r)) $p = k\varrho(1 + \alpha t)$, woraus sofort:

$$\varrho = \frac{p}{k(1 + \alpha t)} \ldots (c)$$

folgt. Setzt man nun sowohl diesen Werth für ϱ als auch zugleich für g' den Werth $\frac{g r^2}{(r + z)^2}$ in die obige Relation (b), so erhält man in der That wieder die obige Differentialgleichung (a).

293. Obschon sich die Temperatur in unserer angenommenen Luftsäule von Unten nach Oben nach einem uns unbekannten

Gesetze ändert, so kann man doch für die in der vorigen Formel vorkommende Temperatur t einen passenden Mittelwerth zwischen beiden Endpuncten der Beobachtungsstationen annehmen, was sofort auch für den Factor k gilt, wornach dann die Integration der vorigen Differentialgleichung (a) keinem Anstande unterliegt. Man erhält nämlich:

$$logn.\, p = \frac{g r^2}{k(1+\alpha t)(r+z)} + C.$$

Um die Constante C der Integration zu bestimmen, seien p_0 und z_0 die Werthe von p und z an der untern Beobachtungsstation; dann ist:

$$logn.\, p_0 = \frac{g r^2}{k(1+\alpha t)(r+z_0)} + C.$$

Folglich durch Subtraction dieser beiden Gleichungen (oder wenn man C aus der letztern bestimmt und in die erstere setzt) und wenn man zugleich die Höhe der 2ten Station über der erstern $z - z_0 = Z$ und auch noch $r + z_0 = R$ setzt:

$$logn.\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{g r^2}{kR(1+\alpha t)} \frac{Z}{R+Z} \ldots (2).$$

294. Um das Verhältniss der Drücke $\frac{p_0}{p}$ durch die barometrischen Höhen auszudrücken, seien D die Dichte des Quecksilbers bei der Temperatur Null, h_0 und h die Barometerhöhen an der untern und obern Station, diese bei einerlei Temperatur genommen, so wie endlich g_0 und g' die Intensitäten der Schwere an diesen beiden Stationen, so hat man, wenn g immer noch die Schwere im Niveau der Meeresfläche bezeichnet, sofort: $p_0 = g_0 D h_0$ und $p = g' D h$, folglich $\frac{p_0}{p} = \frac{g_0}{g'} \frac{h_0}{h}$, oder wegen

$$\frac{g_0}{g'} = g\frac{r^2}{(r+z_0)^2} : g\frac{r^2}{(r+z)^2} = \frac{(r+z)^2}{(r+z_0)^2} = \frac{(R+Z)^2}{R^2} = \left(1+\frac{Z}{R}\right)^2,$$

auch:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2.$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung (2) und verwandelt zugleich die natürlichen in gemeine oder Brigg'sche Logarithmen nach der Relation $logv.\, N = M\, logn.\, N$, wo M den Modul des Brigg'schen Systems bezeichnet, so erhält man die Gleichung:

$$logv.\frac{h_0}{h}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2 = \frac{M g r^2}{kR(1+\alpha t)} \cdot \frac{Z}{R+Z},$$

woraus sofort ganz einfach folgt:

$$Z = \frac{kR^2(1+\alpha t)}{Mgr^2}\left[logv.\left(\frac{h_0}{h}\right) + 2\,logv.\left(1+\frac{Z}{R}\right)\right]\left(1+\frac{Z}{R}\right)\ldots(3).$$

295. Da die Temperaturen an den beiden Beobachtungsstationen niemals gleich sein werden, so erfordern die in der vorigen Formel vorkommenden Barometerhöhen h_0 und h Correctionen, welche man in folgender Weise vornehmen kann.

Hat man die Barometerstände an beiden Stationen gleichzeitig beobachtet und diese beziehungsweise $= H_0$ und H gefunden, dabei aber zugleich auch die Temperatur des Quecksilbers abgelesen, und sind diese an den beiden Stationen beziehungsweise τ_0 und τ, so wird sich, da sich das Quecksilber bei einer Temperaturserhöhung von 1^0 C. um $\frac{1}{5550}$ seines Volumens bei 0^0 ausdehnt, die Dichte desselben bei 0^0 zu jener bei τ_0 Grad wie $1+\frac{\tau_0}{5550}$ zu 1 verhalten. Da nun aber der Luftdruck durch das Gewicht einer Quecksilbersäule gemessen wird, welche die Barometerhöhe zur Höhe und die Flächeneinheit zur Grundfläche hat, die Höhe dieser Quecksilbersäule aber mit der Dichte des Quecksilbers im umgekehrten Verhältnisse steht, so ist, wenn man h_0 und h für die der Temperatur Null entsprechenden Barometerhöhen gelten lässt und den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers $\frac{1}{5550} = \beta$ setzt, sofort $\frac{H_0}{h_0} = \frac{1+\beta\tau_0}{1}$ oder $H_0 = h_0(1+\beta\tau_0)$ und eben so auch $H = h(1+\beta\tau)$, mithin ferner $\frac{h_0}{h} = \frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau_0}\frac{H_0}{H}$, oder wenn man wirklich dividirt, jedoch nur die 1. Potenz von $\tau_0 - \tau$ beibehält:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H[1+\beta(\tau_0-\tau)]}\ldots(d).$$

Da es sich nun in der obigen Gleichung (3) eben nur um den Quotienten von $\frac{h_0}{h}$ handelt, so kann man zufolge der vorigen Gleichung am einfachsten $h_0 = H_0$ und $h = H\left(1+\frac{\tau_0-\tau}{5550}\right)$ setzen.

296. Eine weitere Correction ist in der obigen Formel (3) an dem Werthe g vorzunehmen. Denn ist g' die Schwere unter dem 45. Breitengrad und zwar ebenfalls im Niveau der Meeresfläche, und liegt die vorausgesetzte Luftsäule oder der Beobachtungsort in der geographischen Breite φ, so muss man (Nr. **134**, Anmerk. 2), $g = g'(1 - \cdot 002588\, Cos\, 2\varphi)$ setzen, wobei in Metermass $g' = 9{\cdot}80558$ zu nehmen ist *).

Setzt man nun ausser diesem Werth auch noch als Mittelwerth (Nr. **286**) $k = 78090$ und für M die bekannte Zahl ·4342945 in die genannte Formel (3), so erhält man im 2. Theil den Zahlencoefficienten nahe $= 18338$. Durch directe Beobachtungen, indem man für z einen aus trigonometrischen Messungen bestimmten Werth einsetzte, fand man sehr nahe denselben Zahlencoefficienten, nämlich 18336. Behält man diesen letztern bei und nimmt zugleich an, dass die untere Beobachtungsstation nahe im Niveau der Meeresfläche liegt, wodurch $z_0 = 0$, $R = r$ und $Z = z$ wird, so erhält man für die Höhe z der obern Station über der Meeresfläche in Metermass ausgedrückt:

$$z = \frac{18336\,(1 + \alpha t)}{1 - \cdot 002588\, Cos\, 2\varphi}\left[logv.\left(\frac{h_0}{h}\right) + 2\, logv.\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right) \ldots (I).$$

In dieser Formel bezeichnet φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, für $\frac{h_0}{h}$ ist der obige Werth (d) in Nr. **295**, für t der Mittelwerth $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau)$ der gleichzeitigen Temperaturen der beiden Stationen, für r der mittlere Erdhalbmesser (Kugelhalbmesser) $6367000^{m.}$ **) und endlich für α mit Rücksicht darauf, dass die in der Luft enthaltene Dampfmenge mit der Temperatur wächst und der Dampf unter demselben Drucke eine geringere Dichte besitzt, folglich bei einer Temperaturserhöhung die Dichte der Luft etwas schneller abnimmt, als es nach der obigen Formel (c) in Nr. **292** (Anmerk.) der Fall ist, wenn man nach Nr. **288** $\alpha = \cdot 00367$ nimmt, sofort den etwas grössern Werth ·004 zu setzen.

297. Was nun endlich die Anwendung der vorigen Formel (I) zur Bestimmung von z selbst betrifft, so berechnet man zuerst den Quotienten $\frac{18336\,(1 + \alpha t)}{1 - \cdot 002588\, Cos\, 2\varphi} = A$, in welchen man für

---

*) Nach Pouillet wäre $g' = 9{\cdot}806055$, so wie der Coefficient von $Cos\, 2\varphi$ $= \cdot 00255237$.

**) Nach Bessel ist dieser mittlere Halbmesser $= 6366728$, nach Airy $= 6367117$ und nach Schubert $= 6367269$ Meter, unter denen der letztere Werth vielleicht das meiste Vertrauen verdient.

φ und t die entsprechenden, aus der Beobachtung hervorgehenden Werthe substituirt hat. Dann ist:

$$z = A\left[logv.\left(\frac{h_0}{h}\right) + z\, logv.\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right),$$

und wenn man den Bruch $\frac{z}{r}$ gegen 1 vernachlässigt, so erhält man den ersten Näherungswerth:

$$z_1 = A\, logv.\left(\frac{h_0}{h}\right).$$

Setzt man diesen Werth z_1 statt z in den zweiten Theil der vorhergehenden Gleichung, so erhält man als zweiten Näherungswerth: $z_2 = A\left[logv.\left(\frac{h_0}{h}\right) + 2\, logv.\left(1 + \frac{z_1}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z_1}{r}\right)$.

Auf diese Weise nun kann man so lange fortfahren, bis die Differenz zweier auf einander folgender Näherungswerthe beliebig klein geworden.

Ist die zu bestimmende Höhe z nicht allzu gross, so kann man auch den Bruch $\frac{z}{r}$ ohne Weiteres ganz auslassen, in welchem Falle man dann, um den Fehler einigermassen zu compensiren, den numerischen Coefficienten 18336 in etwas vergrössert.

Nach der Angabe von Ramond, welcher im südlichen Frankreich, nahe unterm 45. Breitengrad, zahlreiche Beobachtungen vorgenommen, hat man dafür als mittlern Werth die Zahl 18393 zu setzen. Diese Breite von 45° vorausgesetzt, wäre dann die Formel ganz einfach:

$$z^{met.} = 18393\,(1 + \alpha t)\, logv.\left(\frac{h_0}{h}\right) \ldots (II),$$

eine Formel, welche für Beobachtungen in der Nähe von 45° Breite gewöhnlich angewendet wird.

Anmerkung. Herr Pick, damaliger Assistent der hiesigen k. k. Sternwarte, macht in einer der k. k. Akademie der Wissenschaften übergebenen, und in den Sitzungsberichten derselben vom Jahre 1855 veröffentlichten Abhandlung: „Ueber die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen", auf die Unzuverlässigkeit der einzelnen Barometer-Beobachtungen zur Bestimmung der Höhendifferenzen aufmerksam. Er gibt zu, dass grosse Landerhebungen und massenhafte Berge einen bedeutenden Einfluss auf die Resultate barometrischer Höhenmessungen ausüben und Differenzen mit trigonometrischen Messungen verursachen, dass jedoch diese Ursache noch keineswegs die Inconsequenzen der barometrischen Messungen unter einander erklären könne. Herr Pick kommt nach trefflicher Benützung eines bedeutenden Materiales zu dem Schlusse, dass die Ursachen der grossen Varianten nicht, oder doch nur theilweise, in der Unkenntniss des Ganges der Temperatur, nicht in dem Dunstgehalte der Atmosphäre und auch nicht in dem Gange der Winde in den unteren Luftschichten liege, sondern dass man die wirkenden Momente überhaupt noch nicht kenne, und diese erst aus einer grossen Reihe von eigens hierzu angestellten Versuchen, wobei man, so weit es möglich, auf die verschiedene Richtung des Windes in den verschiedenen über einander liegenden Schichten der Atmosphäre besondere Rücksicht zu nehmen hätte, zu ermitteln wären.

Wärme-Bestimmungen.

298. Zum bessern Verständniss der folgenden Paragraphen wollen wir zunächst einige Sätze aus der Wärmetheorie im Zusammenhange und in Kürze hier anführen und entwickeln.

Bekanntlich bedarf ein Körper eine grössere, ein anderer, bei gleicher Masse, eine geringere Wärmequantität, um bis zu demselben Grade erwärmt zu werden, d. h. der eine hat eine grössere, der andere eine geringere Wärme-Capacität. Nimmt man nun jene Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Gewichtseinheit (z. B. 1 Pfund) Wasser von 0^0 auf 1^0 C. zu erwärmen, zur Wärmeeinheit (Calorie), so heisst die Zahl, welche angibt, wie viele solcher Einheiten nothwendig sind, um die Gewichtseinheit irgend eines andern Körpers um eben so viel zu erwärmen, d. i. seine Temperatur um 1^0 zu erhöhen, dessen specifische Wärme; diese ist sonach für das Wasser = 1.

Bezeichnet man die specifische Wärme eines Körpers durch c, dessen Gewicht durch P und nimmt an, dass die specifische Wärme für alle Grade gleich ist (was in aller Strenge jedoch nicht der Fall), so ergibt sich die Wärmemenge Q, welche der Körper aufnimmt oder abgibt, um sich um eine bestimmte Anzahl Grade t zu erwärmen oder abzukühlen, aus der Relation:

$$Q = P \, . \, c \, . \, t \ldots (1).$$

Fragt man nach der specifischen Wärme c' der Volumeneinheit, d. i. nach der sogenannten relativen Wärme des Körpers, so hat man, wenn V das Volumen desselben bezeichnet, wegen $c : c' = 1 : \frac{P}{V}$ sofort:

$$c' = \frac{P}{V} c \ldots (2)$$

und es ist daher die Wärmemenge, um die Temperatur des Körpers um t^0 zu erhöhen, auch:

$$Q = V \, . \, c' \, . \, t \ldots (3).$$