

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass die Gerade FG die Grenze ist, über welche hinaus kein Punkt der Leitung liegen, ja dass man selbst nicht einmal so weit gehen darf, wenn der Ausfluss durch die Leitung möglich sein soll.

Theilt man die ganze Druckhöhe $ED = H$ in die beiden Höhen $EH = h_1$ und $HD = h_2$, wovon also die erstere dem Zuflussbehälter oder Reservoir und die letztere der Röhre zukommt, so ist, wenn die Röhre ohne alle Verengungen und Biegungen in die freie Luft ausmündet, nach Gleichung (3) in Nr. 225:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + n \frac{L}{D} \frac{v^2}{g},$$

oder wenn man für den Reibungswiderstand den Ausdruck (2) in Nr. 215

$$\text{wählt, auch: } h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D} (\alpha v + \beta v^2).$$

Damit nun das Wasser den Querschnitt der Röhre völlig ausfülle oder mit vollem Querschnitt ausfließe, muss das Reservoir eine hinlängliche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D} (\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dass man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 grösser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden lässt und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1 in §. 369 die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe $16\cdot73$ und die ganze Gefällshöhe $16\cdot83$ Fuss, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fuss, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fuss Geschwindigkeit aus der Leitung ausfließt. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$, also jene der Leitung $h_2 > 16\cdot73$ Fuss nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfließen.

Von dem Stosse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 377.)

238. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sei allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stossenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit, nach und mit welcher diese Fläche gleich-

förmig ausweicht oder sich fortbewegt; endlich BG die Richtung und u die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verlässt.

Um die Untersuchung zu vereinfachen und das Ganze auf ein System zurückzuführen, in welchem die Fläche AMB ruht, kann man sich, ohne dass dadurch an dem mechanischen Zustande des vorliegenden Systemes etwas geändert wird, vorstellen, dass allen Punkten desselben nach der gemeinschaftlichen Richtung MD' die gleichförmige Geschwindigkeit v , welche nämlich jener der Fläche AMB gleich und gerade entgegengesetzt ist, mitgetheilt werde; dadurch erhält man ohne Aenderung der Sache ein System, in welchem die Fläche AMB ruht, dagegen das ein- und austretende Wasser die sogenannte relative Geschwindigkeit gegen diese Fläche annimmt.

Schneidet man daher $MC' = MC = V$, ferner $MD' = MD = v$ ab und construirt das Parallelogramm $C'D'$, so stellt die Diagonale ME die Richtung und Grösse der relativen Geschwindigkeit des eintretenden Strahles vor, welche V' heissen soll.

Ebenso ist, wenn man $BG = u$, gleich der relativen Geschwindigkeit des austretenden Wassers, und auf der durch B mit MD parallelen Geraden $BH = v$, gleich der Geschwindigkeit der Stossfläche abschneidet und das Parallelogramm GH construirt, die Diagonale BJ sofort die absolute Geschwindigkeit des austretenden Wassers, die wir mit U bezeichnen wollen.

Es gibt in der That, wenn man nach der vorigen Bemerkung an dem Punkte B die der MD gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit $BK = v$ anbringt, diese letztere mit der absoluten Geschwindigkeit $BJ = U$ die gegen die Fläche AMB relative Geschwindigkeit $BG = u$.

239. Bezeichnet man den Winkel DMC' , welchen die positiven absoluten Geschwindigkeiten V und v miteinander bilden, durch α , jenen $C'ME$, welchen die positiven Geschwindigkeiten V und V' einschliessen, durch β , sowie jenen GBH , welchen die relative Geschwindigkeit u mit der absoluten v einschliesst, mit γ , so hat man zuerst aus dem Dreieck $MD'E$, ME oder

$$V' = V(V^2 + v^2 - 2Vv \cos \alpha) \dots (1)$$

und

$$\sin \beta = \frac{v}{V'} \sin \alpha \dots (2);$$

ferner aus dem Dreiecke BHJ , BJ oder

$$U = V(v^2 + u^2 + 2vu \cos \gamma) \dots (3).$$

Anmerkung. Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich leicht die, den in der Praxis am häufigsten vorkommenden speciellen Fällen entsprechenden Formeln.

Weicht nämlich die Fläche AMB in der Richtung CM des anstossenden Strahles aus, so ist $\alpha = 0$ und daher aus (1) und (2):

$$V' = V - v \text{ und } \beta = 0 \dots (e).$$

Bewegt sich dagegen die Fläche dem anstossenden Strahle gerade entgegen, so ist $\alpha = 180^\circ$ und daher:

$$V' = V + v \text{ und } \beta = 0 \dots (f).$$

Ist endlich diese Fläche AMB unbeweglich, so ist $v = 0$ und daher:

$$V' = V \text{ und } \beta = 0 \dots (g).$$

In Beziehung auf die Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit noch nach dem Stosse besitzt, sind für die Praxis besonders zwei Fälle herauszuheben, und zwar erstens der Fall, in welchem der anstossende Wasserstrahl seine ganze relative Geschwindigkeit gegen die Stossfläche verliert, und zweitens jener Fall, in welchem das Wasser nach dem Stosse ohne Hinderniss längs dieser Fläche hingeleitet und dieselbe mit einer relativen Geschwindigkeit verlässt, welche der relativen Eintrittsgeschwindigkeit gleich ist. Für den ersteren dieser beiden Fälle hat man $u = 0$ und daher aus Gleichung (3)

$$U = v,$$

und für den zweiten Fall:

$$u = V' = \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv \cos \alpha} \text{ und } U = \sqrt{V'^2 + v^2 + 2V'v \cos \gamma}.$$

Stösst in diesem letzteren Falle der Wasserstrahl normal gegen die Stossfläche (wie z. B. bei einer Rotationsfläche, wenn der Strahl gegen dieselbe in der Richtung der Rotationsachse anstösst), so ist auch noch $\alpha = 0$ und daher $V' = V - v$ und $U = \sqrt{(V - v)^2 + v^2 + 2(V - v)v \cos \gamma} \dots (h).$

Durch das oben angewendete Verfahren wird man sich in allen Fällen die Fläche AMB als ruhend vorstellen, während der Wasserstrahl mit der absoluten Geschwindigkeit $V' = EM$ eintritt und im ersteren dieser beiden genannten Fälle die ganze Geschwindigkeit verliert, so dass $u = 0$ wird, und im zweiten Falle mit derselben Geschwindigkeit $u = V'$ wieder austritt. Ruht diese Fläche AMB nicht, so bezeichnen V' und u die relativen Ein- und Austrittsgeschwindigkeiten, und man darf für V' nur den Werth aus Gleichung (1) setzen, um die Resultate als Functionen der absoluten Geschwindigkeiten V und v zu erhalten.

240. Um nun die Stosskraft oder Pressung P zu bestimmen, die ein continuirlicher Wasserstrahl, welcher im Augenblicke als er die Fläche trifft, seine Richtung und Geschwindigkeit plötzlich ändert, ausübt, wollen wir ein Wassertheilchen M (Fig. 134) von der Masse m betrachten, welches sich nach der Richtung AM mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt und während der sehr kleinen Zeit t von seiner Richtung MN in jene MN' abgelenkt und gezwungen wird, in dieser neuen Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 weiter zu gehen. Soll aber diese plötzliche Aenderung

in der Masse m durch die constante Kraft P bewirkt werden, deren Richtung mit AN den Winkel φ bildet, so bemerke man, dass wenn $W.NMN' = \delta$ ist und die nach MN' wirksame Geschwindigkeit v_2 in zwei aufeinander senkrechte Geschwindigkeiten nach MN und MO zerlegt wird, sofort die erstere $= v_2 \cos \delta$ und die letztere $= v_2 \sin \delta$ ist, folglich die Masse m während dieser Zeit t nach MN die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \cos \delta$ verliert und in der darauf perpendicularen Richtung MO jene $v_2 \sin \delta$ gewinnt; da man aber annehmen kann, dass dieser Verlust und Gewinn mit der sehr kleinen Zeit t gleichförmig zugenommen hat, so beträgt dieser bei der constanten Einwirkung der Kraft P während der Zeiteinheit beziehungsweise $\frac{v_1 - v_2 \cos \delta}{t}$ und $\frac{v_2 \sin \delta}{t}$. Zerlegt man nun auch die Kraft P in zwei Seitenkräfte nach NM und MO , so sind diese respective $P \cos \varphi$ und $P \sin \varphi$, wovon die erstere offenbar den eben genannten Verlust und die letztere den Gewinn an Geschwindigkeit während der Zeiteinheit hervorbringen muss. Da nun diese beiden Seitenkräfte ebenfalls constante Kräfte sind, so hat man nach §. 186 die Relationen:

$$P \cos \varphi = \frac{m}{gt} (v_1 - v_2 \cos \delta) \text{ und } P \sin \varphi = \frac{m}{gt} v_2 \sin \delta \dots (a),$$

dabei muss man für m diejenige Wassermenge substituiren, welche während der angenommenen Zeit t diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung erleidet; übrigens bezeichnet der Quotient $\frac{m}{t} = m'$ das Gewicht der in der Zeiteinheit anstossenden Wassermasse.

(Anmerkung. Mit Benützung des Principes der lebendigen Kräfte oder der Wirkungsgrössen, kann man die Stosskraft P auch auf folgende Weise ableiten.

Es sei m' die in der Zeiteinheit anstossende Wassermasse, diese dem Gewichte nach ausgedrückt, so erleidet diese, weil sie vor und nach dem Stosse beziehungsweise die Geschwindigkeiten V und U besitzt, die Geschwindigkeitsänderung $V - U$, wozu (§. 227) die Arbeit $\frac{m'}{2g} (V^2 - U^2)$ erforderlich ist, welche sofort der Arbeitsgrösse Pv gleich sein muss. Es ist daher, wenn man beide Ausdrücke einander gleich setzt und mit v dividirt, sofort:

$$P = \frac{m'}{2gv} (V^2 - U^2),$$

in welchem Ausdruck man für den allgemeinsten Fall für U den Werth aus der Relat. (3) der vorigen Nummer substituiren muss.

Für den besonderen Fall des normalen Stosses, welcher durch die vorige Relat. (*h*) ausgedrückt ist, erhält man, wenn für *U* der Werth aus der genannten Gleichung gesetzt wird, wegen

$$V^2 - U^2 = 2v(V-v)(1 - \cos \gamma) \text{ sofort } P = \frac{m'}{g}(V-v)(1 - \cos \gamma) \dots (i).$$

Findet der Stoss gegen eine ebene Tafel statt, so werden die Wasserfäden unter einen rechten Winkel abgelenkt, also ist auch $\gamma = 90^\circ$ und für

diesen Fall:
$$P = \frac{m'}{g}(V-v) \dots (k).$$

241. Wendet man die vorigen beiden Formeln (*a*) auf den vorliegenden Fall in Fig. 133 an und setzt den Winkel, welchen die positiven Richtungen der relativen Eintrittsgeschwindigkeit *V'* und des Druckes oder Stosses *P* (welcher auf der absolut glatten Fläche nur normal sein kann) gleich φ , so ist

$$P \cos \varphi = \frac{m}{gt}(V' - u \cos \delta) \text{ und } P \sin \varphi = \frac{m}{gt} u \sin \delta \dots (b).$$

242. Um endlich noch die Wassermasse *m* zu finden, welche in der sehr kleinen Zeit *t* zum Stoss gelangt, so lassen sich dabei zwei Fälle unterscheiden, nämlich erstens jener, in welchem die Stossfläche mit der Geschwindigkeit *v* in's Unbestimmte fortschreitet und sich von der Ausflussöffnung des Wasserstrahles immer mehr entfernt (oder umgekehrt auch nähert) und dann jener, in welchem die Fläche an derselben Stelle bleibt, oder wenn sie sich bewegt, augenblicklich, d. i. in den kleinen Zeitintervallen *t*, nachdem sie den Stoss empfangen hat, durch eine neue Fläche an derselben Stelle ersetzt wird (beiläufig so, wie diess mit den Schaufeln eines unterschlächtigen Rades der Fall ist). Da aber der erstere Fall fast gar keine practische Anwendung zulässt, so soll derselbe hier übergangen und sofort nur dieser letztere berücksichtigt werden.

Bezeichnet man nun den normalen Querschnitt des Wasserstrahles mit *a* und das Gewicht eines Kubikfuss Wassers mit γ , so ist offenbar in diesem letzteren Falle die dem Gewichte nach ausgedrückte Wassermasse $m = \gamma a V t$; mit diesem Werthe von *m* erhalten die beiden letzten Formeln (*b*) die Form:

$$P \cos \varphi = \frac{\gamma}{g} a V (V' - u \cos \delta), \quad P \sin \varphi = \frac{\gamma}{g} a V u \sin \delta \dots (4).$$

Anmerkung. Nimmt man, um in Kürze auf den erwähnten ersten Fall, in welchem die Stossfläche in's Unbestimmte ausweicht, zurückzukommen, diese Fläche als eine Ebene *DE* (Fig. 135) an, welche sich in der Richtung

MN mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, während der Wasserstrahl in der Richtung AM mit der Geschwindigkeit V ankömmt, setzt, wie oben, den $W. NMM' = \alpha$ dagegen jenen $AMD = \varepsilon$, nimmt ferner $MN = v$ und zieht durch N mit DE die Parallele $D'E'$, so stellt $D'E'$ die Lage der Stossfläche am Ende der Zeiteinheit, d. i. einer Secunde vor, wenn DE diese Lage im Anfange dieser Secunde bezeichnet. Da nun $MM' = \frac{\text{Sin}(\alpha + \varepsilon)}{\text{Sin} \varepsilon} v$

ist, so ist in dem obigen Ausdrücke von $m = \gamma a V t$ statt der absoluten Geschwindigkeit V die relative $V - MM'$ zu setzen, wodurch man für die in diesem Falle während der Zeit t zum Stosse gelangende Wassermasse den Ausdruck

$$m = \gamma a \left[V - \frac{\text{Sin}(\alpha + \varepsilon)}{\text{Sin} \varepsilon} v \right] t \text{ erhält.}$$

Bewegt sich die Fläche mit dem Strahle in derselben Richtung, so ist $\alpha = 0$ und daher $m = \gamma a(V - v)t$.

Bewegt sich diese Fläche dem Strahle direct entgegen, so ist $\alpha = 180^\circ$ und $m = \gamma a(V + v)t$.

Wäre die Fläche unbeweglich, also $v = 0$, so wäre $m = \gamma a V t$.

Stoss eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe durch den Stoss seine ganze relative Geschwindigkeit verliert.

243. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen (in Nr. **238** und Nr. **239**) und mit Beziehung auf Fig. 133 folgt aus den Gleichungen (4) der vorigen Nummer, da die relative Austrittsgeschwindigkeit $u = 0$ ist, sofort:

$$P \text{Cos} \varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' \text{ und } P \text{Sin} \varphi = 0,$$

folglich ist $\varphi = 0$ und

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \dots (5).$$

Die Fläche AMB erleidet also in der Richtung FM einen Stoss oder vielmehr continuirlichen Druck P , welcher durch diese letzte Gleichung bestimmt wird; setzt man in diese für V' den Werth aus (1) in Nr. **239**, so wird dieser Druck als Function der absoluten Geschwindigkeiten V und v des Strahles und der Fläche ausgedrückt. Die Richtung FM dieses Druckes ist durch die Gleichung (2) gegeben.

244. Dieser eben betrachtete Fall findet Anwendung bei dem Stosse eines Strahles auf die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades. Bewegen sich dabei die Schaufeln in