

Dritter Abschnitt.

Aërostatik und Wärmetheorie.

285. Wie im §. 460 bereits bemerkt, unterscheiden sich die luftförmigen von den tropfbar-flüssigen Körpern wesentlich durch das stete Streben, sich weiter auszudehnen, und durch die fernere Eigenschaft, im hohen Grade zusammendrückbar zu sein; aus dem erstern Grunde kennen wir die Luft- oder Gasarten nur in einem mehr oder weniger comprimierten Zustande. Was ferner die Zusammendrückbarkeit betrifft, so folgen sie dabei dem in §. 464 angeführten Mariotte'schen Gesetze, nach welchem, bei ungeänderter Temperatur, das Volumen, welches irgend eine Gasmenge einnimmt, dem darauf Statt findenden Drucke umgekehrt proportional ist.

Da übrigens die Dichte eines zusammendrückbaren Körpers ebenfalls dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist, so lässt sich dieses Gesetz auch so ausdrücken, dass man sagt, es sei die Dichte des Gases dem Drucke proportional, welchem dasselbe ausgesetzt oder unterworfen ist.

Anmerkung. Regnault hat zuerst nachgewiesen, dass dieses Gesetz nur bis zu einer gewissen Grenze genau ist, indem (mit Ausnahme des Wasserstoffes, bei welchem eher das Gegentheil einzutreten scheint) bei zunehmendem Drucke die Dichte etwas geringer wird, als sie nach diesem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Allein da diese Abweichungen jedenfalls sehr gering sind und nur bei sehr hohen Pressungen merkbar werden, so kann man hier das Mariotte'sche Gesetz ohne Anstand, wenigstens für die permanenten, d. i. jene Gase, welche, wie z. B. die atmosphärische Luft, unter allen Umständen luftförmig bleiben (und bis jetzt weder durch Zusammendrücken, noch durch Abkühlung in den tropfbar-flüssigen oder festen Zustand verwandelt werden konnten), als hinreichend genau gelten lassen.

286. Bezeichnet man hier auf ähnliche Weise, wie in der Hydrostatik (erster Abschnitt), durch p den Druck auf die Flächeneinheit, welcher in irgend einem Punkte einer luftförmigen Masse Statt findet, und durch ϱ die demselben Punkt entsprechende Dichte derselben (d. i. die Masse der cubischen Einheit), so ist zufolge der vorigen Bemerkung, nach welcher der Druck oder die Expansivkraft der Dichte proportional ist, sofort:

$$p = k\varrho \dots (m),$$

wobei k einen Coefficienten oder Factor bezeichnet, welcher sowohl von der Natur des Gases als auch von der Temperatur desselben abhängt.

Diese Grösse oder Constante $k = \frac{p}{\varrho}$ lässt sich für jede Luft- oder Gasart, und zwar für eine bestimmte Temperatur dadurch bestimmen, dass man bei dieser Temperatur die einem bestimmten Drucke p entsprechende Dichte ϱ beobachtet.

So ist z. B. nach Regnault das Gewicht eines Kubikmeters trockener atmosphärischer Luft, bei einem Barometerstand von $\cdot 76^m$ und der Temperatur von 0° , d. i. im sogenannten Normalzustande in Paris *), gleich $1\cdot 293187$ Kilogramme; es ist daher der Druck der atmosphärischen Luft von dieser Beschaffenheit auf die Flächeneinheit, d. i. den Quadratmeter, gleich dem Gewichte von $\cdot 76$ Kubikmeter Quecksilber, also, da nach Regnault das Gewicht eines Kubikmeter Quecksilber in Paris $13595\cdot 93$ Kilogr. beträgt, sofort $p = 13595\cdot 93 \times \cdot 76$ Kilogr. und daher wegen $g\varrho = 1\cdot 293187$ (§. 38, m) und (für Paris) $g = 9\cdot 80896$ M. für den vorliegenden Fall:

$$k = \frac{p}{\varrho} = \frac{gp}{g\varrho} = \frac{9\cdot 80896 \times \cdot 76 \times 13595\cdot 93}{1\cdot 293187}, \text{ d. i. } k = 78376.$$

Will man statt dem Meter und Kilogramm den Wiener Fuss und das Wiener Pfund zum Grunde legen, so muss man diese eben gefundene

*) Nämlich für die geographische Breite von $48^\circ 50' 13''$ und der Höhe von 60 Meter über der Meeresfläche.

Unter 45° N. Br. und am Ufer des Meeres beträgt dieses Gewicht $1\cdot 292770$ Kilogr. Hiernach ist die atmosphärische Luft im Normalzustande $773\cdot 533$ Mal leichter als Wasser bei 4° C. und 10517 Mal leichter als Quecksilber vom specifischen Gewicht $13\cdot 59603$.

Auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, würde daher in Paris 1 Kubikfuss atmosphärische Luft im Normalzustande $\cdot 072938$, und unterm 45sten Breitengrad $\cdot 0729134$ Pfund wiegen.

Mit Rücksicht auf den Kohlensäuregehalt der Atmosphäre beträgt nach Ritter und Lasch das Gewicht von 1 Kubikmeter atmosphärischer Luft bei 0° C. $1\cdot 2934963$ Kilogr., welche Zahl bei Barometermessungen zu berücksichtigen kommt.

Zahl (wegen $p = k \frac{m}{g}$, wo m das Gewicht einer cubischen Einheit Luft bezeichnet) mit der 2ten Potenz der Zahl 3·1635336 multipliciren; dadurch erhält man, auf das Wiener Mass und Gewicht bezogen, $k = 784383$.

Biot und Arago fanden für trockene Luft $k = 77992$ und für feuchte Luft, welche eine etwas geringere Dichte besitzt, und zwar für das Maximum der Feuchtigkeit, $k = 78188$.

287. Ist s das specifische Gewicht irgend eines Gases (bei 0° und unter dem Drucke von $\cdot 76^m$ Barometerstand), dabei jenes der atmosphärischen Luft im Normalzustande zur Einheit genommen, so ist, wenn ρ die Dichte der atmosphärischen Luft und ρ' jene des Gases bezeichnet, sofort $\rho' = s\rho$.

Bezeichnet man ferner die vorige Constante k der atmosphärischen Luft, insofern sie sich auf das betreffende Gas bezieht, durch k' , so ist (Relation (m) in der vorigen Nummer) $k' = \frac{p}{\rho'} = \frac{p}{s\rho} = \frac{k}{s}$, d. h. man erhält den der betreffenden Gasart entsprechenden Coefficienten k' aus jenem k der atmosphärischen Luft (beide für die Temperatur Null), wenn man den letztern durch das specifische Gewicht des Gases dividirt. Die Expansivkraft dieses Gases wird dann (nach derselben Relation (m)) durch $p = k'\rho'$ oder wieder durch $p = k\rho$ ausgedrückt, wenn sich k und ρ auf dieses Gas beziehen.

Wird das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft im Normalzustande zur Einheit genommen, so ist nach Regnault jenes des Wassers (bei 4° C.) = 773·533, des Quecksilbers = 10517·0, des Wasserstoffes = 0·69269, des Sauerstoffes = 1·105628 (nach Bunsen 1·10561), des Stickstoffes = 0·71360, der Kohlensäure = 1·529101, des Ammoniakgases = 0·5967, des Wasserdampfes bei $100^\circ = 0·6225$ (nach neueren corrigirten Angaben = 0·621905) u. s. w.

Für die Gase gelten dieselben Zahlen auch bei jedem beliebigen Druck und jeder Temperatur, wenn man dabei das specifische Gewicht der Luft, welche mit dem betreffenden Gas denselben Druck und dieselbe Temperatur besitzt, wieder zur Einheit nimmt.

288. Bekanntlich sind die Gase in Beziehung auf ihre Spannung oder Expansivkraft ausser dem Mariotte'schen noch einem zweiten Grundgesetze, nämlich dem Gay-Lussac'schen unterworfen, zufolge welchem, wenn dabei der Druck oder die Spannung auf gleicher Höhe erhalten wird, die Zunahme des

Volumens der Zunahme der Temperatur proportional ist, und zwar ist diese Zunahme nach Gay-Lussac für verschiedene Gase nahe dieselbe, und beträgt für jeden Grad der 100theiligen Scala (oder für 1° C.) ·00375 des Volumens bei 0° (nach Regnault für atmosphärische Luft ·003665).

Bezeichnet man diesen Ausdehnungscoefficienten allgemein durch α , das Volumen und spezifische Gewicht irgend eines Gases unter einem bestimmten Drucke und der Temperatur 0° durch V_0 und s_0 , so ist nach diesem Gesetze für die Temperatur t das Volumen und spezifische Gewicht beziehungsweise:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \text{ und (wegen } s : s_0 = V_0 : V) s = \frac{s_0}{1 + \alpha t}.$$

Um aber auch das Verhältniss der Volumina und specifischen Gewichte für den Fall auszudrücken, in welchem sich nicht bloß die Temperatur, sondern auch der Druck ändert, seien wieder V_0 und s_0 das Volumen und spezifische Gewicht eines Gases bei 0°, und zwar unter dem Normaldruck von $\beta = \cdot 76^m$, so gehen, wenn sich bloß der Druck ändert und β in b übergeht, diese Grössen nach dem Mariotte'schen Gesetze über in $\frac{\beta}{b} V_0$ und $\frac{b}{\beta} s_0$, folglich, wenn sich jetzt auch die Temperatur ändert und von 0 in t übergeht, nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze, in $V = \frac{\beta}{b} (1 + \alpha t) V_0$ und $s = \frac{b}{\beta} \frac{s_0}{1 + \alpha t}$ über.

Geht also endlich allgemein das Gasvolumen V vom Drucke b und der Temperatur t in das Volumen V' vom Drucke b' und der Temperatur t' über, und sind s und s' die entsprechenden specifischen Gewichte, so ist sofort:

$$(\omega) \frac{V}{V'} = \frac{b' (1 + \alpha t)}{b (1 + \alpha t')}, \text{ und } \frac{s}{s'} = \frac{b (1 + \alpha t')}{b' (1 + \alpha t)} \dots (\omega').$$

Nunmehr lässt sich auch der obige Coefficient k der Relation (m) in Nr. 286 bestimmter ausdrücken. Beziehen sich nämlich in dieser Relation $p = k \varrho$ die Expansivkraft p des Gases und der Coefficient k auf die Temperatur t , und werden diese beiden Grössen für die Temperatur 0° durch p_0 und k_0 bezeichnet, so ist auch $p_0 = k_0 \varrho$ und daher $\frac{p}{p_0} = \frac{k}{k_0}$ oder wegen $p = p_0 (1 + \alpha t)$, auch $\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha t$ oder:

$$k = k_0 (1 + \alpha t) \dots (i),$$

wodurch für die Temperatur t die Expansivkraft des Gases von der Dichte ρ durch:

$$p = k_0 (1 + \alpha t) \rho \dots (r)$$

ausgedrückt wird.

Anmerkung. In Beziehung auf die Ausdehnung der luftförmigen Flüssigkeiten durch die Wärme haben die neueren Versuche von Magnus und Regnault den Beweis geliefert, dass der Ausdehnungscoefficient α keineswegs, wie Gay-Lussac angenommen (§. 465), für alle Gasarten derselbe und bei jedem Drucke constant sei, sondern dass derselbe bei dem Drucke von $\cdot 76^m$ Barometersäule für trockene atmosphärische Luft = $\cdot 003665$ *), für Wasserstoffgas = $\cdot 003659$, für kohlenensaures Gas = $\cdot 003700$, für Stickstoff = $\cdot 003668$ u. s. w. sei.

Ferner nimmt der Ausdehnungscoefficient bei vermehrtem Druck und einer diesem Drucke entsprechenden grösseren Dichte des Gases etwas zu; dagegen umgekehrt bei vermindertem Drucke und diesem entsprechende geringere Dichte in etwas ab. So ist z. B. für die atmosphärische Luft für die Dichte = 1 der genannte Coefficient $\alpha = \cdot 003665$, dagegen für die Dichte $\cdot 81$ und $\cdot 1444$ beziehungsweise $\alpha = \cdot 003709$ und $\cdot 003648$.

289. Es wurde in Nr. 175 bemerkt, dass sich tropfbare Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, sobald sie keine chemischen Wirkungen auf einander ausüben, in einem Gefässe derart über einander lagern, dass die specifisch leichteren immer über die schwereren zu liegen kommen und jede Flüssigkeitsschichte von der andern durch eine horizontale Niveaufläche getrennt oder separirt wird. Bei luftförmigen Flüssigkeiten oder Gasen jedoch, wenn sie auch keine chemische Reaction auf einander ausüben, tritt dieses Verhalten nicht ein, indem sich jedes Gas für sich, ohne Rücksicht auf die übrigen, durch den ganzen Raum gleichmässig vertheilt und sich so alle Gase gleichförmig mit einander mischen.

Aus diesem Grunde ist der Druck irgend einer in einem Gefässe eingeschlossenen Mischung von mehreren Gasen gleich der Summe der Pressungen aller einzelnen Gasarten, wovon jede für sich nach dem Mariotte'schen Gesetze zu bestimmen ist.

Hat man z. B. zwei Gasarten, welche nicht chemisch auf einander reagiren, beziehungsweise vom Volumen v, v' und dem

*) Kann sich die Luft frei ausdehnen, ohne dass sich ihre Elasticität oder Spannkraft ändert, so ist, ebenfalls nach Regnault's Versuchen, dieser Ausdehnungscoefficient $\alpha = \cdot 0036706$ zu setzen. Diese Zahl würde also bei Barometermessungen zu berücksichtigen sein.

Drucke p, p' (auf die Flächeneinheit) und bringt man diese in ein Gefäß vom Volumen $= V$, so wird der Gesamtdruck P der Mischung beider Gase durch die Relation $P = p \cdot \frac{v}{V} + p' \frac{v'}{V}$, d. i. durch $PV = pv + p'v'$ ausgedrückt.

Da aber nach dem Mariotte'schen Gesetze die Producte $pv, p'v'$ constant sind, so ist es auch das Product PV selbst, d. h. dasselbe Gesetz erstreckt sich auch auf die Mischung beider Gase. Dieser Beweis lässt sich natürlich auch auf jede beliebige Anzahl von Gasen ausdehnen.

290. Die in Nr. **166** und weiter aus den Begriffen des flüssigen Zustandes abgeleiteten allgemeinen Eigenschaften der Flüssigkeiten gelten natürlich nicht bloß für die tropfbar-, sondern, wie schon in Nr. **167** bemerkt, auch für die luftförmig-flüssigen Körper. So wird also im Zustande des Gleichgewichtes auch bei einem gasförmigen Körper der in irgend einem Punkte desselben ausgeübte Druck nach allen Richtungen hin mit gleicher Stärke, folglich auch auf die Gefäßwände fortgepflanzt, auf welche überdies noch der Druck in jedem Punkte normal steht.

Bezieht man genau so wie in Nr. **167** den luftförmig-flüssigen Körper auf drei rechtwinkelige Coordinaten, bezeichnet die mit den Coordinatenaxen parallelen Componenten der auf irgend einen Punkt x, y, z der Flüssigkeit wirkenden beschleunigenden Kräfte mit X, Y, Z , durch p den Druck (auf die Flächeneinheit) und durch ϱ die Dichte des Gases in diesem Punkte, so hat man auch hier für die Gase als allgemeine Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes (Gleich. (2) Nr. **168**):

$$dp = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz) \dots (1).$$

Nun ist aber nach dem Mariotte'schen Gesetze (Gleich. (m) Nr. **286**) $\varrho = \frac{p}{k}$, folglich auch, wenn man diesen Werth substituirt und gleich mit p dividirt:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{k}(Xdx + Ydy + Zdz).$$

291. Ist $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differentiale einer Function u von x, y, z ; so verwandelt sich die vorige Gleichung in jene:

$$\frac{dp}{p} = \frac{du}{k} \dots (n).$$

Für eine durchaus gleiche Temperatur, wofür also k constant bleibt (Nr. 286), erhält man hieraus durch Integration:

$$\log n. \left(\frac{p}{C} \right) = \frac{u}{k} \text{ oder:}$$

$$p = C e^{\frac{u}{k}} \dots (m),$$

wobei C die Constante der Integration bezeichnet und durch irgend einen Werth von p bestimmt werden kann, welcher einem bekannten Werth von u entspricht. Ist nämlich der Druck p an irgend einem Punkte bekannt und $= p'$, und nimmt in diesem die Function u den Werth u' an, so ist $p' = C e^{\frac{u'}{k}}$, folglich, wenn man die Relat. (m) durch diese dividirt und reducirt:

$$p = p' e^{\frac{1}{k}(u-u')} \dots (2).$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt für die Dichte, wegen $p = \varrho k$:

$$\varrho = \frac{p'}{k} e^{\frac{1}{k}(u-u')} \dots (3),$$

bei veränderlicher Temperatur ist k variabel, soll daher das Gleichgewicht, mithin die obige Gleichung (n) auch dann noch bestehen, so muss k eine Function von u sein. Hieraus folgt aber, dass für einen bestimmten oder constanten Werth von u (als Function von x, y, z), d. i. für dieselbe Niveauschichte (wofür eben Nr. 172 u constant bleibt), k constant, d. h. die Temperatur für alle Punkte einer und derselben Niveaufläche constant sein muss.

Der Druck und die Dichte des Gases werden in diesem Falle durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$p = C e^{\int \frac{du}{k}}, \quad \varrho = \frac{C}{k} e^{\int \frac{du}{k}},$$

wobei die Constante wieder den obigen Werth $C = p' e^{-\frac{u'}{k}}$ besitzt.

Betrachtet man die Erde als eine vollkommene Kugel und abstrahirt von ihrer Rotation, so ist die auf alle Lufttheilchen oder Molekule der Luftschichten wirkende Kraft gegen den Mittelpunkt gerichtet, und es bilden daher (Nr. 174) die Niveauflächen mit der Erde concentrische Kugelflächen.

Das Gleichgewicht unserer Atmosphäre würde sonach fordern, dass die

Temperatur in gleichen Entfernungen von der Erdoberfläche überall dieselbe wäre, was jedoch wegen der Einwirkung der Sonne nicht der Fall ist; hieraus folgt daher, dass auch das Gleichgewicht in derselben niemals Statt finden kann.

Barometrische Höhenmessung.

292. Denkt man sich unsere Atmosphäre in vollkommener Ruhe und betrachtet man durch ihre ganze Höhe von der Oberfläche der Erde an bis zur äussersten Grenze eine verticale Luftsäule, deren Basis die Flächeneinheit ist, so wird die Beschaffenheit der Luft in dieser Säule genau so sein, wie in der übrigen diese Säule umgebenden Atmosphäre. Kann man daher den Druck der Luft in dieser Säule als Function der Höhe über der Meeresfläche ausdrücken oder bestimmen, so kann man dann auch umgekehrt aus dem in irgend einer Höhe dieser Luftsäule beobachteten Luftdruck auf diese Höhe selbst schliessen.

Es sei nun, um zu dieser Kenntniss zu gelangen, q das Gewicht der cubischen Einheit der atmosphärischen Luft an der Basis dieser Luftsäule, d. i. an der Meeresfläche, und zwar unter dem Drucke P und der Temperatur Null. Unter der Voraussetzung, dass die Schwere nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunct der Erde, deren Halbmesser wir durch r bezeichnen, variire, besitzt dieselbe cubische Einheit Luft bei demselben Drucke P und derselben Temperatur Null in der Höhe z nur das Gewicht $\frac{r^2}{(r+z)^2}q$. Geht dabei die Temperatur von Null in t über und ist (Nr. 288) α der betreffende Ausdehnungscoefficient, so verändert sich der vorige Ausdruck in $\frac{qr^2}{(1+\alpha t)(r+z)^2}$, und wenn überdies noch der Druck P in jenen p übergeht, endlich in jenen:

$$\frac{qr^2}{(1+\alpha t)(r+z)^2} \cdot \frac{p}{P},$$

als Gewicht einer Kubikeinheit atmosphärischer Luft in der Höhe z , unter dem Drucke p und von der Temperatur t° , wobei q die vorhin erklärte Bedeutung hat.

Betrachtet man nun in der genannten Luftsäule in dieser Höhe z eine unendlich dünne horizontale Schichte von der Höhe oder Dicke dz , so beträgt ihr Inhalt $1 \cdot dz$ cubische Einheiten und es ist sonach das Gewicht dieser Luftschichte:

$$dp = \frac{gr^2}{(1 + \alpha t)(r + z)^2} \frac{p}{P} dz;$$

hieraus folgt, wenn man zugleich berücksichtigt, dass p abnimmt, wenn z zunimmt, daher dp und dz entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{gr^2 dz}{P(1 + \alpha t)(r + z)^2}.$$

Will man g als Gewicht der cubischen Einheit Luft im Niveau der Meeresfläche unter dem Drucke P und bei der Temperatur Null durch die an demselben Orte Statt findende Dichte der Luft δ und der Schwere g ausdrücken, so hat man $g = g\delta$ oder wegen $\delta = \frac{P}{k}$ (Nr. 286, (m)) sofort $g = \frac{gP}{k}$, also auch:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{gr^2}{k(1 + \alpha t)(r + z)^2} \dots (a).$$

Anmerkung. Die hier aufgestellte Differentialgleichung (a) lässt sich auch aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichtes (1) Nr. 290 und zwar auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnet man die Intensität der Schwere an der Basis der angenommenen Luftsäule durch g und in der Höhe z derselben durch g' , so ist für den vorliegenden Fall $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g'$ und daher nach der erwähnten Bedingungsgleichung (1):

$$dp = -g' dz \dots (b).$$

Ist aber bei der Temperatur 0° und dem Drucke P , V das Volumen und δ die Dichte irgend eines Luftquantums, und gehen, wenn sich blos die Temperatur ändert und in t° übergeht, V und δ beziehungsweise in V' und δ' über, so ist, wenn α den Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet, sofort (Nr. 288) $V' = V(1 + \alpha t)$, und $\delta' = \frac{\delta}{1 + \alpha t}$.

Lässt man endlich, ohne diese Temperatur t zu ändern, den Druck P in p übergehen und bezeichnet den Werth, welchen dadurch die Dichte δ' annimmt, durch ϱ , so ist wegen $\frac{p}{P} = \frac{\varrho}{\delta}$, sofort $p = \frac{\varrho}{\delta} P = \frac{Ps(1 + \alpha t)}{\delta}$,

oder wenn man $\frac{P}{\delta} = k$ setzt, wo k wieder die obige Bedeutung hat, auch (vergl. Nr. 288, Relat. (r)) $p = k\varrho(1 + \alpha t)$, woraus sofort:

$$\varrho = \frac{p}{k(1 + \alpha t)} \dots (c)$$

folgt. Setzt man nun sowohl diesen Werth für ϱ als auch zugleich für g' den Werth $\frac{gr^2}{(r + z)^2}$ in die obige Relation (b), so erhält man in der That wieder die obige Differentialgleichung (a).

293. Obschon sich die Temperatur in unserer angenommenen Luftsäule von Unten nach Oben nach einem uns unbekanntem

Gesetze ändert, so kann man doch für die in der vorigen Formel vorkommende Temperatur t einen passenden Mittelwerth zwischen beiden Endpunkten der Beobachtungsstationen annehmen, was sofort auch für den Factor k gilt, wornach dann die Integration der vorigen Differentialgleichung (a) keinem Anstande unterliegt. Man erhält nämlich:

$$\log n. p = \frac{g r^2}{k(1 + \alpha t)(r + z)} + C.$$

Um die Constante C der Integration zu bestimmen, seien p_0 und z_0 die Werthe von p und z an der untern Beobachtungsstation; dann ist:

$$\log n. p_0 = \frac{g r^2}{k(1 + \alpha t)(r + z_0)} + C.$$

Folglich durch Subtraction dieser beiden Gleichungen (oder wenn man C aus der letztern bestimmt und in die erstere setzt) und wenn man zugleich die Höhe der 2ten Station über der erstern $z - z_0 = Z$ und auch noch $r + z_0 = R$ setzt:

$$\log n. \left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{g r^2}{k R(1 + \alpha t)} \frac{Z}{R + Z} \dots (2).$$

294. Um das Verhältniss der Drücke $\frac{p_0}{p}$ durch die barometrischen Höhen auszudrücken, seien D die Dichte des Quecksilbers bei der Temperatur Null, h_0 und h die Barometerhöhen an der untern und obern Station, diese bei einerlei Temperatur genommen, so wie endlich g_0 und g' die Intensitäten der Schwere an diesen beiden Stationen, so hat man, wenn g immer noch die Schwere im Niveau der Meeresfläche bezeichnet, sofort: $p_0 = g_0 D h_0$ und $p = g' D h$, folglich $\frac{p_0}{p} = \frac{g_0 h_0}{g' h}$, oder wegen

$$\frac{g_0}{g'} = g \frac{r^2}{(r + z_0)^2} : g \frac{r^2}{(r + z)^2} = \frac{(r + z)^2}{(r + z_0)^2} = \frac{(R + Z)^2}{R^2} = \left(1 + \frac{Z}{R}\right)^2,$$

auch:
$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h} \left(1 + \frac{Z}{R}\right)^2.$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung (2) und verwandelt zugleich die natürlichen in gemeine oder Brigg'sche Logarithmen nach der Relation $\log v. N = M \log n. N$, wo M den Modul des Brigg'schen Systems bezeichnet, so erhält man die Gleichung:

$$\log v. \frac{h_0}{h} \left(1 + \frac{Z}{R}\right)^2 = \frac{M g r^2}{k R(1 + \alpha t)} \cdot \frac{Z}{R + Z},$$

woraus sofort ganz einfach folgt:

$$Z = \frac{kR^2(1 + \alpha t)}{Mg r^2} \left[\log v. \left(\frac{h_0}{h} \right) + 2 \log v. \left(1 + \frac{Z}{R} \right) \right] \left(1 + \frac{Z}{R} \right) \dots (3).$$

295. Da die Temperaturen an den beiden Beobachtungsstationen niemals gleich sein werden, so erfordern die in der vorigen Formel vorkommenden Barometerhöhen h_0 und h Correctionen, welche man in folgender Weise vornehmen kann.

Hat man die Barometerstände an beiden Stationen gleichzeitig beobachtet und diese beziehungsweise $= H_0$ und H gefunden, dabei aber zugleich auch die Temperatur des Quecksilbers abgelesen, und sind diese an den beiden Stationen beziehungsweise τ_0 und τ , so wird sich, da sich das Quecksilber bei einer Temperaturerhöhung von 1° C. um $\frac{1}{5550}$ seines Volumens bei 0° ausdehnt, die Dichte desselben bei 0° zu jener bei τ_0 Grad wie $1 + \frac{\tau_0}{5550}$ zu 1 verhalten. Da nun aber der Luftdruck durch das Gewicht einer Quecksilbersäule gemessen wird, welche die Barometerhöhe zur Höhe und die Flächeneinheit zur Grundfläche hat, die Höhe dieser Quecksilbersäule aber mit der Dichte des Quecksilbers im umgekehrten Verhältnisse steht, so ist, wenn man h_0 und h für die der Temperatur Null entsprechenden Barometerhöhen gelten lässt und den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers $\frac{1}{5550} = \beta$ setzt, sofort $\frac{H_0}{h_0} = \frac{1 + \beta \tau_0}{1}$ oder $H_0 = h_0 (1 + \beta \tau_0)$ und eben so auch $H = h (1 + \beta \tau)$, mithin ferner $\frac{h_0}{h} = \frac{1 + \beta \tau H_0}{1 + \beta \tau_0 H}$, oder wenn man wirklich dividirt, jedoch nur die 1. Potenz von $\tau_0 - \tau$ beibehält:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H [1 + \beta (\tau_0 - \tau)]} \dots (d).$$

Da es sich nun in der obigen Gleichung (3) eben nur um den Quotienten von $\frac{h_0}{h}$ handelt, so kann man zufolge der vorigen Gleichung am einfachsten $h_0 = H_0$ und $h = H \left(1 + \frac{\tau_0 - \tau}{5550} \right)$ setzen.

296. Eine weitere Correction ist in der obigen Formel (3) an dem Werthe g vorzunehmen. Denn ist g' die Schwere unter dem 45. Breitengrad und zwar ebenfalls im Niveau der Meeressfläche, und liegt die vorausgesetzte Luftsäule oder der Beob-

achtungsort in der geographischen Breite φ , so muss man (Nr. 134, Anmerk. 2), $g = g'(1 - 002588 \cos 2\varphi)$ setzen, wobei in Metermass $g' = 9.80558$ zu nehmen ist *).

Setzt man nun ausser diesem Werth auch noch als Mittelwerth (Nr. 286) $h = 78090$ und für M die bekannte Zahl 4342945 in die genannte Formel (3), so erhält man im 2. Theil den Zahlencoefficienten nahe $= 18338$. Durch directe Beobachtungen, indem man für z einen aus trigonometrischen Messungen bestimmten Werth einsetzte, fand man sehr nahe denselben Zahlencoefficienten, nämlich 18336. Behält man diesen letztern bei und nimmt zugleich an, dass die untere Beobachtungsstation nahe im Niveau der Meeresfläche liegt, wodurch $z_0 = 0$, $R = r$ und $Z = z$ wird, so erhält man für die Höhe z der obren Station über der Meeresfläche in Metermass ausgedrückt:

$$z = \frac{18336(1 + \alpha t)}{1 - 002588 \cos 2\varphi} \left[\log v. \left(\frac{h_0}{h} \right) + 2 \log v. \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right] \left(1 + \frac{z}{r} \right) \dots (I).$$

In dieser Formel bezeichnet φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, für $\frac{h_0}{h}$ ist der obige Werth (d) in Nr. 295, für t der Mittelwerth $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau)$ der gleichzeitigen Temperaturen der beiden Stationen, für r der mittlere Erdhalbmesser (Kugelhalbmesser) 6367000^m **) und endlich für α mit Rücksicht darauf, dass die in der Luft enthaltene Dampfmenge mit der Temperatur wächst und der Dampf unter demselben Drucke eine geringere Dichte besitzt, folglich bei einer Temperaturerhöhung die Dichte der Luft etwas schneller abnimmt, als es nach der obigen Formel (c) in Nr. 292 (Anmerk.) der Fall ist, wenn man nach Nr. 288 $\alpha = 00367$ nimmt, sofort den etwas grössern Werth 004 zu setzen.

297. Was nun endlich die Anwendung der vorigen Formel (I) zur Bestimmung von z selbst betrifft, so berechnet man zuerst den Quotienten $\frac{18336(1 + \alpha t)}{1 - 002588 \cos 2\varphi} = A$, in welchen man für

*) Nach Pouillet wäre $g' = 9.806055$, so wie der Coefficient von $\cos 2\varphi = 00255237$.

**) Nach Bessel ist dieser mittlere Halbmesser $= 6366728$, nach Airy $= 6367117$ und nach Schubert $= 6367269$ Meter, unter denen der letztere Werth vielleicht das meiste Vertrauen verdient.

φ und t die entsprechenden, aus der Beobachtung hervorgehenden Werthe substituirt hat. Dann ist:

$$z = A \left[\log v. \left(\frac{h_0}{h} \right) + z \log v. \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right] \left(1 + \frac{z}{r} \right),$$

und wenn man den Bruch $\frac{z}{r}$ gegen 1 vernachlässigt, so erhält man den ersten Näherungswerth:

$$z_1 = A \log v. \left(\frac{h_0}{h} \right).$$

Setzt man diesen Werth z_1 statt z in den zweiten Theil der vorhergehenden Gleichung, so erhält man als zweiten Näherungswerth:

$$z_2 = A \left[\log v. \left(\frac{h_0}{h} \right) + 2 \log v. \left(1 + \frac{z_1}{r} \right) \right] \left(1 + \frac{z_1}{r} \right).$$

Auf diese Weise nun kann man so lange fortfahren, bis die Differenz zweier auf einander folgender Näherungswerthe beliebig klein geworden.

Ist die zu bestimmende Höhe z nicht allzu gross, so kann man auch den Bruch $\frac{z}{r}$ ohne Weiteres ganz auslassen, in welchem Falle man dann, um den Fehler einigermaßen zu compensiren, den numerischen Coefficienten 18336 in etwas vergrößert.

Nach der Angabe von Ramond, welcher im südlichen Frankreich, nahe unterm 45. Breitengrad, zahlreiche Beobachtungen vorgenommen, hat man dafür als mittlern Werth die Zahl 18393 zu setzen. Diese Breite von 45° vorausgesetzt, wäre dann die Formel ganz einfach:

$$z^{met.} = 18393 (1 + \alpha t) \log v. \left(\frac{h_0}{h} \right) \dots (II),$$

eine Formel, welche für Beobachtungen in der Nähe von 45° Breite gewöhnlich angewendet wird.

Anmerkung. Herr Pick, damaliger Assistent der hiesigen k. k. Sternwarte, macht in einer der k. k. Akademie der Wissenschaften übergebenen, und in den Sitzungsberichten derselben vom Jahre 1855 veröffentlichten Abhandlung: „Ueber die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen“, auf die Unzuverlässigkeit der einzelnen Barometer-Beobachtungen zur Bestimmung der Höhendifferenzen aufmerksam. Er gibt zu, dass grosse Landerhebungen und massenhafte Berge einen bedeutenden Einfluss auf die Resultate barometrischer Höhenmessungen ausüben und Differenzen mit trigonometrischen Messungen verursachen, dass jedoch diese Ursache noch keineswegs die Inconsequenzen der barometrischen Messungen unter einander erklären könne. Herr Pick kommt nach trefflicher Benützung eines bedeutenden Materiales zu dem Schlusse, dass die Ursachen der grossen Varianten nicht, oder doch nur theilweise, in der Unkenntniss des Ganges der Tem-

peratur, nicht in dem Dunstgehalte der Atmosphäre und auch nicht in dem Gange der Winde in den unteren Luftschichten liege, sondern dass man die wirkenden Momente überhaupt noch nicht kenne, und diese erst aus einer grossen Reihe von eigens hierzu angestellten Versuchen, wobei man, so weit es möglich, auf die verschiedene Richtung des Windes in den verschiedenen über einander liegenden Schichten der Atmosphäre besondere Rücksicht zu nehmen hätte, zu ermitteln wären.

Wärme-Bestimmungen.

298. Zum bessern Verständniss der folgenden Paragraphen wollen wir zunächst einige Sätze aus der Wärmetheorie im Zusammenhang und in Kürze hier anführen und entwickeln.

Bekanntlich bedarf ein Körper eine grössere, ein anderer, bei gleicher Masse, eine geringere Wärmequantität, um bis zu demselben Grade erwärmt zu werden, d. h. der eine hat eine grössere, der andere eine geringere Wärme-Capacität. Nimmt man nun jene Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Gewichtseinheit (z. B. 1 Pfund) Wasser von 0° auf 1° C. zu erwärmen, zur Wärmeeinheit (Calorie), so heisst die Zahl, welche angibt, wie viele solcher Einheiten nothwendig sind, um die Gewichtseinheit irgend eines andern Körpers um eben so viel zu erwärmen, d. i. seine Temperatur um 1° zu erhöhen, dessen specifische Wärme; diese ist sonach für das Wasser = 1.

Bezeichnet man die specifische Wärme eines Körpers durch c , dessen Gewicht durch P und nimmt an, dass die specifische Wärme für alle Grade gleich ist (was in aller Strenge jedoch nicht der Fall), so ergibt sich die Wärmemenge Q , welche der Körper aufnimmt oder abgibt, um sich um eine bestimmte Anzahl Grade t zu erwärmen oder abzukühlen, aus der Relation:

$$Q = P \cdot c \cdot t \dots (1).$$

Fragt man nach der specifischen Wärme c' der Volumeneinheit, d. i. nach der sogenannten relativen Wärme des Körpers, so hat man, wenn V das Volumen desselben bezeichnet, wegen $c : c' = 1 : \frac{P}{V}$ sofort:

$$c' = \frac{P}{V} c \dots (2).$$

und es ist daher die Wärmemenge, um die Temperatur des Körpers um t° zu erhöhen, auch:

$$Q = V \cdot c' \cdot t \dots (3).$$

299. Mischt man zwei Gewichtsmengen P und P' einer gleichen Substanz (z. B. Wasser mit Wasser, Quecksilber mit Quecksilber u. s. w.) von verschiedenen Temperaturen t und t' zusammen, so nimmt die Mischung, welche sofort das Gewicht $P + P'$ besitzt, eine mittlere Temperatur T an, welche sich aus der bekannten Relation $P(t - T) = P'(T - t')$, welche ausdrückt, dass die Wärmemenge, welche der eine Theil P verliert, jener gleich sei, welchen der andere Theil P' gewinnt, und welche auch die Form $(P + P')T = Pt + P't'$ annimmt, bestimmen lässt. Es ist nämlich:

$$T = \frac{Pt + P't'}{P + P'} \dots (4).$$

Mischt man dagegen die Gewichtsmengen P, P' zweier Substanzen von verschiedener specifischer Wärme c und c' zusammen, so folgt aus der Relation $P(t - T)c = P'(T - t')c'$, wenn man nämlich wieder $t > t'$ voraussetzt, sofort:

$$c = \frac{P'(T - t')c'}{P(t - T)} \dots (5),$$

eine Formel, mittelst welcher sich die specifische Wärme der verschiedenen Körper aus den Gewichten P, P' , den Temperaturen t, t' vor der Mischung, der Mischungstemperatur T und der specifischen Wärme c' der einen Substanz, gewöhnlich des Wassers, wofür $c' = 1$ ist, berechnen lässt.

So fand man z. B., die specifische Wärme des Wassers = 1 gesetzt, jene des Eisens = ·1138, Kupfers = ·0951, Bleies = ·0314, Quecksilbers = ·0333, Glases = ·0977, Tannenholzes = ·654 u. s. w.

Specifische Wärme der Gase.

300. Bekanntlich ändert sich die Spannung oder Expansivkraft einer gegebenen Gasmasse aus zwei Ursachen: einmal durch Aenderung des Volumens oder der Dichte bei gleichbleibender Temperatur, und dann durch Aenderung der Temperatur bei gleichbleibendem Volumen. Hierauf beruhen die beiden, die Namen ihrer Entdecker Mariotte und Gay-Lussac tragenden bekannten Grundgesetze der Gase. Was das letztere anbelangt, so kann man bei Erwärmung einer Gasmasse entweder das Volumen constant erhalten, wobei sich dann die Spannung des Gases von p auf p' erhöht, oder man kann dabei die Spannung

oder den Druck p constant erhalten, in welchem Falle sich dann das Gas vom Volumen v auf jenes v' ausdehnt.

Eben so kann man auch nach der auf 1° kommenden specifischen Wärme mit oder ohne Ausdehnung, d. h. mit constantem Druck oder mit constantem Volumen, fragen. Endlich kann man auch hier bei Gasen die specifische Wärme entweder auf ein gleiches Gewicht, oder (in welchem Falle man wieder den Ausdruck relative Wärme gebraucht, Nr. 298) auf ein gleiches Volumen beziehen.

301. Was nun zuerst die specifische Wärme der Gase mit constantem Drucke, also mit Ausdehnung betrifft, so wurde diese bereits für die wichtigsten, sowohl einfachen als zusammengesetzten Gase auf directe Weise gefunden. Nach den neuesten und verlässlichsten Bestimmungen, welche von Regnault herrühren, hat man, die specifische Wärme des Wassers dem Gewichte nach ausgedrückt, zur Einheit genommen, folgende Werthe:

	Dichte	nach Volumen, (relative W.)	nach Gewicht (specif. W.)
Atmosphärische Luft	1·0000	·2377	·2377
Sauerstoff	1·1056	·2412	·2182
Stickstoff	·9713	·2370	·2440
Wasserstoff	·0692	·2356	3·4046
Wasserdampf	·6219	·2950	·4750
Alkoholdampf	1·5890	·7171	·4513
Terpentinöl	4·6978	2·3776	·5061
	u. s. w.		

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, dass die einfachen permanenten Gase bei gleichem Volumen auch nahezu gleich viel Wärme zu ihrer Erwärmung bedürfen, während diese bei zusammengesetzten und condensirbaren (also nicht permanenten) Gasen verschiedene Wärmemengen erfordern.

Anmerkung. Regnault fand überdies für atmosphärische Luft die folgenden mittlern specifischen Wärmen nach Gewicht:

von — 30° bis + 10° C.	·2377
10° „ + 100° C.	·2379
100° „ + 225° C.	·2376,

- also so gut wie constant, so dass daher ein gegebenes Luftgewicht zur Erwärmung um 1° bei allen hier angeführten Temperaturen dieselbe Wärmemenge erfordert.

302. Was ferner die specifische Wärme ohne Ausdehnung, also bei constantem Volumen betrifft, so ist bisher eine directe Bestimmung derselben noch nicht gelungen und man musste sich begnügen, auf experimentalem Wege das Verhältniss zwischen der specifischen Wärme c mit Ausdehnung zu jener c_1 ohne Ausdehnung, d. i. die Zahl:

$$\alpha = \frac{c}{c_1}$$

zu ermitteln. Bis auf weitere Bestimmungen kann man gegenwärtig als den für die atmosphärische Luft wahrscheinlichsten Werth $\alpha = 1.41$ setzen, so, dass also z. B. für die atmosphärische Luft, wofür $c = .2377$ genommen werden kann, sofort $c_1 = .1686$ wäre.

Mechanische Arbeit der Wärme.

303. In einem mit einem beweglichen Kolben versehenen Cylinder, in welchem sich irgend ein Gas, z. B. erhitzte Luft, befindet, übt dasselbe gegen den Kolben einen gewissen Druck aus, und dieser wird, wenn auch belastet, unter gewissen Umständen fortgeschoben; dabei dehnt sich das Gas aus und verliert einen Theil seiner Wärme. Da nun durch diese Ausdehnung und Fortschiebung des Kolbens das Gas eine gewisse Arbeit verrichtet und damit ein Wärmeverlust verbunden ist, so folgert man mit Recht, dass die verschwundene Wärme in Arbeit umgewandelt wurde, und zwar geht man bei der auf diese Wahrnehmung gegründete mechanische Wärmetheorie von dem Satze aus, dass die verschwundene oder verbrauchte Wärme der verrichteten Arbeit genau proportional sei.

Schiebt man jetzt den Kolben wieder bis auf seinen ursprünglichen Stand zurück, so wird das Gas comprimirt und erwärmt, und zwar nimmt, vorausgesetzt, dass jeder Wärme-Zu- oder Abgang durch die Wände des Cylinders vermieden wird, das Gas genau wieder die ursprüngliche Temperatur vor der Ausdehnung an; es wird daher in diesem Falle die verrichtete Arbeit in Wärme umgesetzt.

Diese und ähnliche Erfahrungen und Beobachtungen bestätigen die Aequivalenz von Wärme und Arbeit, und den von Clausius aufgestellten Grundsatz: dass in allen

Fällen, in welchen durch Wärme Arbeit entsteht, stets eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge verschwindet oder verbraucht wird; so wie umgekehrt, durch Verrichtung einer eben so grossen Arbeit dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt werden kann.

304. Da nun aber von diesem Gesichtspuncte aus Wärme und Arbeit äquivalent sind, so muss sich auch die Wärmemenge durch die für die Arbeit bestehende Einheit messen, oder allgemeiner, es müssen sich von den beiden Einheiten, welche beziehungsweise zum Messen der Wärmemenge und Arbeitsgrösse dienen, eine in die andere umwandeln, oder eine durch die andere ausdrücken lassen. Es kommt also zunächst darauf an, zu ermitteln, welche Arbeitsgrösse einer Calorie, d. i. jener Wärmemenge entspricht, welche im Stande ist, 1 Pfund Wasser von 0° auf 1° C. zu erwärmen.

Nun ist (Nr. 298, (1)) $Pc\Delta t$ die erforderliche Wärmemenge, um einen Körper, dessen spezifische Wärme c ist, mit Ausdehnung (oder bei constantem Druck) um Δt zu erwärmen, so wie (Nr. 302) $Pc_1\Delta t$ jene Wärme, welche denselben Körper ohne Ausdehnung (oder bei constantem Volumen) um eben so viel erwärmt. Es ist daher wegen $c > c_1$ (Nr. 302) jener Theil der Wärme $= P(c - c_1)\Delta t$, die sogenannte Ausdehnungswärme, während der Ausdehnung des Gases oder Körpers überhaupt verbraucht oder gebunden worden, und man hätte mit dieser Wärmemenge den Körper, wenn er sich nicht ausgedehnt hätte, noch weiter um Δt erwärmen können, wobei, wegen $Pc\Delta t = P(c - c_1)\Delta t$ sofort:

$$\Delta t = \left(1 - \frac{c_1}{c}\right) \Delta t = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Delta t \text{ ist.}$$

305. Bei den festen und tropfbar-flüssigen Körpern wirkt von der zugeführten Wärme nur ein Theil auf äussere Druck, indem der andere Theil zur Wirkung gegen die Cohäsionsanziehung der Theilchen verwendet wird; es wird also bei diesen Körpern nebst der äusseren, messbaren, auch noch eine innere Arbeit erzeugt, deren Werth jedoch in der Regel unbekannt ist.

Bei den permanenten Gasen dagegen (welche auch sehr nahe dieselbe spezifische Wärme besitzen), bei welchen die Cohäsionskräfte keinen merkbaren Einfluss mehr ausüben, sind die Wirkungen der Wärme vollständig mess- oder wahrnehmbar, indem der gesammte Wärmeverbrauch der äussern Arbeit entspricht. Es ist daher am einfachsten, bei Bestimmung des Arbeitsäquivalentes von diesen Gasen auszugehen.

306. Ein Pfund Luft verbraucht im Normalzustande, d. i. bei 0° Temperatur und $2\cdot404$ Fuss ($760^{mm.} = 2\cdot40428^f.$) Druck, zu dessen Erwärmung von 0° auf 1° nach Nr. **304** die Ausdehnungswärme $c - c_1$. Da nun aber (Nr. **302**) $c = 1\cdot41 c_1$ und nach Regnault $c = \cdot2377$ ist, so folgt:

$$c - c_1 = \cdot2377 \left(1 - \frac{1}{1\cdot41}\right) = \cdot0691.$$

Ferner hat 1 Kubikfuss Luft (im Normalzustande) nach Regnault ein Gewicht von $\cdot0729134$ Pfunde, folglich besitzt 1 Pfund Luft das Volumen von $v_0 = \frac{1}{\cdot0729134} = 13\cdot715$ Kubikfuss.

Der Druck einer Atmosphäre beträgt unter den gemachten Voraussetzungen auf 1 Quadratfuss $p_0 = 1843\cdot7$ Pfunde. Endlich ist der Ausdehnungscoefficient nach Regnault (Nr. **288**) $\alpha = \cdot003665$, folglich die Arbeit, welche durch Erwärmung von 1 Pfund Luft (von der genannten Beschaffenheit) geleistet wird, wenn man diese Arbeit durch R bezeichnet:

$$R = p_0 \alpha v_0 = 1843\cdot7 \times \cdot003665 \times 13\cdot715 = 92\cdot675 \dots (m).$$

Bezeichnet nun A das Wärmeäquivalent für die Arbeitseinheit, d. i. für ein Fusspfund, so ist $c - c_1 = AR$ und daraus:

$$A = \frac{c - c_1}{R} \dots (s),$$

oder wenn man für $c - c_1$ und R die vorigen Werthe setzt, sofort:

$$A = \cdot00074562,$$

und daraus ergibt sich auch umgekehrt das Arbeitsäquivalent für die Wärmeeinheit, nämlich:

$$A' = \frac{1}{A} = 1341 \text{ Fusspfund.}$$

Ist also einem Körper die Wärmemenge von Q Calorien zugeführt worden, so entspricht diese Wärmequantität nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie einer Arbeit von $\frac{1}{A} \cdot Q = 1341 Q$ Fusspfund,

d. h. wäre diese Wärmemenge in Arbeit umgesetzt worden, so hätte man mit derselben 1341*Q* Pfunde 1 Fuss hoch heben können.

Umgekehrt entspricht einer Arbeit von N Fusspfund die Wärmemenge von $AN = \frac{N}{1341}$ Wärmeeinheiten oder Calorien, und es würde, wenn diese Arbeit in irgend einer Weise, z. B. durch Comprimirung eines Gases, in Wärme verwandelt worden, diese Wärme von AN Einheiten im Stande sein, AN Pfund Wasser von 0° um 1° zu erwärmen.

Befindet sich z. B. Gas in einem Cylinder vom Querschnitt F und drückt dasselbe auf einen Kolben mit der Spannung p , so ist, wenn derselbe in einem gewissen Momente vom Ende des Cylinders den Abstand x hat, das Volumen, welches das Gas in diesem Augenblicke einnimmt, $v = Fx$, so wie der Druck des Gases gegen den Kolben Fp . Wird nun der Kolben in Folge dieses Druckes um dx fortgeschoben, so ist die vom Gase verrichtete Arbeit $dw = Fp dx$, oder wegen $F dx = dv$ auch $dw = p dv$. Dieser Arbeit entspricht aber die Wärmemenge (β)... $A dw = A p dv$, und es ist eben diese Wärmemenge, welche während dieser Arbeitsverrichtung dw verschwindet.

Ist v_1 das Anfangs- und v_2 das Endvolumen, so ist die während der Ausdehnung von v_1 auf v_2 verrichtete Arbeit $w = \int_{v_1}^{v_2} p dv$, so wie die dabei

verschwundene Wärmemenge $= A \int_{v_1}^{v_2} p dv$.

Dabei kann die Integration nur ausgeführt werden, wenn das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich p mit v ändert, oder nach welchem p von v abhängt.

Anmerkung. Um das hier gefundene Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit im metrischen Mass auszudrücken, muss man die obige Zahl 1341, da jetzt 1 Kilogramm (statt 1 Pfund) Wasser um 1° erwärmt werden soll, mit 1.78568 multipliciren und (da 1 Kilogramm-Meter = $1.78568 \times 3.1635336 = 5.64906$ Fusspfund ist) durch 5.64906 dividiren, d. h. man darf diese Zahl 1341 bloß durch jene 3.1635336 dividiren; dadurch erhält man für dieses Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit $\frac{1341}{3.1635336} = 423.893$ Kilogramm-Meter.

Nach den Versuchen des englischen Physikers Joule beträgt dieses Aequivalent $423.55^k m$. Person findet hiefür den Werth $424^k m$, und man kann bis auf weiteres, wie es auch Zeuner thut, diese Zahl annehmen und den Rechnungen zum Grunde legen. Da sich dadurch die vorige Zahl 1341 nur wenig ändert (indem sie in 1341.34 übergeht), so kann diese für das Wiener Mass-System ebenfalls bis auf weiteres beibehalten werden.

307. Mit Beibehaltung der hier gebrauchten Bezeichnung ist die in Nr. 288, (ω) aufgestellte Relation:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \dots (n),$$

oder wenn man den Bruch in 2. Theile der Gleichung durch α dividirt und $\frac{1}{\alpha} = a$ setzt:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{a + t}{a + t_0} \quad \text{oder} \quad \frac{vp}{a + t} = \frac{v_0 p_0}{a + t_0} \dots (1),$$

es ist also der Bruch $\frac{vp}{a + t}$ für jedes Gas eine constante Grösse. Für die atmosphärische Luft z. B. ist

$$\frac{vp}{a + t} = \frac{v_0 p_0}{a + t_0} = \alpha v_0 p_0 = R$$

(obige Relat. (m)) also gleich der vorhin gefundenen Arbeit, die durch Erwärmung der atmosphärischen Luft um 1° erzeugt wird.

Es folgt daher auch aus (1):

$$vp = (a + t)R \dots (2),$$

eine (mit der vorigen (n) identische) Gleichung, welche für jedes permanente Gas die Beziehung zwischen Volumen v , Spannung p und Temperatur t gibt, und für welches sich jedesmal aus bekannten Versuchsergebnissen der entsprechende Werth für R ergibt.

Es ist ferner $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{.003665} = 272.85$, wofür man ohne Fehler 273 nehmen, also $a + t = 273 + t$ setzen kann.

Setzt man $a + t = T$, so bezeichnet T die Temperatur des Gases von einem Punkte aus gezählt, welcher um 273° tiefer als der Gefrierpunct des Wassers liegt; man nennt diesen Punct den absoluten Nullpunct und T die absolute Temperatur des Gases.

Mit Rücksicht auf die absolute Temperatur T erhält man auch für die Beziehung der Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze aus der vorigen Relat. (2) den einfachen Ausdruck:

$$\frac{pv}{T} = R = p_0 \alpha v_0 = \frac{c - c_1}{A} \dots (3),$$

und daraus auch:

$$c - c_1 = AR \dots (4),$$

d. h. das Product aus Druck und Volumen bleibt bei allen Veränderungen, welche man mit der Gasmasse vornimmt, der absoluten Temperatur proportional, oder der Quotient aus beiden ist eine constante Grösse.

Anmerkung. Hinsichtlich des absoluten Nullpunctes F wollen wir noch Folgendes bemerken.

Der gewöhnliche Nullpunct der Thermometer ist ein willkürlicher und hat nur für's Wasser eine bestimmte Bedeutung. Für Gase dagegen kommt man naturgemäss auf den absoluten Nullpunct durch folgende Betrachtung.

Denkt man sich ein permanentes Gas, welches den beiden Grundgesetzen (Mariotte und Gay-Lussac) vom kleinsten bis zum grössten Volumen folgt, so kann man $p dv$ als jene Arbeit ansehen, welche durch Ausdehnung des Gases, dessen Spannung p ist, von v auf $v + dv$ entsteht, so wie $p v$ als Arbeit, welche erzeugt wird, wenn das Gas unter constantem Druck vom Volumen 0 bis zu jenem v wächst, und wozu nach Obigem die Wärmemenge $A p v$ erforderlich ist, und zwar vollständig ohne Temperaturerhöhung. Nun ist aber nach der obigen Relation (n):

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

woraus sofort folgt, dass der Arbeit $p v = 0$ der Werth $1 + \alpha t = 0$ entspricht, aus welcher Gleichung aber $t = -\frac{1}{\alpha} = -a$ als diejenige Temperatur resultirt, wo dem idealen Gas alle Wärme fehlt, wo also der absolute Nullpunct anzunehmen ist.

Gesetze für die spezifische Wärme der Gase.

308. Erwärmt man eine Gewichtseinheit, z. B. 1 Pfund eines Gases von der Spannung p und dem Volumen v um dt , so nimmt dessen Volumen um dv und die Spannung um dp zu. Bestimmt man nun die Wärmemenge, welche diese Gasmasse dabei aufnimmt, so bedarf diese zuerst, ohne Aenderung des Volumens, die Wärmemenge $c_1 dt$ und dann noch weiters während der Ausdehnung um dv , wenn man diese einfach nach der dadurch bewirkten Arbeit bemisst (Nr. 306, β), die Wärmemenge:

$$A p dv = (c - c_1) T \frac{dv}{v}$$

(wegen (3) in Nr. 307), folglich ist die ganze Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit eines Gases zugeführt werden muss, damit dessen Temperatur um dt , Volumen um dv und Spannung um dp zunimmt, sofort:

$$dQ = c_1 dt + A p dv = c_1 dt + (c - c_1) T \frac{dv}{v} \dots (f)$$

oder wegen $c - c_1 = AR$ (Nr. 307, (4)) auch in anderer Form:

$$dQ = c_1 dt + AR T \frac{dv}{v} \dots (5).$$

Anmerkung 1. Das in 2. Theil dieser Gleichung vorkommende Glied $c_1 dt$ ist nichts anderes, als die Zunahme der innern Wärme des Gases. Bezeichnet man nämlich die in irgend einem Körper enthaltene Wärme überhaupt

durch u , wobei nach allen bisherigen Erfahrungen diese Wärme vom Volumen und dem Drucke des Körpers abhängt oder $u = \varphi(v, p)$ gesetzt werden kann, so nimmt die innere Wärme, wenn v um dv und p um dp wächst, um $du = \left(\frac{du}{dv}\right) dv + \left(\frac{du}{dp}\right) dp$ zu.

Dehnt sich aber der Körper durch äussere Zuführung von Wärme bei dem constanten Drucke p um dv aus, so verrichtet er die äussere Arbeit $p dv$, und diese erfordert nach Obigem die Wärmemenge $A p dv$. Da nun gleichzeitig auch die innere Wärme um du zunimmt oder vielmehr zunehmen muss, so muss man dem Körper die Wärmemenge:

$$dQ = du + A p dv \dots (b)$$

zuführen.

Die einem Körper von Aussen zugeführte Wärme theilt sich also in zwei Theile, und zwar bezeichnet davon du jenen Theil, welcher zur Erhöhung der innern Temperatur u dient, während $A p dv$ der Theil ist, welcher zu äusserer Arbeit verbraucht wird.

Aus der vorigen Relation (b) ergibt sich durch Integration, wenn für den Uebergang von v und p aus v_1 in v_2 und p_1 in p_2 auch u aus u_1 in u_2 übergeht, die ganze von Aussen zuzuführende Wärmemenge:

$$Q = u_2 - u_1 + A \int_{v_1}^{v_2} p dv = c_1 (t_2 - t_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p dv \dots (c)$$

Zur Bestimmung des in dieser Gleichung vorkommenden Integrales muss jedoch das Gesetz bekannt sein, nach welchem während der Wärmezuführung p von v abhängt.

Die Vergleichung der vorigen Relation (b) mit der obigen (5) zeigt, dass $du = c_1 dt$ ist, wo nämlich c_1 die spezifische Wärme bei constantem Volumen bezeichnet.

Hieraus kann man schliessen, dass für alle Veränderungen, die man mit einem Gase, sei es durch Ausdehnung, Comprimirung, Erwärmung oder Abkühlung vornehmen mag, die Zu- oder Abnahme der innern Wärme immer bestimmt ist, sobald nur die Temperaturen des Gases am Anfange und Ende der Operation gegeben sind. Sind nämlich t_1 und t_2 die Anfangs- und Endtemperaturen, so ergibt sich für die Veränderung der im Gase enthaltenen Wärme (durch Integration der vorigen Gleichung): $c_1 (t_2 - t_1)$.

Ferner kann man aus derselben Gleichung den Schluss ziehen, dass $u = c_1 (a + t) = c_1 T$ die ganze im Gase enthaltene Wärme, also die innere Wärme der Gewichtseinheit des Gases ist, weil man annehmen muss, dass im absoluten Nullpunct, d. i. bei der Temperatur $t = -a = -273^\circ$ die innere Wärme Null ist.

Anmerkung 2. Die obige Hauptgleichung (5), welche die von Aussen zuzuführende Wärme bestimmt, lässt sich durch einige einfache Transformationen auch noch in zwei verschiedenen, für den Gebrauch oft bequemeren Formen darstellen.

Da die Temperatur t des Gases von dessen Spannung und Volumen abhängt, oder $t = f(p, v)$ gesetzt werden kann, woraus

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv$$

oder wegen (Nr. 307, (2)) $a + t = \frac{pv}{R}$, also $\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{v}{R}$ und $\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{p}{R}$

auch $dt = \frac{v dp + p dv}{R}$ folgt, so wird, wenn man diesen Werth für dt in

der genannten Gleichung (5) substituirt und gehörig reducirt:

$$dQ = \frac{1}{R} (c_1 v dp + c p dv) \dots (d).$$

Ferner folgt aus der genannten Gleichung (5), wenn man im zweiten Theil derselben $c dt$ addirt und subtrahirt und wieder berücksichtigt, dass $pv = RT$ und $c - c_1 = AR$ ist (Nr. 307, (2), (4)), nach allen Reductionen:

$$dQ = c dt - ART \frac{dp}{p} \dots (e).$$

Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass der Gleichung (5), so wie jenen damit identischen Gleichungen (d) und (e) wesentlich die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass der auf das Gas von Aussen ausgeübte Druck in jedem Augenblick der Spannung des Gases gleich ist.

309. Aus den bisher entwickelten Gleichungen, besonders aus jener (5) der vorigen Nummer, ergeben sich nunmehr ganz einfach die folgenden, für die Anwendung wichtigen Fälle.

Erwärmung des Gases bei constantem Volumen.

310. Wird die Gewichtseinheit eines Gases vom Volumen v von t_1 auf t_2 erwärmt, so ist, da das Volumen constant bleibt, $dv = 0$, und die nöthige von Aussen zuzuführende Wärme nach Relat. (5) der vorigen Nr.:

$$Q = c_1 (t_2 - t_1) \dots (1).$$

Die Gleichung (b) (Nr. 308, Anmerk. 1) gibt für diesen Fall $dQ = du$, folglich, wenn die innere Wärme im Anfange u_1 und am Ende u_2 ist, sofort:

$$Q = u_2 - u_1 \dots (2),$$

d. h. die zugeführte Wärme wird hier blos zur Erhöhung der innern Wärme verwendet.

Anmerkung. Ist $t_2 < t_1$, so muss man natürlich statt Erwärmung Abkühlung verstehen.

Erwärmung des Gases bei constantem Druck.

311. Ist p die Spannung des Gases, v_1 dessen Volumen im Anfange und v_2 am Ende, entsprechend den Temperaturen t_1

und t_2 ; so ist, da p constant, sofort $dp = 0$ und daher nach Gleichung (e) (Nr. 308, Anmerk. 2) $dQ = c dt$, und daraus durch Integration:

$$Q = c(t_2 - t_1) \dots (3).$$

Die Gleichung (c) der Anmerk. 1 in Nr. 308 gibt, da man jetzt die Integration ausführen kann:

$$Q = u_2 - u_1 + Ap(v_2 - v_1)$$

oder auch (Gleichung (1) und (2) Nr. 310):

$$Q = c_1(t_2 - t_1) + Ap(v_2 - v_1) \dots (4).$$

Dabei bezeichnet das 1. Glied im 2. Theil der Gleichung die Zunahme der im Gas enthaltenen, und das 2. Glied die in Arbeit verwandelte Wärmemenge.

Durch Gleichsetzung von (3) und (4) erhält man ferner für die zur Arbeit verwendete Wärme:

$$Ap(v_2 - v_1) = (c - c_1)(t_2 - t_1).$$

Die Arbeit selbst ist $p(v_2 - v_1) = \frac{(c - c_1)}{A}(t_2 - t_1)$ oder (Nr. 307, Gleichung (4)):

$$p(v_2 - v_1) = R(t_2 - t_1) \dots (5).$$

Wie man sieht, genügt in diesem Falle zur Berechnung der vom Gase verrichteten Arbeit die Anfangs- und Endtemperatur, so dass weder die Spannung, noch das Anfangs- und Endvolumen desselben erforderlich ist.

Beispiel. Befindet sich z. B. in einem Cylinder 1 Pfund atmosphärische Luft von 100° Temperatur und wird diese bis auf 200° erhitzt, während dieselbe einen Kolben mit constantem Drucke fortschiebt, so erhält man dafür folgende Daten:

Die ganze zuzuführende Wärmemenge ist (Nr. 301):

$$Q = c(t_2 - t_1) = 2377 \times 100 = 2377 \text{ Calorien;}$$

davon nimmt das Gas in sich auf, die Menge (Nr. 302):

$$u_2 - u_1 = c_1(t_2 - t_1) = 1686 \times 100 = 1686 \text{ Calorien;}$$

die in Arbeit verwandelte Wärme ist:

$$Ap(v_2 - v_1) = (c - c_1)(t_2 - t_1) = 691 \times 100 = 691 \text{ Calorien;}$$

endlich ist die vom Gas verrichtete äussere Arbeit (Nr. 306):

$$p(v_2 - v_1) = R(t_2 - t_1) = 92.675 \times 100 = 9267.5 \text{ Fusspfund}$$

oder $21\frac{1}{2}$ Pferdekräfte.

Wärmezuführung bei constanter Temperatur.

312. Soll die Temperatur einer Gewichtseinheit eines Gases während seiner Volumsveränderung constant bleiben, so muss

man $dt = 0$ setzen, und man erhält für die zuzuführende Wärmemenge bei dessen Ausdehnung nach der vorigen Gleichung (5):

$$dQ = AR(a + t) \frac{dv}{v} \dots (6)$$

oder auch in der Form von Relation (f) (Nr. 308):

$$dQ = A p dv,$$

so, dass also, wie die Vergleichung dieser mit der Gleichung (b) (Nr. 308, Anmerk.) zeigt, $du = 0$ ist. Die im Gase enthaltene Wärme bleibt also unverändert, während die gesammte zugeführte Wärme in Arbeit umgewandelt wird, wenn die Ausdehnung des Gases bei constanter Temperatur Statt findet.

Wird die vorige Gleichung (6) innerhalb der Grenzen von v_1 und v_2 integrirt, so erhält man für die Wärme, welche dem Gase zugeführt werden muss, während sich dasselbe (bei constanter Temperatur) von v_1 bis v_2 ausdehnt:

$$Q = AR(a + t) \logn. \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \dots (7).$$

Sind p_1 und p_2 die den Volumina v_1, v_2 entsprechenden Spannungen des Gases, so ist (Nr. 307) $p_1 v_1 = p_2 v_2 = R(a + t)$, folglich diese letztere Gleichung (7) auch:

$$Q = A p_1 v_1 \logn. \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = A p_2 v_2 \logn. \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \dots (8).$$

Da aber diese ganze Wärme in Arbeit umgewandelt wurde, so ist auch, wenn man diese letztere durch W bezeichnet, $Q = AW$, mithin:

$$W = p_1 v_1 \logn. \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = p_2 v_2 \logn. \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \dots (9),$$

oder wegen $\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}$ (Nr. 307, (e)) auch:

$$W = p_1 v_1 \logn. \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = p_2 v_2 \logn. \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \dots (9').$$

Soll umgekehrt das Gas vom Volumen v_2 auf jenes v_1 bei constanter Temperatur zusammengedrückt werden, so drückt die vorige Gleichung (9) oder jene (9') die dafür nöthige Arbeit, so wie jene (8) die Wärmemenge aus, welche dem Gas während der Compression entzogen werden muss; dabei bleibt die innere Wärme unverändert.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, dass sowohl hier wie in allen übrigen Formeln unter v oder v , u. s. w. nicht blos das Volumen der Gewichtseinheit, sondern auch von jedem beliebigen Gasgewichte, z. B. statt von 1 sofort von n Pfund verstanden werden kann, wenn man dann auch gleichzeitig, da Q, R, W u. s. w. in nQ, nR, nW , u. s. f. übergehen, unter Q die diesem Gewichte zuzuführende Wärmemenge, unter R oder W die aus diesem Gewichte resultirende Arbeit u. s. w. versteht.

Verhalten des Gases, wenn es bei seiner Volumsveränderung einen äussern Druck zu überwinden hat, welcher in jedem Augenblick seiner Spannung gleich ist, und wenn dabei Wärme weder zu- noch abgeführt wird.

313. Befindet sich in einem für Wärme undurchdringlichen Cylinder, welcher mit einem Kolben versehen ist, eine Gewichtseinheit eines Gases, so verrichtet das Gas durch Fortschieben des Kolbens eine gewisse Arbeit; es sollen die dabei Statt findenden Erscheinungen und Gesetze untersucht werden.

Da weder Wärme zu- noch abgeführt werden soll, so ist Q also auch $dQ = 0$, folglich nach Gleichung (d) (Nr. 308, Anmerkung 2):

$$0 = v dp + \frac{c}{c_1} p dv,$$

oder wegen $\frac{c}{c_1} = \kappa$ (Nr. 302) auch:

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dv}{v} = 0$$

und daraus erhält man durch Integration, wenn v_1, p_1 Volumen und Spannung im Anfange, so wie v_2, p_2 am Ende sind:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\kappa \dots (10).$$

Diese Gleichung gibt also das Gesetz an, nach welchem sich Volumen und Spannung eines Gases ändern, wenn dasselbe ohne Wärmezuführung oder Wärmeabgabe ausgedehnt oder comprimirt wird. (Dieses Gesetz wurde zuerst von Poisson angegeben.)

Aus dieser letzten Gleichung folgt auch, wegen (Nr. 307, (2))

$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{a + t_2}{a + t_1}$ die Gleichung:

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1} \dots (11),$$

aus welcher sich die Temperaturveränderung ergibt, wenn die Volumsänderung gegeben ist.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen (10) und (11) erhält man noch:

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} \dots (12),$$

folglich durch Vergleichung dieser beiden letzten Relationen:

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{x-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} \dots (12').$$

Was endlich die Arbeit betrifft, welche das Gas während seiner Ausdehnung verrichtet oder zu seiner Comprimirung erfordert, so erhält man aus der Gleichung (c) in Nr. 308 (Anmerk.)

zuerst, da hier $Q = 0$ ist: $0 = c_1(t_2 - t_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p dv$ und da, wenn

man die vom Gase während seiner Ausdehnung von v_1 auf v_2 verrichtete Arbeit wieder mit W bezeichnet, sofort $W = \int_{v_1}^{v_2} p dv$ ist, so folgt aus der vorigen Gleichung:

$$W = \frac{c_1}{A} (t_1 - t_2) \dots (13)$$

und sonach ist die in Arbeit umgesetzte Wärme:

$$c_1(t_1 - t_2) = -c_1(t_2 - t_1),$$

welche Gleichung sofort anzeigt, dass ein Theil der im Gas enthaltenen Wärme verschwunden und eben in Arbeit umgewandelt wurde.

Anmerkung. Die vorige Gleichung (13) kann auch noch in anderer Form dargestellt werden. Zuerst kann man ihr die Form geben:

$$W = \frac{c_1(a + t_1)}{A} \left(1 - \frac{a + t_2}{a + t_1}\right),$$

oder wegen $v_1 p_1 = R(a + t_1)$ (Nr. 307, (2)) und mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (12'), wenn man zugleich auch (wegen $c - c_1 = AR$,

Nr. 307, (4)) statt $\frac{c_1}{AR}$ den Werth $\frac{c_1}{c - c_1} = \frac{1}{x - 1}$ setzt:

$$W = \frac{1}{x - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{x-1}\right] \dots (14)$$

und ferner: $W = \frac{1}{x - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right] \dots (15).$

Für die zur Comprimirung des Gases vom Volumen v_2 auf jenes v_1 nöthige Arbeit müssen im obigen Integrale die Grenzen umgekehrt werden, wodurch die Gleichung (13) in $W = \frac{c_1}{A} (t_2 - t_1)$ übergeht, folglich jene (15) die Form:

$$W = \frac{1}{\alpha - 1} p_2 v_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1 \right] \dots (15')$$

erhält.

Beispiel. Es befinde sich wieder 1 Pfund atmosphärische Luft in einem mit einem Kolben versehenen Cylinder; ihre Spannung betrage $p_1 = 2$ Atmosphären, und Temperatur $t_1 = 40^\circ$. Wenn sich nun diese Luft ohne Wärmezuführung bis zur Spannung von $p_2 = 1$ Atmosphäre ausdehnt und dabei der Gegendruck auf den Kolben in jedem Augenblick dem innern Luftdrucke gleich ist, so findet dabei folgendes Verhalten der Luft Statt.

Aus der Gleichung (12) in Nr. 313 erhält man für die Endtemperatur der Luft:

$$t_2 = (a + t_1) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - a = (273 + 40) \left(\frac{1}{2} \right)^{1.41} - 273 = -17.14,$$

d. i. $t_2 = -17^\circ$.

Die in Arbeit umgewandelte Wärme ist:

$$c_1(t_1 - t_2) = 0.1686(40 + 17) = 9.61 \text{ Calorien,}$$

folglich die vom Gase verrichtete Arbeit:

$$\frac{9.61}{4} = 1341 \times 9.61 = 12887 \text{ Fussfund} = 30 \text{ Pferdekräfte (nahe).}$$

Will man endlich auch noch das Ausdehnungs- oder Expansionsverhältniss kennen lernen, so hat man (Nr. 307, (1)):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1 a + t_2}{p_2 a + t_1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{256}{313} = 1.636.$$

Verhalten des Gases bei plötzlicher Aenderung des Druckes, wenn dabei Wärme weder zu- noch abgeführt wird.

314. Nehmen wir an, es befinde sich in einem mit einem Kolben versehenen Cylinder wieder 1 Pfund atmosphärische Luft, deren Volumen, Spannung und Temperatur beziehungsweise v_1 , p_1 , t_1 sein soll; auch sei in diesem Zustande der Kolben gerade so belastet, dass Gleichgewicht zwischen der Spannung p_1 und dem äussern Drucke Statt findet. Wird nun der äussere Druck auf den Kolben plötzlich von p_1 auf p_2 vermindert, in dieser Stärke aber constant erhalten, so dehnt sich das Gas aus und schiebt den Kolben so lange fort, bis die Spannung des Gases ebenfalls bis auf p_2 herabgekommen ist. Es ist nun die Frage, wie gross am Ende dieser Ausdehnung sowohl das Volumen v_2 als auch die

Temperatur t_2 sein wird, wenn dabei von Aussen weder Wärme zugeführt noch abgeleitet wird?

Zur Beantwortung dieser für die Anwendung, z. B. beim Ausströmen eines Gases in die freie Luft, wichtigen Frage, hat man zuerst aus der Gleichung $du = c_1 dt$ (Nr. 308, Anmerk.) für die Abnahme der innern, gänzlich zur äussern Arbeit verwendeten Wärme: $c_1(t_1 - t_2)$. Da aber p_2 constant sein soll, so lässt sich diese Arbeit auch durch $p_2(v_2 - v_1)$, folglich die zu dieser Arbeit verwendete Wärme durch $A p_2(v_2 - v_1)$ ausdrücken, und man hat daher:

$$c_1(t_1 - t_2) = A p_2(v_2 - v_1) \dots (g).$$

Nun ist aber (Nr. 307, (2)) $p_1 v_1 = R(a + t_1)$ und $p_2 v_2 = R(a + t_2)$, folglich, wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung substituirt, auch:

$$c_1(t_1 - t_2) = \frac{AR}{p_1} [p_1(a + t_2) - p_2(a + t_1)]$$

und wenn man aus dieser letztern Gleichung t_2 bestimmt und dabei die Gleichung $c - c_1 = AR$ (Nr. 306, (s)) berücksichtigt, so erhält man nach allen Reductionen:

$$t_2 = t_1 - \frac{AR}{c} \frac{(p_1 - p_2)}{p_1} (a + t_1) \dots (16),$$

wobei c die specifische Wärme bei constantem Drucke ist. Auch kann man, wegen $AR = c - c_1$ (Nr. 307, (4)) und $\frac{c}{c_1} = \kappa$ sofort $\frac{AR}{c} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}$ setzen.

Mit diesem Werth von t_2 erhält man nun für das Endvolumen (Nr. 307, (2)):

$$v_2 = \frac{R}{p_2} (a + t_2) \dots (17)$$

und das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} \frac{a + t_2}{a + t_1} \dots (18).$$

Endlich ist die vom Gase verrichtete äussere Arbeit:

$$W = \frac{c_1}{A} (t_1 - t_2) \dots (19),$$

oder, wenn man für $t_1 - t_2$ den aus der obigen Gleichung (16) folgenden Werth, und für das Verhältniss $\frac{c}{c_1}$ der beiden specifischen Wärmen (Nr. 302) $\kappa (= 1.41)$ setzt, auch:

$$W = \frac{R}{\kappa} \frac{p_1 - p_2}{p_1} (a + t_1) \dots (20)$$

und endlich mit Rücksicht auf die Gleichung $p_1 v_1 = R(a + t_1)$, noch einfacher:

$$W = \frac{v_1}{\kappa} (p_1 - p_2) \dots (21).$$

Anmerkung. Die hier gefundenen Ausdrücke, welche die gegebene Aufgabe vollständig auflösen, gelten offenbar auch für den Fall, in welchem der constante äussere Druck p_2 grösser als die anfängliche Spannung der Luft p_1 ist, also Comprimirung der Luft ohne Wärme Ab- oder Zuführung vorausgesetzt wird.

Beispiel. Nehmen wir wieder, wie im vorigen Beispiel, die anfängliche Spannung der Luft im Cylinder mit 2 Atmosphären, und die Temperatur mit 40° an; wenn nun der äussere Druck auf den Kolben plötzlich nur 1 Atmosphäre beträgt, so soll das Verhalten der Luft während ihrer Ausdehnung bis auf die Spannung von 1 Atmosphäre, wobei sie den constanten Druck von 1 Atmosphäre überwindet, und unter der Voraussetzung, dass von Aussen keine Wärme zugeführt oder abgeleitet wird, untersucht werden.

Aus der obigen Gleichung (16) erhält man zuerst für die Endtemperatur:

$$t_2 = 40 - \frac{41}{1.41} \frac{(2-1)}{2} (273 + 40) = 5.5^\circ.$$

Ferner gibt die Gleichung (18) das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{273 + 5.5}{273 + 40} = 1.78.$$

Die verrichtete Arbeit ist nach Gleichung (19):

$$W = 1341 \times 1686 (40 - 5.5) = 7800 \text{ Fusspfd.} = 18 \text{ Pferdekräfte.}$$

Vergleicht man diese Resultate mit jenen im vorigen Beispiele, so zeigt sich, dass im gegenwärtigen Falle die Temperaturveränderung viel geringer als im vorigen ist, in welchem der äussere Druck, welchen das Gas überwindet, in jedem Augenblick der Gasspannung gleich ist. Dafür ist aber auch die jetzt verrichtete Arbeit (im Verhältniss von 5:3) kleiner als im vorigen Falle.

Dieser Unterschied lässt sich einigermassen daraus erklären, dass man hier den Kolben stillschweigend als massenlos vorausgesetzt hat, welcher bei dem plötzlichen Nachlassen des äussern Druckes dem Gase so schnell ausweicht, dass es nicht mit der seinem jedesmaligen Volumen entsprechenden, sondern mit der geringeren Spannung von nur 1 Atmosphäre (gleich dem Gegendrucke) auf den Kolben drückt. Wäre dieser äussere Druck $p_2 = 0$, so wäre die vom Gase während der Ausdehnung verrichtete äussere Arbeit sogar Null (wegen $W = p_2(v_2 - v_1)$) und man erhält für diesen speciellen Fall aus der obigen Gleichung (g) in Nr. 314:

$$c_1(t_1 - t_2) = 0,$$

folglich $t_2 = t_1$, so, dass also die Temperatur des Gases constant bleibt.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn Gas aus einem Behälter in den luftleeren Raum ausströmt. Es muss jedoch ausdrücklich bemerkt werden, dass hier nur von dem Endzustand die Rede sein kann, indem man über die Zwischenzustände, in welchen sich das Gas beim Fortschieben des masselosen Kolbens bei dem constanten Gegendrucke p_2 befindet, nichts bestimmen kann. Es wäre daher auch der Schluss, dass comprimirtes, in einen leeren Raum überströmendes Gas (ein von Herrn Joule ausgeführtes Experiment) durchaus keine Arbeit verrichte, weil sich am Ende in beiden Gefässen gleiche Temperaturen zeigen, ein irriger, da sowohl Reibung als die Trägheit des Gases u. s. w. überwunden wird; nur äussere, wahrnehmbare Arbeit wird dabei keine verrichtet.