246. Dieser letztere Fall findet unter Anderm Anwendung auf den Stoss des Wassers gegen die krummen Schaufeln eines horizontalen Wasserrades oder einer Turbine. Bewegen sich diese dabei in der Richtung CM des eintretenden Strahles, so hat man (Nr. **239**) $V' = V - v$, oder, wenn sich die Schaufeln dem Strahle direct entgegen bewegen, $V' = V + v$. Es ergibt sich also für beide Fälle der Druck oder Stoss gegen die Schaufeln nach der vorigen Formel (7):

$$P = \frac{\gamma a}{g}(V \mp v) \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]} \ldots (9).$$

Für eine ruhende Fläche wäre $v = 0$, also

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]}.$$

247. Zerlegt man in jenen Fällen, in welchen die Stossfläche in der Richtung des eintretenden Strahles ausweicht oder sich dem Strahle direct entgegen bewegt, wobei also $V' = V \mp v$ ist und wegen $\beta = 0$ (Nr. **239**, Relat. e) die Richtungen FE und CC' zusammenfallen, den in der Richtung MP entstehenden Druck oder Stoss in zwei Seitenstösse, P_1 und P_2, wovon der erstere parallel mit dem eintretenden Strahl CM und der letztere darauf perpendikulär ist; so hat man wegen W. $EMP =$ W. $C'MP = \varphi$ (Fig. 136) sofort:

$$P_1 = P\,Cos\,\varphi \quad \text{und} \quad P_2 = P\,Sin\,\varphi,$$

oder wenn man für $P\,Cos\,\varphi$ und $P\,Sin\,\varphi$ die Werthe aus (f) (Nr. **245**) und zugleich $V' = V \mp v$ setzt, auch:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \\ P_2 &= \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v)\, Sin\,\delta \end{aligned}\right\} (10).$$

Man nennt hier P_1 den Parallelstoss und P_2 den Seitenstoss des Wasserstrahles.

Gerader Stoss eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche.

248. Es sei BMB' (Fig. 137) eine durch Umdrehung der Curve MB um die Achse MC erzeugte Fläche und V die absolute Geschwindigkeit des in der Richtung AMC eintretenden Wasserstrahles, zugleich bewege sich die Rotationsfläche in derselben

Richtung der Achse oder auch in direct entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit v, so, dass in diesen beiden Fällen die relative Geschwindigkeit des Strahles respective $V - v$ und $V + v$ ist. Setzt man ferner den Winkel der am Endpuncte B an die Erzeugungscurve gezogenen Tangente BT mit der Achse MC gleich δ und nimmt an, dass die Fläche vollkommen glatt sei, folglich keine Reibung beim Hingleiten des Wassers Statt finde; so trifft der Strahl die Oberfläche mit der relativen Geschwindigkeit $V \mp v$, breitet sich hierauf über dieselbe nach allen Seiten um die Achse gleichförmig aus und verlässt diese bei BB' in Richtungen, welche sämmtlich gegen die Achse MC die Neigung δ haben, mit derselben relativen Geschwindigkeit $u = V \mp v$.

Denkt man sich den Wasserstrahl in einzelne Wasserfäden aufgelöst, wovon jeder den Querschnitt a' haben soll, und nimmt an, dass sich diese gleichförmig um die Fläche nach den Richtungen MB und MB', d. i. nach den Durchschnittslinien legen, welche aus einer durch die Achse MC gelegten Ebene mit der Fläche entstehen, wenn sich diese Ebene um die Achse allmählich umdreht oder Positionen annimmt, für welche die aufeinander folgenden Neigungswinkel unendlich klein sind.

Bezeichnet man nun den Parallelstoss eines jeden solchen elementaren Strahles oder Wasserfadens durch p_1 und dessen Seitenstoss durch p_2; so folgt nach den vorigen Relationen (10):

$$p_1 = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \text{ und } p_2 = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\delta.$$

Da sich aber von den Seitenstössen p_2 je zwei, welche in ein und derselben von den um die Achse gedachten Ebenen liegen, da sie gleich und entgegengesetzt sind, aufheben, so bildet die Summe aus allen Parallelstössen p_1 die Resultirende, d. i. den Parallelstoss P_1 des ganzen Wasserstrahles, und es ist daher, wenn n solcher Wasserfäden vorhanden sind, wegen $n p_1 = P_1$ und $n a' = a$ sofort:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta), \quad (11)$$

während der Seitenstoss $P_2 = 0$ ist. (Vergl. Nr. **240**, Relat. (i)).

249. Ist die Stossfläche eine Ebene BB' (Fig. 138), gegen welche der Strahl AM perpendikulär anstösst und nach allen Seiten um einen rechten Winkel abgelenkt wird; so ist wegen $\delta = 90^0$ aus der vorigen Relation:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v), \quad (12)$$

und wenn die Tafel oder Fläche unbeweglich ist, $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2\gamma a h$. (Vergl. Nr. **244**.)

250. Ist endlich die obige Rotationsfläche gegen den Strahl zu concav und wird dieser bei seinem Austritte bei BB' parallel zur Achse, aber nach entgegengesetzter Richtung des einfallenden Strahles abgelenkt; so folgt wegen $\delta = 180^0$ aus der vorigen Relation (11):

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v), \quad (13)$$

und wenn die Fläche BMB' unbeweglich ist,

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V^2 = 4\gamma a \frac{V^2}{2g} = 4\gamma a h$$

also doppelt so gross als bei der Ebene.

Anmerkung 1. Aus diesem Grunde wird auch der Stoss gegen eine Ebene, deren Umfang, wie in Fig. 140, mit Leisten besetzt ist, grösser als wenn diese Ränder fehlen. Weisbach erwähnt eines Versuches, bei welchem der Strahl 1 Zoll Dicke und die cylinderische Einfassung der Stossebene 3 Zoll Durchmesser und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte; der Strahl trat beinahe gänzlich in der umgekehrten Richtung aus und gab eine Stosskraft von $3{\cdot}93\,\gamma a \frac{V^2}{2g}$. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass wegen der Reibung des Wassers an der Fläche der obige theoretische Maximalwerth von $4\gamma a \frac{V^2}{2g}$ niemals vollständig erreicht werden kann.

Anmerkung 2. Weicht die Fläche BMB' (Fig. 137) in der Richtung der Achse MC dem gerade anstossenden Strahle mit der Geschwindigkeit v aus, so ist die Arbeits- oder Wirkungsgrösse dieses Stosses (Relat. 11)

$$W = P_1 v = \frac{\gamma a}{g} Vv(V - v)(1 - Cos\,\delta),$$

folglich für ein Maximum:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{\gamma a}{g} V(1 - Cos\,\delta)(V - 2v) = 0$$

und daraus $v = \frac{1}{2}V$. (Vergleiche §. 386.)

Der mit diesem Werthe von v entstehende Maximalwerth der Wirkungsgrösse des Stosses ist daher, wenn man das Gewicht der per Secunde zum Stoss gelangenden Wassermenge $\gamma a V = M$ setzt:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g}(1 - Cos\,\delta).$$

Dieser Werth geht für eine ebene Stossfläche (Nr. **249**) wegen $\delta = 90^0$ über in:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} M h,$$

dagegen für die concave Fläche in Nr. **250** (Fig. 139), wegen $\delta = 180^0$ in

$$W = M\frac{V^2}{2g} = Mh$$

über, so, dass dieser Werth genau mit der theoretischen Wirkungsgrösse, oder, wie man sich ausdrückt, dynamischen Kraft übereinstimmt, welche in der von der Höhe h herabsinkenden Wassermasse M enthalten ist.

251. Zur Bestimmung des schiefen Stosses gegen eine ebene Fläche muss man unterscheiden, ob das Wasser nach dem Stoss nur nach einer, oder nach zwei direct entgegengesetzten, oder endlich nach allen Richtungen abfliessen kann.

Im erstern Falle gilt, wenn der isolirte Strahl, oder (§. 385) das begrenzte Wasser gegen die Ebene BB' (Fig. 141) unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit V anstösst und diese in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v ausweicht, die obige Formel (11) in Nr. **248**, oder es ist wegen $\delta = \alpha$:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V - v)(1 - Cos\,\alpha). \quad (14)$$

252. Trifft im zweiten Falle der Strahl AM (Fig. 142) die ebene Fläche BB' unter dem Winkel $AMB' = \alpha$ und ist diese Fläche nach der Richtung BB' mit Randleisten versehen, so theilt sich der Strahl in zwei Theile MB und MB', welche nach gerade entgegengesetzten Richtungen abfliessen.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Querschnitte a' und a'' dieser beiden Theile ungleich sein werden; auch wird der Stoss oder hydraulische Druck P', welchen der Theil AMB gegen die Fläche BB' ausübt, in einer auf derselben normalen Ebene liegen; dasselbe gilt von dem Drucke P'' des Theiles AMB', folglich wird auch die Resultirende aus P' und P'', d. i. der Gesammtdruck P in dieser normalen Ebene ABB' liegen und zugleich, da die Fläche BB' als absolut glatt gedacht wird, auf dieser Fläche normal sein müssen. Sind daher N', R' die Seitenkräfte von P', und N'', R'' jene von P'', und zwar respective normal und parallel zur Ebene BB'; so müssen, wenn die Resultante P aus P' und P'' auf der Ebene BB' normal sein soll, sofort die beiden Seitenkräfte R' und R'' einander gleich und direct entgegengesetzt, und dann $P = N' + N''$ sein.

Nun war aber (Nr. **247**) als man den Druck $Mc = P$ (Fig. 143 und Fig. 136) in zwei Seitenkräfte $Ma = P_1$ und $Mb = P_2$ darauf perpendikulär zerlegte (Relat. 10) $Ma = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta)$ und $Mb = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\delta$, folglich ist auch, wenn man denselben Druck $P = Mc$ in zwei Seitenkräfte Ma' und Mb' parallel und normal zur Ebene BB' zerlegt, wegen W. $BMc =$ W. aMc (Relat. 8) sofort $Ma' = Ma$ und $Mb' = Mb$.

Geht man also auf die beiden Theildrücke P' und P'' über, so hat man nach demselben Verfahren für den Theil AMB (Fig. 142) des Strahles, wofür $\delta = \alpha$ ist, sofort $R' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\alpha)$ und $N' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha$; ferner für den Theil AMB', wofür $\delta = 180^0 - \alpha$ ist: $R'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)(1 + Cos\,\alpha)$ und $N'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha$.

Setzt man daher der vorigen Bemerkung gemäss $R' = R''$ und $P = N' + N''$, so erhält man aus der erstern dieser beiden Gleichungen, wenn man für R' und R'' die eben gefundenen Werthe substituirt und noch berücksichtiget, dass $a' + a'' = a$ ist, sofort $a' = \frac{1}{2} a (1 + Cos\,\alpha)$ und $a'' = \frac{1}{2} a (1 - Cos\,\alpha)$.

Die zweite der genannten Gleichungen gibt jetzt mit diesen Werthen, welche man in N' und N'' zu substituiren hat:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha. \quad (15).$$

Um endlich noch aus diesem Normalstoss P gegen die Ebene BB' den Parallelstoss P_1 in der Richtung AM und den darauf perpendikulären Seitenstoss P_2 (Nr. **247**) zu bestimmen, hat man durch Zerlegung der Kraft P in diese zwei Seitenkräfte P_1 und P_2, wegen W. $PMP_2 = \alpha$ sofort:

$$P_1 = P\, Sin\,\alpha \text{ und } P_2 = P\, Cos\,\alpha,$$

oder wenn man für P seinen Werth setzt,

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Parallelstoss: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin^2\,\alpha \\ \text{und für den Seitenstoss: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha \end{array}\right\} (16)$$

253. Was endlich den dritten Fall anbelangt, in welchem der Strahl nach dem Stoss nach allen Seiten hin über die ebene Fläche abfliessen kann, so begnügt man sich hier, da eine mathematisch scharfe Theorie ohnehin nicht möglich ist, indem man dabei von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen kann, mit blossen Näherungswerthen.

Scheffler findet, indem er annimmt, dass sich der Strahl auf der ebenen Fläche in vier Theile theilt, welche sich rechtwinkelig schneiden und indem er auf ähnliche Weise, wie dies in der vorigen Nr. geschehen, die Querschnitte der vier abgelenkten Theile bestimmt, für den Normalstoss:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin\, \alpha, \quad (17)$$

und daraus wieder durch Zerlegung in zwei Seitenstösse, für

$$\left.\begin{array}{ll} \text{den Parallelstoss: } & P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin^2 \alpha \\ \text{und den Seitenstoss: } & P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin\, \alpha \, Cos\, \alpha \end{array}\right\} (18)$$

also dieselben Werthe, wie im vorigen Falle.

Anmerkung. Weisbach findet unter der Annahme einer allerdings willkürlichen Voraussetzung $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin\, \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$.

Duchemin dagegen setzt $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin^2 \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$ (gleich dem Parallelstoss nach Weisbach).

Navier erhält, obschon die Voraussetzung, dass alle abgelenkten Wasserfäden eine gleiche Stärke besitzen, nicht richtig ist, für den Normalstoss P den obigen Werth (17), dagegen für den Parallelstoss den unrichtigen Werth $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)$.

Schliesslich ist zu bemerken, dass die obigen theoretischen Resultate und Formeln über den Stoss isolirter Strahlen mit der Erfahrung nur dann übereinstimmen, wenn die Ausdehnung der Stossfläche wenigstens so gross ist, dass die Wasserfäden in parallelen Richtungen zu den letzten Elementen der gestossenen Fläche austreten können, ohne jedoch im Gegentheile wieder so gross zu sein, dass das Gewicht und die Adhäsion der auf der Fläche befindlichen Flüssigkeit einen hemmenden Einfluss äussern kann.

Nach den gemachten Erfahrungen muss, namentlich bei dem geraden Stoss, der Durchmesser der Stossfläche wenigstens 4 Mal so gross als jener des anstossenden Strahles sein. Nach den Versuchen von Langsdorf vermindert sich, wenn die Fläche nur eben so gross als der Querschnitt des Strahles ist, der Stoss gegen diese Fläche beiläufig um die Hälfte des durch die obige Formel (12) angegebenen Werthes.

Von den Wasserrädern.

(§. 387.)

254. Obschon wir dem Verdienste jener Autoren, welche, wie namentlich Herr Professor Fr. Redtenbacher, bemüht