Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

(§. 366.)

215. Bezeichnet man den inneren oder lichten Durchmesser der gleich weiten Röhre mit D, den Umfang mit U, den Querschnitt mit A, die Länge derselben mit L, die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre mit v und den durch die Reibung des Wassers an den Röhrenwänden entstehenden Gefällsverlust, d. h. die Höhe der Wassersäule, deren Gewicht im Stande ist diesen Reibungswiderstand zu überwinden, mit z, so hat man nach §. 368, wenn α und β zwei Erfahrungs-Coefficienten sind, für Röhren von was immer für einer Querschnittsform:

$$z = \frac{UL}{A}(\alpha v + \beta v^2) \ldots (1)$$

und für cylinderische Röhren:

$$z = \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \ldots (2).$$

Legt man dabei den Meter als Einheit zum Grunde, so kann man für die Coefficienten α, β nach Prony die Werthe nehmen $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0003483 \ldots (a)$. Nimmt man dagegen den Wiener Fuss zur Einheit, so verwandeln sich diese Werthe in $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101 \ldots (m)$.

Nach den genauesten Versuchen von Du Buat, Bossut und Couplet hat d'Aubuisson folgende Werthe erhalten, und zwar wenn man den Meter zur Einheit nimmt:

$$\alpha = \cdot 0000188, \quad \beta = \cdot 0003425 \ldots (b),$$

und wenn man den Wiener Fuss zum Grunde legt:

$$\alpha = \cdot 0000188, \quad \beta = \cdot 0001083 \ldots (n).$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Geschwindigkeitsverminderung des Wassers beim Eintritte in die Röhrenleitung (m. s. Nr. **190**, Anmerk.), nach welcher die ganze Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2gn^2} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und $n = \cdot 8125$ gesetzt wurde, fand Eytelwein aus 51 Beobachtungen von Couplet, Bossut und Du Buat für das Metermass:

$$\alpha = \cdot 0000223579, \quad \beta = \cdot 000283174.$$

Weisbach dagegen fand unter derselben Voraussetzung mit Zugrundelegung von 49 Beobachtungen:

$$\alpha = \cdot 000057287, \quad \beta = \cdot 00023097.$$

Es ist daher, wenn man diese letzteren Werthe benützt und gleich 4mal nimmt, für Metermass ($g = 9{\cdot}808$ gesetzt):

$$h = {\cdot}0772\,v^2 + {\cdot}00022915\,\frac{L}{D}\,v + {\cdot}00092388\,\frac{L}{D}\,v^2 \ldots (3)$$

und auf den Wiener Fuss bezogen:

$$h = {\cdot}0244\,v^2 + {\cdot}00022915\,\frac{L}{D}\,v + {\cdot}00029204\,\frac{L}{D}\,v^2 \ldots (4).$$

Zur Bestimmung der Röhrendurchmesser D erhält man, wenn M die Wassermenge bezeichnet, welche per Secunde durch die Röhrenleitung fliessen soll, wegen $M = \frac{1}{4} D^2 \pi v$, woraus $v = \frac{4M}{\pi D^2} = 1{\cdot}27324\,\frac{M}{D^2}$ folgt, und wenn man diesen Werth für v in den beiden vorigen Gleichungen substituirt und gehörig ordnet und reducirt, für Metermass:

$$D^5 - {\cdot}00029176\,\frac{LM}{h}\,D^2 - {\cdot}12515\,\frac{M^2}{h}\,D - {\cdot}0014977\,\frac{LM^2}{h} = 0 \ldots (5),$$

für den Wiener Fuss:

$$D^5 - {\cdot}00029176\,\frac{LM}{h}\,D^2 - {\cdot}039561\,\frac{M^2}{h}\,D - {\cdot}00047344\,\frac{LM^2}{h} = 0 \ldots (6).$$

216. Anstatt dass in den vorigen Formeln nach der gewöhnlichen Methode nebst der 2ten auch noch die 1ste Potenz der Geschwindigkeit eingeführt ist, findet Weisbach, welcher die früheren Versuche von Prony, Eytelwein, Couplet, Bossut und Du Buat, sowie seine eigenen 11 Versuche (nebst einem von Gueymond in Grenoble), nämlich 63 an der Zahl, zum Grunde legt, dass man der Wahrheit näher komme, wenn man statt der 1sten die $\frac{3}{2}$te Potenz der Geschwindigkeit in die Formel aufnimmt. Er findet nämlich nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn man diese Widerstandshöhe durch

$$z = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \ldots (7)$$

ausdrückt und den Meter zur Einheit nimmt, sofort:

$\alpha = {\cdot}01439$ und $\beta = {\cdot}0094711$, wobei $g = 9{\cdot}808$ ist.

Legt man den Wiener Fuss zum Grunde, so hat man:

$\alpha = {\cdot}01439$ und $\beta = {\cdot}01685$ zu setzen, wobei $g = 31$ ist.

Hagen, welcher ausser den bereits erwähnten Versuchen auch noch jene benützte, welche von Provis in England angestellt und im Jahre 1838 veröffentlicht wurden, glaubt statt der 1sten Potenz von v, wie diess schon vor ihm Woltmann gethan, die $\frac{7}{4}$te benützen zu sollen und stellt als annähernden Ausdruck die Gleichung: $h = {}^{\cdot}024\, v^2 + {}^{\cdot}003 \frac{l}{\varrho} v^{\frac{1}{4}}$

auf, in welcher ϱ den Röhrenhalbmesser, und zwar in Zollen bezeichnet, während die übrigen Grössen h, l, v in rheinländischen Fussen zu nehmen sind.

Für die meisten Fälle ebenfalls hinreichend, hält Hagen die noch einfachere Formel:

$$h = {}^{\cdot}005 \frac{l}{\varrho} v^{\frac{7}{4}}.$$

Die von Darcy in der neuesten Zeit in Dijon mit Röhren aus Eisen, Blei und Glas von ·01 bis ·05 Meter Durchmesser und bei Geschwindigkeiten von ·03 bis ·05 Meter per Sec. durchgeführten Versuche, zeigten deutlich den Einfluss, welchen sowohl das verschiedene Materiale, als namentlich die Beschaffenheit der Röhren (ob diese von innen glatt und rein, oder mit Niederschlägen belegt) auf die durchfliessende Wassermenge ausübe und er stellt in dieser Beziehung die Formel auf:

$$\varrho \frac{h}{l} = A v^2,$$

wobei der Zahlenwerth von A vom Halbmesser der Röhre ϱ abhängig gemacht und $A = {}^{\cdot}000507 + \frac{{}^{\cdot}00000647}{\varrho}$ gesetzt wird.

So wäre z. B. für $\varrho = {}^{\cdot}5^{m.}$ sofort $A = {}^{\cdot}000519$, für $\varrho = {}^{\cdot}1^{m.}$ dagegen $A = {}^{\cdot}000571$ u. s. w.

Auch bemerkt Darcy noch, dass wenn V die Geschwindigkeit des Wassers in der Achse der Röhre, und w jene am Umfange oder der Wandfläche derselben ist, sofort als mittlere Geschwindigkeit jene: $v = \frac{3V + 4w}{7}$

in Rechnung gebracht werden könne.

Dupuit endlich empfiehlt für die gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fälle zur Bestimmung des Röhrendurchmessers die sehr bequeme, auf Metermass sich beziehende Formel:

$$D = {}^{\cdot}3018 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{h}} \ldots (8),$$

welche, auf den Wiener Fuss bezogen, in

$$D = 2397 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{h}} \ldots (9)$$

übergeht, und in welcher wieder M die Wassermenge bezeichnet, welche die Röhrenleitung per Secunde liefern soll.

Anmerkung. Da mit Ausnahme der Couplet'schen alle übrigen bei Bildung der obigen Formeln benützten und zu Grunde gelegten Versuche mit Röhren vorgenommen wurden, die innen rein und glatt waren, so darf es nicht auffallen, wenn alle diese Formeln, sobald sie auf Röhren angewendet werden, die schon längere Zeit in Verwendung stehen, den Röhrenwiderstand zu gering angeben.

So zeigt Darcy, dass die Widerstands-Coefficienten für die in Dijon bereits gebrauchten Wasserleitungsröhren im Mittel doppelt so gross genommen werden müssen, als diese in den gewöhnlichen Formeln für neue und noch glatte Röhren angegeben werden. Soll daher in einer Leitung, bei welcher die Röhrenwände bereits mit Oxyd oder einem Niederschlage belegt sind, die Geschwindigkeit berechnet werden, mit welcher das Wasser wirklich durchfliesst, so räth er an, von der wirklich vorhandenen Gefällshöhe nur die Hälfte als solche in die Formeln einzuführen; also auch umgekehrt die aus den Formeln für eine gegebene Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus der Leitung ausfliessen soll, berechnete Gefällshöhe, in der Wirklichkeit doppelt so gross zu nehmen.

D'Aubisson und Hagen rathen gleichfalls, um sicher zu gehen, die Wassermenge, welche eine Leitung liefern soll, lieber um die Hälfte grösser in Rechnung zu bringen.

Dupuit endlich scheint in seiner oben angegebenen Formel (8) diesen Umstand schon mit berücksichtiget zu haben.

Beispiel. Welchen lichten Durchmesser muss man der Hauptröhre einer Wasserleitung geben, wenn diese bei einer Länge von 765 Klafter und einer Druckhöhe von 3 Klafter per Minute 75 Kubikfuss Wasser liefern soll?

Setzt man in der obigen Gleichung (6) $L = 4590$, $h = 18$ und $M = 1{\cdot}25$, so folgt, wenn man, was hier ohne Anstand geschehen kann, statt des genauen Coefficienten ·092999, welcher sich dabei ergibt, den kürzeren ·093 setzt, sofort: $D^5 = {\cdot}093 D^2 + {\cdot}003434 D + {\cdot}18864 \ldots (\alpha)$,
aus welcher Gleichung nunmehr D zu berechnen ist.

Lässt man zur Bestimmung eines ersten Näherungswerthes im zweiten Theil dieser Gleichung die beiden ersten Glieder aus und setzt $D^5 = {\cdot}18864$, so folgt als 1ster Näherungswerth: $D = {\cdot}71635$.

Setzt man jetzt diesen Werth für D in den 2ten Theil der ursprünglichen Gleichung (α), so erhält man nach gehöriger Reduction $D^5 = {\cdot}23882$ und daraus als 2ten Näherungswerth: $D = {\cdot}75095$.

Wird ferner abermals dieser letztere Werth im zweiten Theil der genannten Gleichung (α) substituirt, so folgt $D^5 = {\cdot}24366$ und daraus als 3ter Näherungswerth: $D = {\cdot}75397$.

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet man $D^5 = {\cdot}244098$, oder als 4ten Näherungswerth: $D = {\cdot}75426$,
wobei man offenbar stehen bleiben und sich mit dem Werthe von $D = {\cdot}76$ begnügen kann.

Nach der Dupuit'schen Formel (8) erhält man, was im Voraus zu vermuthen war, einen etwas grösseren Werth, und zwar findet man $D = {\cdot}79385$.

Es dürfte daher mit Rücksicht auf die vorigen Bemerkungen gerathen erscheinen, bei der wirklichen Anlage dieser Leitung den lichten Röhrendurchmesser nicht unter ·80 Fuss zu nehmen.

217. Um den durch plötzliche Verengungen oder Erweiterungen des Röhrenquerschnittes herbeigeführten Verlust an Gefällshöhe zu bestimmen, wollen wir zuerst annehmen, dass sich die normale Querschnittsfläche A der Röhre (Fig. 114) plötzlich erweitere und in A' übergehe. Ist daher v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt A und v' jene in der Erweiterung A', so muss die grössere Geschwindigkeit v plötzlich auf die kleinere v' gebracht werden. Jedes Wassertheilchen m stösst also gegen die unendlich grössere Wassermasse m' und verliert wie bei dem Stosse unelastischer Körper (§. 243) an lebendiger Kraft $\frac{mm'(v-v')^2}{m+m'}$, oder da m gegen m' verschwindet, $\frac{mm'}{m'}(v-v')^2 = m(v-v')^2$, folglich ist der Verlust an Wirkungsgrösse $= \frac{m(v-v')^2}{2g}$ (wenn nämlich m dem Gewichte nach ausgedrückt wird), oder an Gefällshöhe $z' = \frac{(v-v')^2}{2g} = \left(1 - \frac{v'}{v}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$.

Da sich nun die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte verhalten müssen, um in derselben Zeit gleiche Wassermengen durchzuführen (was die Continuität der Flüssigkeit erfordert), so ist $v' = \frac{A}{A'} v$ und daher der Gefällsverlust oder die Widerstandshöhe:

$$z' = \left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g} = \varepsilon \frac{v^2}{2g},$$

wenn man nämlich den Coefficienten $\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2$ nach Weisbach Widerstands-Coefficient genannt, durch ε bezeichnet.

Anmerkung. Der hier betrachtete Verlust kann durch Abrunden der Kanten und allmähliches Uebergehen von einer Röhre in die andere, wie in Fig. 114', bedeutend vermindert und selbst ganz aufgehoben werden.

218. Ein ähnlicher Verlust an Gefällshöhe entsteht auch dann, wenn das Wasser aus einem Gefässe oder Behälter, wie in Fig. 115, in eine Röhre tritt. Ist dieser Eintritt noch durch eine dünne Wand, d. i. ein Diaphragma, oder auch, wie es oft der Fall, durch ein Sieb oder Gitter verengt, so sei wieder A der Querschnitt der Röhre und f jener der Oeffnung des Diaphragma oder die Summe der Oeffnungen des Siebes, sowie α der entsprechende Contractions-Coefficient beim Durchgange des Wassers durch diese Oeffnungen. Da nun αf der Querschnitt der grössten Zusammenziehung, also (wenn wieder v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre) $\frac{A}{\alpha f}v$ die in diesem Querschnitt stattfindende Geschwindigkeit ist, welche plötzlich in die kleinere v übergeht, so hat man wie vorhin dadurch die Widerstandshöhe:

$$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \cdots (\alpha).$$

Fällt das Diaphragma weg, so ist wegen $f = A$ in diesem Falle:

$$z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \cdots (\beta).$$

Anmerkung. Derselbe Verlust an Geschwindigkeitshöhe tritt bei jedem an einer Ausflussöffnung angebrachten Ansatzröhre ein.

Setzt man in der vorigen Formel (β) den Contractions-Coefficienten $\alpha = \cdot 64$, so erhält man in dem erwähnten Falle den Widerstands-Coefficienten

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{\cdot 64} - 1\right)^2 = \cdot 316.$$

Nach den Versuchen von Weisbach ist der gesammte Widerstands-Coefficient für den Ausfluss des Wassers durch ein kurzes Ansatzrohr $\varepsilon = \cdot 505$. Ferner kann man mit Rücksicht auf ein Diaphragma nach denselben Versuchen für $\frac{f}{A} = \cdot 1, \cdot 2, \cdot 3, \cdot 4, \cdot 5, \cdot 6, \cdot 7, \cdot 8, \cdot 9, 1$ den Contractions-Coeffizient $\alpha = \cdot 616, \cdot 614, \cdot 612, \cdot 610, \cdot 607, \cdot 605, \cdot 603, \cdot 601, \cdot 598, \cdot 596$ setzen. So wäre z. B. für $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$ oder $f = \frac{1}{2}A$, nach der vorigen Formel der durch diese Verengung und plötzliche Erweiterung entstehende Verlust an Gefällshöhe: $z' = \left(\frac{2}{\cdot 607} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 5\cdot 266 \frac{v^2}{2g}$, also $5\frac{1}{4}$ Mal grösser als die der Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe. Für $\frac{f}{A} = \frac{1}{10}$ wäre sogar $z' = 232 \frac{v^2}{2g}$.

219. Tritt das Wasser anstatt aus einem weiten Behälter nur aus einer etwas weiteren Röhre in die engere ein (Fig. 116), so bleibt die Erscheinung, also wenn man die vorige Bezeichnung beibehält, auch die Formel (α) oder jene (β), d. i. jene für den Fall eines Diaphragma, $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ und ohne dasselbe $z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ dieselbe, nur dass dabei, wegen der jetzt eintretenden unvollständigen Contraction, der Coefficient α, welcher von dem Verhältniss $\frac{f}{F}$ der verengten Oeffnung f und des Querschnittes des weiteren Zuleitungsrohres F abhängt, grösser ausfällt.

Nach Weisbach's Versuchen ist für $\frac{f}{F} = \cdot 1, \cdot 2, \cdot 3, \cdot 4, \cdot 5, \cdot 6, \cdot 7, \cdot 8, \cdot 9, 1$ beziehungsweise $\alpha = \cdot 624, \cdot 632, \cdot 643, \cdot 659, \cdot 681, \cdot 712, \cdot 755, \cdot 813, \cdot 892, 1\cdot 000$.

Wäre z. B. das Zuleitungsrohr 4, die Oeffnung des Diaphragma 2 und das Ausflussrohr 3 Zoll weit und sollte, wenn diese Röhren nur ganz kurz sind, die Druckhöhe h' gefunden werden, für welche per Minute 20 Kubikfuss Wasser durch diesen Apparat fliessen; so wäre $\frac{f}{F} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, folglich, wenn man die vorige Reihe interpolirt, der betreffende Contractions-Coefficient $\alpha = \cdot 637$. Ferner ist $\frac{A}{f} = \frac{9}{4}$, daher

$$\frac{A}{\alpha f} - 1 = \frac{9}{4 \times \cdot 637} - 1 = 2\cdot 532.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit v findet sich aus der Gleichung $\frac{1}{4}(\frac{1}{4})^2 \pi v = \frac{20}{60}$, und zwar ist $v = \frac{2 \times 64}{6\pi} = 6\cdot 792$ Fuss, folglich die Widerstandshöhe z', d. i. diejenige Wassersäulenhöhe, welche durch die verengte Oeffnung absorbirt wird: $z' = (2\cdot 532)^2 \frac{(6\cdot 792)^2}{62} = 4\cdot 77$

und daher die gesuchte Druckhöhe $h = z' + \frac{v^2}{2g}$, d. i.

$$h = 4\cdot 77 + \frac{(6\cdot 792)^2}{62} = 5\cdot 514 \text{ Fuss.}$$

Ohne diese Verengung wäre $h = \cdot 744$ Fuss.

220. Befindet sich das Diaphragma, wie in Fig. 117, in der gleichweiten Röhre und ist wieder A der Querschnitt der Röhre, f jener der Durchgangsöffnung und α der entsprechende Contractions-Coefficient, so ist wie vorhin die Widerstandshöhe

$$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Was dabei den Coefficienten α betrifft, so hat er dieselben in der vorigen Nummer angegebenen Werthe, nur muss man statt dem Quotienten $\frac{f}{F}$ jenen $\frac{f}{A}$ setzen. Wäre z. B. dieser Quotient $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$, so würde man $\alpha = \cdot 681$ setzen und damit die Widerstandshöhe oder den Gefällsverlust $z' = 3\cdot 751 \frac{v^2}{2g}$ also $3\frac{3}{4}$ Mal so gross als die Geschwindigkeitshöhe von v erhalten.

Dieser Verlust lässt sich bedeutend vermindern, wenn nicht ganz beseitigen, wenn man durch Abrunden der Kanten die Contraction vermindert, oder durch Einsetzung eines sich allmählich nach beiden Seiten erweiternden Rohres (Fig. 118) gänzlich aufhebt.

221. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie in Fig. 119 dargestellt ist, wobei das Wasser aus dem grösseren Querschnitt A in den engeren A' plötzlich, und von da wieder ebenso in den weiteren Querschnitt A'' übertritt, hat man, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre A, und α den Contractions-Coefficient für den Uebergang aus A in A' bezeichnet, also die Geschwindigkeiten in A' und $A'' = v'$ und v'', die Werthe haben $v' = \frac{A}{A'} v$ und $v'' = \frac{A'}{A''} v'$, genau wieder wie in Nr. **219** für den Verlust an Gefällshöhe beim Uebergang von A in A':

$$z_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g}$$

und für jenen beim Uebergang von A' in A'' wie in Nr. **217**:

$$z_2 = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g},$$

folglich ist der Gesammtverlust für diese Verbindung $z' = z_1 + z_2$, d. i.

$$z' = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung. Diese Formel zeigt, dass z' jeden auch noch so grossen Werth durch Verkleinerung des verengten Querschnittes A' annehmen kann, indem sich dadurch der Quotient $\frac{A}{A'}$ immer mehr der Grenze ∞ nähert.

222. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie Fig. 120 zeigt, wobei das Wasser aus dem normalen Querschnitt A in den erweiterten A' und von da wieder in den normalen A oder überhaupt nur in einen engeren A'' übertritt, hat man ebenso, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte A, und α den Contractions-Coefficienten für den Uebertritt des Wassers von A' in A'' bezeichnet, für den Verlust an Gefällshöhe:

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{A^2}{A'^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Im Falle $A'' = A$ ist, wird

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung 1. Wie man aus der letzten Formel sieht, so kann durch die Erweiterung A' die Widerstandshöhe z' keineswegs, wie bei der vorigen Verengung, ohne Ende zunehmen, sondern diese ist (weil für $A' = \infty$ der Quotient $\frac{A}{A'} = 0$ wird) an die Grenze $\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$ gebunden.

Anmerkung 2. Was endlich die durch Verengungen mittelst Hähnen, Klappen und Ventilen herbeigeführten Verluste an der Gefällshöhe betrifft, die oft sehr bedeutend werden können, so hat Weisbach auch hierüber zahlreiche Versuche durchgeführt und die Resultate zur Bestimmung der betreffenden Widerstands-Coefficienten tabellarisch zusammengestellt.

a) Ist z. B. $abcd$ (Fig. 121) ein gegen die Achse der Röhre perpendikulärer Schieber oder Schubventil, mittelst welchem der Querschnitt der Röhre $AD = A$ bis auf die Durchflussöffnung $Ab = A'$ verengt wird, so hat man, den Verlust an Gefällshöhe $z_1 = n_1 \frac{v^2}{2g}$ gesetzt, für den Widerstands-Coefficienten n_1 nach Weisbach,

für parallelopipedische Röhren (Fig. 121):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	·9,	·8,	·7,	·6,	·5,	·4,	·3,	·2,	·1	ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·09,	0·39,	0·95,	2·08,	4·02,	8·12,	17·8,	44·5,	193,	

für cylinderische Röhren (Fig. 122):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	$\frac{7}{8}$,	$\frac{6}{8}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{4}{8}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{2}{8}$,	$\frac{1}{8}$	ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·07,	0·26,	0·81,	2·06,	5·52,	17·0,	97·8.	

b) Bei Drehklappen oder Drosselventilen theilt sich das Wasser beim Durchgang durch die Röhre AE (Fig. 123) in zwei Theile und geht durch die verengten Oeffnungen Aa und Bb, deren Querschnitt in Summa $= A'$, sowie der Querschnitt der Röhre $= A$ sein soll. Ist der Dreh- oder Stellwinkel $DCF = \alpha$, und der Durchmesser ab der Klappe gleich dem Durchmesser der Röhre, so ist nach Weisbach der Widerstands-Coefficient n_1,

für parallelopipedische Röhren:

für $\alpha =$	5°,	10°,	15°,	20°,	25°,	30°,	35°,	40°,	45°,	50°,
und $\frac{A'}{A} =$	·913,	·826,	·741,	·658,	·577,	·500,	·426,	·357,	·293,	·234,
sofort $n_1 =$	·28,	·45,	·77,	1·34,	2·16,	3·54,	5·72,	9·27,	15·07,	24·9,
$\alpha =$	55°,	60°,	65°,	70°,	90°					
$A' : A =$	·181,	·134,	·094,	·060,	0					
$n_1 =$	42·7,	77·4,	158,	368	∞					

für cylinderische Röhren:

für dieselben Werthe von α und $\frac{A'}{A}$:

$n_1 =$ ·24, ·52, ·90, 1·54, 2·51, 3·91, 6·22, 10·8, 18·7, 32·6, 58·8, 118, 256, 751, ∞.

c) Tritt das Wasser durch ein Kegelventil cd (Fig. 124) und ist wieder A die Querschnittsfläche der Röhre AB, v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, der Querschnitt der Oeffnung ab des Ventilsitzes $= f$, sowie jener der ringförmigen Oeffnung $AcBd = f'$, so kann man für die eigentliche verengte Oeffnung das arithmetische Mittel nehmen und $A' = \frac{1}{2}(f + f')$ setzen. Ist endlich wieder α der entsprechende Contractions-Coefficient, so hat man nach Nr. **219** den Widerstands-Coefficienten

$$n_1 = \left(\frac{A}{\alpha A'} - 1\right)^2.$$

Dabei fand Weisbach nach einem Versuche, wobei $\frac{A'}{A} = ·381$ war, $\alpha = ·608$.

d) Bei einem Klappenventil CD (Fig. 125) fand Weisbach bei einem Verhältniss der Oeffnung $ab = A'$ im Ventilsitz zum Querschnitt der Röhre A, d. i. bei $\frac{A'}{A} = \cdot 535$ bei verschiedenen Stellwinkeln α folgende Werthe für den Widerstands-Coefficienten n_1, und zwar

für $\alpha = 15^0, 20^0, 25^0, 30^0, 35^0, 40^0, 45^0, 50^0, 55^0, 60^0, 65^0, 70^0$
sofort $n_1 = 90, 62, 42, 30, 20, 14, 9\cdot5, 6\cdot6, 4\cdot6, 3\cdot2, 2\cdot3, 1\cdot7.$

e) Bei Hähnen tritt das Wasser (Fig. 126) aus dem Querschnitt A der Röhre durch die verengte Oeffnung $ab = A'$, in die eben so weite Bohrung A und von da wieder durch die verengte Oeffnung $cd = A'$ in den ursprünglichen Querschnitt A über. Bei den von Weisbach angestellten Versuchen war das Verhältniss von $\frac{A'}{A}$ derart, dass bei den parallelopipedischen Röhren dieselben bei einem Stellwinkel $\alpha = 66\frac{3}{4}{}^0$ und bei den cylinderischen Röhren bei $\alpha = 82\frac{1}{8}{}^0$ vollkommen geschlossen waren. Diess vorausgesetzt, fand er den Widerstands-Coefficienten n_1,

bei parallelopipedischen Röhren:

für	$\alpha =$	5^0,	10^0,	15^0,	20^0,	25^0,	30^0,	35^0,	40^0,	45^0,	50^0,	55^0, $66\frac{3}{4}{}^0$
und	$\frac{A'}{A} =$	·926,	·849,	·769,	·687,	·604,	·520,	·436,	·352,	·269,	·188,	·110, 0
sofort	$n_1 =$	·05,	·31,	·88,	1.84,	3.45,	6·15,	11.2,	20·7,	41·0,	95·3,	275, ∞

bei cylinderischen Röhren:

für	$\alpha =$	5^0,	10^0,	15^0,	20^0,	25^0,	30^0,	35^0,	40^0,	45^0,	50^0,
und	$\frac{A'}{A} =$	·926,	·850,	·772,	·692,	·613,	·535,	·458,	·385,	·315,	·250,
sofort	$n_1 =$	·05,	·29,	·75,	1·56,	3·10,	5·47,	9·68,	17·3,	31·2,	52·6,
	$\alpha =$	55^0,	60^0,	65^0,	$82\frac{1}{8}{}^0$						
	$A' : A =$	·190,	·137,	·091,	0						
	$n_1 =$	106,	206,	486,	∞*).						

223. Kommt bei einer Röhrenleitung eine Krümmung vor, so lässt sich der dabei eintretende Gefällsverlust, welcher wieder dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers proportional ist, nach Navier und Morin (auf den Wiener Fuss bezogen) durch
$$z'' = (\cdot 01233 + \cdot 0186\, R) \frac{S}{R^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \cdot (m)$$
ausdrücken, wenn R den Krümmungshalbmesser CA der Achse (Fig. 127), S die Länge des betreffenden Bogens ANB bezeichnet.

Weisbach findet aus seinen Versuchen, dass man den Widerstands-Coefficienten $n'' = \left[\cdot 131 + \cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}$ ausdrücken

*) M. s. das Weitere in den „Versuchen über den Ausfluss des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. Weisbach. Leipzig, 1842.“

kann, wenn D den Durchmesser der cylinderischen Röhre, R den Krümmungshalbmesser und α den Krümmungswinkel ACB in Graden ausgedrückt bezeichnet.

Für parallelopipedische Röhren wäre ebenso:

$$n'' = \left[\cdot 124 + \cdot 274 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}.$$

Ist z. B. bei einer solchen Krümmung von cylinderischen Röhren $D = \frac{1}{2}$, $R = 10$ Fuss und $\alpha = 90^0$, so wäre nach der Weisbach'schen Formel, da der Theil $\cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 163 \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 000004556$ hier keinen Einfluss hat, $n'' = \cdot 131 \times \frac{1}{2} = \cdot 0655$, folglich der Gefällsverlust:

$$z'' = \cdot 0655 \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen würde nach der erstern Formel (m) wegen $S = R\alpha = 10 \times \frac{3\cdot 1416}{2}$ $= 15\cdot 7080$, diese Widerstandshöhe $z'' = \cdot 19833 \times \frac{15\cdot 708}{100} \frac{v^2}{2g}$, d. i.

$$z'' = \cdot 03115 \frac{v^2}{2g}$$

ungefähr nur halb so gross. Jedenfalls ist dieser Widerstand so gering, dass er in der Regel gegen die übrigen vernachlässiget werden kann, besonders wenn der Krümmungshalbmesser nicht gar zu klein ist.

224. Bildet endlich die Achse der Leitung an irgend einem Puncte B (Fig. 128) einen scharfen Winkel ABC, also die Röhre an dieser Stelle ein Knie, so lässt sich der durch die plötzliche Aenderung der Richtung und der im Knie entstehenden Contraction herbeigeführte Verlust der Gefällshöhe z''' auf folgende Weise bestimmen.

Ist wieder A der Querschnitt der Röhre, v die Geschwindigkeit des Wassers, der Ablenkungswinkel $CBD = \alpha$, und nimmt man an, dass sich jedes Wassertheilchen in einer, zur gebrochenen Linie ABC parallelen Richtung fortbewegt, so geht in jedem Zeitelement dt eine Wasserschichte von dem Volumen $Av\,dt$, oder, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, von dem Gewichte $\gamma Av\,dt$ mit der Geschwindigkeit v von der Richtung AB plötzlich in jene BC über, vereinigt sich mit dem in diesem Schenkel befindlichen Wasser und fliesst mit derselben Geschwindigkeit v weiter.

Zerlegt man nun die Geschwindigkeit dieser Wassermasse $m = \gamma Av\,dt$ vor und nach dem Stosse in zwei Seitenkräfte, eine nach der Richtung AB, die andere darauf senkrecht, so hat man für diese beiden Seitenkräfte vor dem Stoss beziehungsweise v und 0, und nach dem Stoss $v \, Cos\, \alpha$ und $v \, Sin\, \alpha$, also ist der durch den Stoss herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft nach der Relation (2) in Nr. **158**, Anmerkung:

$$m\,[(v - v\,Cos\,\alpha)^2 + (0 - v\,Sin\,\alpha)^2] = 2\,m\,v^2\,(1 - Cos\,\alpha)$$
$$= 4\,m\,v^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Es ist also der Verlust an Wirkungsgrösse oder Arbeit während der Zeit dt, wenn man für m den Werth herstellt:

$$4\,\frac{\gamma A v\, dt}{2g}\,v^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

oder für die Zeiteinheit, wenn man die entsprechende Masse $\gamma A v = M$ setzt:

$$4\,M\,\frac{v^2}{2g}\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha;$$

es ist also

$$M z''' = 4\,M\,\frac{v^2}{2g}\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

und daher die gesuchte Widerstandshöhe:

$$z''' = 4\,\frac{v^2}{2g}\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = n'''\,\frac{v^2}{2g},$$

wenn man den Widerstands-Coefficienten $4\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = n'''$ setzt.

Anmerkung. Der hier theoretisch gefundene Widerstands-Coefficient ist gegen die Erfahrung aus dem Grunde zu gross, weil sich die Wassertheilchen nicht sämmtlich mit der gebrochenen Linie ABC parallel, sondern die mittleren Fäden in Curven bewegen, welche einen geringeren Verlust an lebendiger Kraft bedingen. Weisbach glaubt aus seinen Versuchen diesen Widerstands-Coefficienten durch die Formel

$$n''' = \cdot 9457\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + 2\cdot 047\,Sin^4\tfrac{1}{2}\alpha$$

ausdrücken zu können und berechnet darnach eine Tabelle, nach welcher

für	$\alpha =$ 20°,	40°,	60°,	80°,	90°,	100°,	110°,	120°,	130°,	140°,
sofort	$n''' =$ ·046,	·139,	·364,	·740,	·984,	1·260,	1·556,	1·861,	2·158,	2·431

wird.

Aber selbst wenn diese Coefficienten nicht zu klein sein sollten, ist der Widerstand immer noch gross genug, um sich bestimmen zu lassen, alle scharfen Winkel bei den Leitungen möglichst zu vermeiden und dafür sanfte Krümmungen zu wählen.

225. Verbindet nun eine Röhrenleitung von den in den vorigen Nummern angenommenen Dimensionen, d. i. vom Durchmesser D und der Länge L, den oberen Sammelbehälter ABC (Fig. 129) mit einem tiefer liegenden Behälter $A'B'D$, wobei der Oberwasserspiegel AB die Fläche F und der untere $A'B'$ jene f haben soll, und ist, sobald der Beharrungsstand eingetreten und das Wasser durch die Röhre mit der Geschwindigkeit v fliesst, die constante

Druck- oder Gefällshöhe $EF = H$, ferner die Geschwindigkeitshöhen, welche den Geschwindigkeiten $v' = \frac{A}{F} v$ und $v'' = \frac{A}{f} v$ entsprechen, mit welchen die Wasserschichten in den oberen Behälter bei AB ein- und im unteren Behälter $A'B'$ austreten $\frac{v'^2}{2g} = h'$ und $\frac{v''^2}{2g} = h''$, so hat man, wenn der atmosphärische Druck auf beide Wasserspiegel als gleich gross angenommen wird, die allgemeine Gleichung:

$$H + h' = h'' + z + \Sigma(z') + \Sigma(z'') + \Sigma(z''') \ldots (1),$$

wenn man die Wassersäulenhöhe z zur Ueberwindung der Reibung an den Röhrenwänden aus Nr. **215** oder **216**, die Summe der Wassersäulenhöhen $\Sigma(z')$ zur Ueberwindung der in der Leitung vorkommenden plötzlichen Verengungen oder Erweiterungen nach den Nrn. **217** bis **222**, jene $\Sigma(z'')$ zur Ueberwindung des Widerstandes in Krümmungen nach Nr. **223** und endlich jene $\Sigma(z''')$, welche dem Widerstande in scharfen Biegungen entsprechen, nach Nr. **224** bestimmt. Führt man statt diesen Widerstandshöhen $z, z', \ldots$ die entsprechenden Widerstands-Coefficienten $n, n', \ldots$ und anstatt der Geschwindigkeitshöhen h, h', h'' die Geschwindigkeiten selbst ein, so verwandelt sich die vorige Gleich. (1) wegen $z = n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ (welche Form man sofort dem Ausdrucke (2) in **215** geben kann) und $z' = n' \frac{v^2}{2g}$, $z'' = n'' \frac{v^2}{2g}, \ldots$ in die folgende:

$$H = \frac{v^2}{2g} \left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{F^2} + n \frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') \right] \ldots (2).$$

Ist der untere Behälter nicht vorhanden, sondern mündet die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft aus, so ist $f = A$, und wenn man unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt A der Röhre gegen jenen des Behälters F sehr klein sei, das Glied $\frac{A^2}{F^2}$ vernachlässigt (die Wasserschichten bei AB nämlich als still stehend ansieht), sofort:

$$H = \frac{v^2}{2g} \left[1 + n \frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') \right] \ldots (3).$$

Mündet dagegen die Leitungsröhre durch ein verengtes Mundstück in die freie Luft aus, so muss man, wenn f der Querschnitt der Ausmündung ist, anstatt 1 wieder das obige Glied $\frac{A^2}{f^2}$ der Gleich. (2) setzen, wenn keine Contraction Statt hat, sonst aber $\frac{A^2}{\alpha f}$, nehmen, wenn α der entsprechende Contractions-Coefficient ist. Sind nicht alle Kanten gehörig abgerundet, so muss man in die Summe $\Sigma(n')$ auch noch den Widerstands-Coefficienten aufnehmen, welcher dem Widerstande entspricht, den das Wasser beim Durchgange durch dieses Mundstück erfährt.

Anmerkung. Wäre der Druck auf die Flächeneinheit auf den oberen Wasserspiegel durch die Wassersäule h' und auf den unteren Wasserspiegel durch jene h'' ausgedrückt und h' von h'' verschieden, so müsste man in dieser Gleichung $H + h' - h''$ anstatt H setzen.

Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit aus einer Röhrenleitung.

226. Für den ganz allgemeinen Fall darf man nur die vorige Gleichung (2) oder (3) nach v auflösen, um diese Geschwindigkeit zu erhalten. Nehmen wir hier nur den einfachsten Fall und setzen eine Leitung voraus, in welcher weder Verengungen noch Krümmungen vorkommen, und bei welcher auch durch gehörige Erweiterung der Einflussöffnung die Contraction des Wassers beim Eintritt aus dem Behälter in die Röhrenleitung vermieden ist, so hat man, mit Beibehaltung aller früheren Bezeichnungen in der vorigen Formel (3) alle mit dem Summenzeichen Σ behafteten Glieder auszulassen und

$$(a) \quad H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

zu setzen, woraus sofort

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH}{1 + n\frac{L}{D}}\right]} \ldots (4) \quad \text{folgt.}$$

Tritt dagegen das Wasser aus dem Behälter mit Contraction in die Leitung, so hat man mit Hinzufügung des betreffenden Widerstands-Coefficienten $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ (Nr. **218**, Gleich. β) oder jenes $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ [Nr. **191** (c)] $H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + n\frac{L}{D}\right]$ oder wenn man Kürze halber $\frac{\alpha}{\sqrt{[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]}} = m$ setzt, auch

$$(a') \quad H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right),$$

woraus sofort: $v = m\sqrt{\left(\frac{2gH}{1 + nm^2\frac{L}{D}}\right)} \ldots (5)$ folgt.

Anmerkung. Da man den diesem Fall entsprechenden Contractions-Coefficienten (Nr. **218**, Anmerkung) $\alpha = \cdot 596$ setzen kann, so folgt für den Coefficienten m der mittlere Werth $m = \cdot 83$, welcher nahe mit dem Geschwindigkeits-Coefficienten $\cdot 82$ beim Ausflusse des Wassers aus kurzen cylinderischen Ansatzröhren übereinstimmt (d. i. $\cdot 816$ Nr. **190**), und da er diesen in etwas übertrifft, nur den Beweis liefert, dass selbst bei einem kurzen Ansatzrohr schon einiger Reibungswiderstand an den Röhrenwänden stattfindet.

227. Nimmt man für die Widerstandshöhe z anstatt des Ausdruckes (7) in Nr. **216** jenen (2) in Nr. **215**, so wird

$$(b) \quad H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und daraus, wenn man $g = 31$ und für α, β die in Nr. **215** angegebenen, auf den Wiener Fuss sich beziehenden Werthe (m) setzt (und durch Division mit $8g\beta$ den Coefficienten $8g\beta L + D$ auf die Form $L + 36{\cdot}6D$ bringt):

$$v = -\frac{\cdot 002536\,gL}{L + 36{\cdot}6D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002536\,gL}{L + 36{\cdot}6D}\right)^2 + \frac{73{\cdot}2\,gDH}{L + 36{\cdot}6D}\right]} \ldots (6).$$

Ist die Leitung so lang, dass man $36{\cdot}6D$ gegen L auslassen darf, so ist einfacher:

$$v = -\cdot 002536\,g + \sqrt{\left[(\cdot 002536\,g)^2 + \frac{73{\cdot}2\,gDH}{L}\right]} \ldots (7).$$

Ist die Geschwindigkeit v grösser als 2 Fuss, so kann man, da dann das Glied mit der 1sten Potenz von v vernachlässigt werden darf (§. 369)

$$v = 8{\cdot}427\sqrt{\left(\frac{gHD}{L + 35.5D}\right)} = 46{\cdot}95\sqrt{\left(\frac{HD}{L + 35{\cdot}5D}\right)} \ldots (8)$$

setzen.

Nimmt man dagegen die wenigstens eben so viel Vertrauen verdienenden Werthe (n) (aus Nr. **215**), so erhält man:

$$(6') \quad v = -\frac{\cdot 002800\,gL}{L + 37{\cdot}2D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002800\,gL}{L + 37{\cdot}2D}\right)^2 + \frac{74{\cdot}405\,gDH}{L + 37{\cdot}2D}\right]}.$$

Kann man $37{\cdot}2D$ gegen L auslassen, so ist:

$$(7') \quad v = -\cdot 002800\,g + \sqrt{\left[(\cdot 002800\,g)^2 + \frac{74{\cdot}405\,gDH}{L}\right]}.$$

Ist die Geschwindigkeit v nach der einen oder andern dieser Formeln bestimmt, so findet man die per Secunde durch die Röhrenleitung fliessende Wassermenge aus der Formel

$$M = \tfrac{1}{4}\pi D^2 v = \cdot 7854\,D^2 v \ldots (9).$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dass sich diese Formeln nicht nur auf den Wiener Fuss als Einheit, sondern auch auf den Meter und überhaupt auf jedes beliebige Mass beziehen, wenn man nur g im ersteren Falle $= 31$, im zweiten $= 9{\cdot}808$ und so überhaupt in dem landesüblichen Masse ausgedrückt substituirt.

228. Um die Gefällshöhe H zu bestimmen, welche vorhanden sein muss, damit eine Röhrenleitung von der Länge L und dem Durchmesser D per Secunde M Kubikfuss Wasser liefere, suche man zuerst aus der vorigen Gleichung (9) die Geschwindigkeit $v = \frac{4M}{\pi D^2}$ und damit die Gefällshöhe H aus (a) oder (a') in Nr. **226**, oder aus (b) in Nr. **227**, d. i. entweder, wenn das Wasser aus dem Behälter ohne Contraction in die Röhren tritt, aus der Formel:

$$H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei $n = {\cdot}01439 + \frac{{\cdot}01685}{\sqrt{v}}$ ist, oder, wenn das Wasser mit Contraction eintritt, aus der Formel:

$$H = \left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei n den vorigen Werth hat und $m = {\cdot}83$ ist, oder endlich aus der Formel:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2),$$

wobei $\alpha = {\cdot}00001733$ und $\beta = {\cdot}0001101$, oder auch $\alpha = {\cdot}0000188$ und $\beta = {\cdot}0001083$ ist.

Beispiel. Um diese verschiedenen Werthe wenigstens an einem Beispiele mit einander zu vergleichen, in welchem $D = {\cdot}79$ und $L = 4587$ Fuss ist, ferner $M = 1{\cdot}235$ Kubikfuss sein soll, hat man zuerst aus der Formel (9) für die Geschwindigkeit $v = 2{\cdot}5196$ Fuss und damit aus der letzten Formel für die Gefällshöhe $H = 17{\cdot}35$ oder $H = 17{\cdot}17$ Fuss, je nachdem man für die Coefficienten α und β die ersteren oder letzteren der eben angegebenen Werthe nimmt.

229. Um den Durchmesser D zu bestimmen, welchen eine Röhrenleitung erhalten muss, damit diese bei einem Gefälle $= H$ in jeder Secunde M Kubikfuss Wasser liefere, hat man zuerst, wenn man in die Formel (9) (Nr. **227**) den genäherten Werth für v aus der Formel (8) setzt, und darin noch $35{\cdot}5\,D$ gegen L auslässt:

$$M = {\cdot}7854 \times 46{\cdot}95\,D^2 \sqrt{\left(\frac{HD}{L}\right)} = 36{\cdot}874 \sqrt{\left(\frac{HD^5}{L}\right)}$$

und daraus

$$D = {\cdot}2362 \sqrt[5]{\left(\frac{LM^2}{H}\right)} \ldots (c).$$

Anmerkung. Genauer kann man diesen Durchmesser dadurch finden, dass man in der Gleichung $D = \sqrt{\frac{4M}{\pi v}}$ (welche aus 9 folgt) für v versuchsweise mehrere Werthe annimmt und damit die entsprechenden Werthe von D berechnet. Je zwei zusammengehörige Werthe von v und D setzt man dann in die Gleichung $H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ [Gleich. (b) in Nr. **227**], oder wenn man die Weisbach'schen vorzieht, in jene (a) oder (a') in Nr. **226**, so sind jene Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, die wahren Werthe von v und D.

230. Um endlich noch die vortheilhafteste Geschwindigkeit zu finden, bei welcher die Wasserkraft, welche durch eine Röhrenleitung von gegebenen Dimensionen erhalten werden kann, ein Maximum wird, hat man die Wirkungsgrösse der per Secunde mit der Geschwindigkeit v ausfliessenden Wassermenge M, wenn diese durch W bezeichnet wird: $W = \gamma M \frac{v^2}{2g} = \gamma M h$, oder wegen $M = \frac{1}{4}\pi D^2 v$ auch $W = A D^2 h v$, wenn man Kürze halber $\frac{1}{4}\gamma\pi = A$ setzt. Nun folgt aber aus $H = h + z = h + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ sofort:

$$h = H - \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2),$$

folglich ist
$$W = AD^2\left[Hv - \frac{4L}{D}(\alpha v^2 + \beta v^3)\right]$$

und es muss in dieser Gleichung v so bestimmt werden, dass dafür W am grössten wird. Nun ist aber, wenn man nach der bekannten Regel verfährt:

$$\frac{dW}{dv} = AD^2\left[H - \frac{4L}{D}(2\alpha v + 3\beta v^2)\right] = 0 \quad \text{oder} \quad 2\alpha v + 3\beta v^2 = \frac{DH}{4L}$$

und daraus
$$v = -\frac{\alpha}{3\beta} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{9\beta^2} + \frac{1}{12\beta} \cdot \frac{HD}{L}\right]}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für α und β die obigen Werthe (m) aus Nr. **215**, d. i. $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$, so erhält man nahe genug, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit, wofür die Wirkung W, weil dafür der 2te Differenzial-Quotient negativ ausfällt, in der That ein Maximum wird:

$$v = -\cdot 0525 + \sqrt{\left(\cdot 002756 + 756 \cdot 9 \frac{HD}{L}\right)}.$$

Anmerkung. Diese Entwickelung kann, da man es nicht in seiner Gewalt hat, diese vortheilhafteste Geschwindigkeit herbeizuführen, nur dazu dienen, um sich zu überzeugen (man vergleiche diese Formel mit jener (7) in Nr. **227**), dass diese vortheilhafteste Geschwindigkeit in der Regel immer kleiner als die wirkliche ist, folglich auch das Maximum der Wirkung des durch die Leitung fliessenden Wassers nicht erreicht werden kann.

231. Bestände die Röhrenleitung aus mehreren Stücken, beziehungsweise von den Längen $L, L_1, L_2, \ldots$ den Querschnitten $A, A_1, A_2, \ldots$ den Durchmessern $D, D_1, D_2, \ldots$ in welchen das Wasser mit den Geschwindigkeiten $v, v_1, v_2, \ldots$ fliesst und wären $n, n_1, n_2, \ldots$ die entsprechenden Reibungs-Coefficienten, so müsste man in den Formeln (2) und (3) Nr. **225** statt $n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$ setzen:

$$n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} + n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + n_2\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} + \ldots$$

d. i. wegen $v_1 = \frac{D^2}{D_1^2}v,\ v_2 = \frac{D^2}{D_2^2}v, \ldots$ sofort:

$$\left(n\frac{L}{D} + n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{D^4}{D_1^4} + n_2\frac{L_2}{D_2}\frac{D^4}{D_2^4} + \ldots\right)\frac{v^2}{2g},$$

d. h. also, man muss $n\frac{L}{D} + n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{D^4}{D_1^4} + \ldots$ anstatt $n\frac{L}{D}$ setzen.

232. Um die Höhe von springenden Strahlen zu bestimmen, welche durch Röhrenleitungen gespeist werden, muss man, wenn das Mundstück *abcd* (Fig. 130) lang oder sehr eng ist, nicht bloss auf den durch die plötzliche Querschnittsänderung hervorgehenden, sondern auch auf jenen Widerstand Rücksicht nehmen, welcher aus der Reibung beim Durchgange des Wassers durch dieses Mundstück entsteht. Bezeichnet man nämlich die Länge des Mundstückes mit l, ihren Durchmesser mit d und den nach Nr. **219** (Anmerk.) zu bestimmenden Widerstands-Coefficienten für den Eintritt des Wassers mit μ, so muss man nach der eben gemachten Bemerkung (vorige Nr.) in der allgemeinen Formel (2) statt $n\frac{L}{D}$ setzen: $n\frac{L}{D} + n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$, und wenn man den Widerstand, welcher beim Eintritte des Wassers in das Mundstück von der allgemeinen Summe $\Sigma(n')$ ausscheidet und für sich hinstellt, $\mu + \frac{A^2}{f^2}$ statt $\frac{A^2}{f^2}\left(= \frac{D^4}{d^4}\right)$ setzen; dadurch erhält man für den vorliegenden Fall, wenn man wieder den kleinen Quotienten $\frac{A^2}{f^2}$ auslässt:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2} + \mu + n\frac{L}{D} + n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''')\right] \ldots (10)$$

dabei bezeichnen, wie bereits bemerkt, μ den Widerstands-Coefficienten für den Eintritt des Wassers in das M u n d s t ü c k (Nr. **219**), $n\frac{L}{D}$ und $n_1\frac{l}{d}$ die Widerstands-Coefficienten für die

Reibung des Wassers an den Wänden der Leitungsröhre und des Mundstückes (Nr. **215** und **216**), n' den Widerstands-Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch irgend eine in der Leitungsröhre befindliche Scheidewand, plötzliche Erweiterung oder Verengung, wozu auch der Eintritt des Wassers aus dem Sammelbehälter in die Röhre gehört, wenn diese nicht nach aufwärts gehörig erweitert ist, ein Ventil u. s. w. (Nr. **217** bis **222**), n'' den Widerstands-Coefficienten durch eine Krümmung (Nr. **223**) und endlich n''' den Widerstands-Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein Knie (Nr. **224**).

Anmerkung. Was den Coefficienten n_1 betrifft, so kann man diesen, da für gewöhnlich die Geschwindigkeit des Wassers im Mundstück sehr gross ist $n_1 = {\cdot}016$ setzen.

233. Da das Wasser aus der Mündung mit der Geschwindigkeit $\frac{A}{f}v$ ausspringt, so erreicht der Strahl (abgesehen vom Widerstande der Luft) die Höhe $h = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g}$. Führt man diese Sprunghöhe h in die vorige Formel ein, und setzt Kürze halber die Summe der Glieder

$\mu + n\frac{L}{D} + n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') = S$, so erhält man

$$(11) \quad H = h\left(1 + \frac{f^2}{A^2}S\right) \text{ und daraus } h = \frac{H}{1 + \frac{f^2}{A^2}S} \ldots (12).$$

Da aus der Gleichung (11) $h = H - h\frac{f^2}{A^2}S$ und (Fig. 131) $ED = EC - CD = H - h = H - (H - h\frac{f^2}{A^2}S) = h\frac{f^2}{A^2}S$ ist, so folgt, dass die Sprunghöhe $CD = h$ um diese Höhe $ED = h\frac{f^2}{A^2}S$ kleiner als die disponible Druckhöhe $CE = H$ ist.

Anmerkung. Denkt man sich die Druckhöhe $CE = H$ im Puncte D so getheilt, dass sich verhält $CD : DE = h : H - h = 1 : \frac{f^2}{A^2}S$, so bezeichnet ED den Verlust an Druckhöhe, d. i. die gesammte Widerstandshöhe, sowie CD die wirksame Druckhöhe oder Sprunghöhe.

Mit Rücksicht darauf, dass der vertical aufsteigende Wasserstrahl, theils wegen des Luftwiderstandes, theils weil die zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht völlig diese Höhe h, sondern die geringere Höhe h_1 erreicht, kann man nach D'Aubuisson für diese Steighöhe setzen

$$h_1 = h(1 - {\cdot}0032h),$$

wenn man nämlich den Wiener Fuss zur Einheit nimmt.

234. Soll das Wasser aus einer Hauptleitung durch mehrere Nebenleitungen, z. B. durch zwei Zweigröhren geleitet werden, so findet man die Geschwindigkeiten, welche das Wasser in diesen Röhrenleitungen annimmt, auf folgende Weise.

Es sei H die Höhe des Reservoirs über dem Theilungspunct der Leitung, L die Länge und D der Durchmesser der Hauptleitungsröhre, sowie V die Geschwindigkeit des Wassers in derselben. Ferner sei h die Höhe des genannten Theilungspunctes über der Ausflussöffnung der ersten Zweigröhre, sowie l ihre Länge, d ihr Durchmesser und v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben; für die zweite Zweigröhre sollen h', l', d' und v' dieselbe Bedeutung haben.

Diess vorausgesetzt ist die am Theilungspunct der Hauptleitung nach Abzug der Widerstandshöhe noch vorhandene wirksame Druckhöhe [**215**, Relat. (2)] $h'' = H - \frac{4L}{D}(\alpha V + \beta V^2)$.

Dagegen ist die zur Bewegung des Wassers im ersten Zweigrohr nöthige Druckhöhe [**227**, Relat. (b)]:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(\alpha v + \beta v^2),$$

sowie jene im zweiten Zweigrohre:

$$h' = \frac{v'^2}{2g} + \frac{4l'}{d'}(\alpha v' + \beta v'^2).$$

Da nun diese 3 Druckhöhen einander gleich sein müssen, so hat man die beiden Gleichungen:

$$h'' = h \quad \text{und} \quad h'' = h'$$

und man darf zu diesen nur noch die Continuitäts-, d. i. die Bedingungs-Gleichung hinzufügen, dass die in der Hauptröhre fliessende Wassermenge gleich sein muss der Summe der Wassermengen, die in den Zweigröhren fortfliessen, d. i. die Gleichung:

$$VD^2 = vd^2 + v'd'^2,$$

um aus diesen 3 Gleichungen die 3 Geschwindigkeiten V, v und v' bestimmen zu können.

Anmerkung. Fliesst das Wasser aus den Zweigröhren (deren Zahl natürlich nicht auf 2 beschränkt zu sein braucht) nicht voll, sondern durch ein Ansatzrohr oder Mundstück vom lichten Durchmesser, beziehungsweise δ und δ' aus, so muss man, wie leicht zu sehen, in den obigen Ausdrücken von h und h' anstatt v^2 und v'^2 sofort $v^2 \frac{d^4}{\delta^4}$ und $v'^2 \frac{d'^4}{\delta'^4}$ setzen.

235. Um schliesslich noch den in irgend einem Querschnitt mn (Fig. 129) einer Röhrenleitung stattfindenden hydraulischen Druck zu finden, sei die diesem Drucke entsprechende Druckhöhe $= \mathfrak{z}$, der lothrechte Abstand des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes mn unter dem oberen Wasserspiegel AB, d. i. $ac = z$, die Länge des Röhrenstückes $Cc = l$ und jene von $cD = L - l = l'$, so ist, wenn man zuerst jenen Theil cD der Leitung betrachtet, welcher zwischen der gedrückten Stelle c und der Ausmündung liegt, in der Gleichung (2) Nr. **225**, in welcher man sich den ersten Theil (nach Anmerk. der erwähnten Nummer) mit $H + h' - h''$ geschrieben denken muss, $\mathfrak{z}$ statt h' und $H - z$ statt H zu setzen. Bezeichnet man ferner noch die Summenzeichen Σ durch Σ_1, insoferne sie sich auf jene Widerstände, als Verengungen u. s. w. beziehen, welche im oberen Theile Cc, dagegen mit Σ_2, insoferne sie sich auf die im unteren Theile cD der Leitung vorkommenden Widerstände beziehen und setzt statt F eine allgemeine Querschnittsfläche a, so hat man für das Stück cD:

$$H - z + \mathfrak{z} - h'' = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{a^2} + n\frac{l'}{D} + \Sigma_2(n') + \Sigma_2(n'') + \Sigma_2(n''')\right] \; (k).$$

Zieht man nun diese Gleichung von der genannten (2) in Nr. **225** ab, so erhält man für den oberen Röhrentheil, wegen $L - l' = l$ und $\Sigma - \Sigma_2 = \Sigma_1$ sofort:

$$\mathfrak{z} = z + h' - \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{a^2} - \frac{A^2}{F^2} + n\frac{l}{D} + \Sigma_1(n') + \Sigma_1(n'') + \Sigma_1(n''')\right] \ldots (13),$$

d. h. die Druckhöhe, welche dem im Querschnitte a stattfindenden hydraulischen Drucke entspricht, ist gleich der verticalen Tiefe des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes unter dem Wasserspiegel des Behälters, vermehrt um die Wassersäulenhöhe, welche dem auf den Wasserspiegel stattfindenden Drucke entspricht und vermindert um die Summe der Geschwindigkeitshöhe des Wassers im betreffenden Querschnitt und der Widerstandshöhen aller im oberen Theile der Röhre, vom betreffenden Querschnitte an bis zum Behälter vorkommenden Hindernisse.

Ist γ das Gewicht von 1 Kubikfuss Wasser, so ist der hydraulische Druck q auf die Flächeneinheit, d. i. auf 1 Quadratfuss:

$$q = \gamma \mathfrak{z}.$$

236. Für den Fall, als der untere Behälter nicht vorhanden ist und die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft ausmündet, ferner weder im oberen Behälter noch in der Röhre plötzliche Querschnittsänderungen vorkommen, endlich auch keine Contraction bei der Einmündung der Röhre stattfindet, hat man für den hydraulischen Druck auf die Flächeneinheit in irgend einem Puncte des Behälters, wegen $a = F$ und $n = n' = \ldots = 0$ sofort:

$$q = \gamma \mathfrak{z} = \gamma z + \gamma h';$$

dagegen für irgend einen Querschnitt der Röhre, z. B. bei c (Fig. 132) wegen $a = A$, und wenn man den in der Regel sehr kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ wieder auslässt:

$$q = \gamma z + \gamma h' - \gamma \left(1 + n\frac{l}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

oder da für diesen Fall die Gleich. (3) in Nr. **225** in $H = \frac{v^2}{2g}\left(1 + n\frac{L}{D}\right)$ übergeht, woraus $\frac{v^2}{2g} = \frac{H}{1 + n\frac{L}{D}}$ folgt, auch:

$$q = \gamma h' + \gamma z - \gamma H \frac{1 + n\frac{l}{D}}{1 + n\frac{L}{D}} \ldots (14).$$

Da dieser Quotient $1 + n\frac{l}{D} : 1 + n\frac{L}{D}$, besonders wenn l nicht sehr verschieden von L ist, also namentlich für die unteren Querschnitte der Leitung, nahe $= \frac{l}{L}$ ist, so hat man auch sehr nahe:

$$q = \gamma h' + \gamma\left(z - \frac{l}{L}H\right) \ldots (15).$$

Anmerkung. Findet in einer horizontalen Röhrenleitung keine plötzliche Verengung oder Erweiterung, sowie auch keine Contraction beim Eintritt des Wassers statt, so ist, wenn die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft ausmündet, nach der Formel (k) in Nr. **235**, wegen $f = a = A$, $n' = n'' = \ldots = 0$ und $z = H$ sofort:

$$\mathfrak{z} - h'' = n\frac{l'}{D}\frac{v^2}{2g},$$

so dass also der Ueberschuss des inneren Wasserdruckes (oder wenn man den Druck der Atmosphäre, da er, wenn es sich z. B. um die Bestimmung der Wanddicke handelt, von innen und aussen gleich stark ist und sich aufhebt, unberücksichtigt lässt, sofort der hydraulische Druck) an dem betreffenden Querschnitt, dem Drucke einer Wassersäule gleich kommt, welche nothwendig ist, um die Reibung des Wassers in jenem Theile der Röhre, welcher zwischen der gedrückten Stelle und der Ausmündung liegt, zu überwinden. Dieser Druck wächst also genau wie die Entfernung der gedrückten Stelle von der Ausmündung, in welchem Puncte selbst er gleich Null ist.

Ist dagegen die Ausmündung verengt und vernachlässigt man den Röhrenwiderstand, so folgt wieder aus derselben Formel (k), wegen $a = A$:

$$\mathfrak{z} - h'' = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = H - h \text{ oder } \gamma(\mathfrak{z} - h'') = \gamma(H - h),$$

d. h. der Ueberschuss dieses Druckes, oder wenn man den atmosphärischen Druck $\gamma h''$ unberücksichtiget lässt, der hydraulische Druck, ist in diesem Falle in der ganzen Röhre derselbe, und zwar gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe die um die Geschwindigkeitshöhe des fliessenden Wassers verminderte Druckhöhe ist. (Vergleiche §. 371.)

237. Ist B (Fig. 132) jener Punct des Wasserspiegels, welcher lothrecht über der Einmündung C der Röhre liegt, und zieht man die Gerade BD, so werden in der Regel die Stücke Bb und BD sehr wenig von jenen Cc und CD, d. i. von l und L verschieden sein, so dass man nahe $\frac{Bb}{BD} = \frac{l}{L}$, und wegen $ab : ED = Bb : BD$ auch $ab = \frac{Bb}{BD} ED = \frac{l}{L} H$ setzen kann.

Da nun $ac = z$ ist, so wird nahe $bc = z - \frac{l}{L} H$, folglich nach der letzten Gleichung (15) der hydraulische Druck q in c sehr nahe gleich $\gamma h' + \gamma . bc$, d. i. gleich dem hydrostatischen Drucke einer oben offenen Wassersäule von der Höhe bc sein, auf deren obere Fläche also noch der athmosphärische Druck $\gamma h'$ wirkt.

Würde man daher die Röhre c an der obern Seite durchbohren und auf diese Oeffnung ein oben offenes Rohr (einen sogenannten Piëzometer oder Druckmesser) aufsetzen, so würde das Wasser darin bis auf die Höhe b steigen und sonach den in diesem Puncte der Leitung stattfindenden hydraulischen Druck messen oder angeben (§. 372, Anmerkung 2).

Macht man die über B gezogene Verticale $BF = h'$, d. i. gleich der Höhe einer mit dem Luftdrucke im Gleichgewichte stehenden Wassersäule (also nahe = 32 Fuss) und zieht FG parallel mit BD, so wird der in c herrschende hydraulische Druck q mit Inbegriff des atmosphärischen durch das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe cN ausgedrückt, oder es ist $q = \gamma . Nc$. (Vergleiche auch die Anmerkungen zu §. 372.)

Anmerkung. Liegt der betreffende Punct c in b, so ist $bc = 0$ und $q = \gamma h' = \gamma . Nb$. Liegt c in N, so ist $bc = -bN = -h'$ und $q = 0$. Könnte c über N z. B. in c' liegen, was z. B. der Fall wäre, wenn die Leitung die Form $Cc'D$ hätte, so wäre cN, also auch der Druck q negativ.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass die Gerade FG die Grenze ist, über welche hinaus kein Punct der Leitung liegen, ja dass man selbst nicht einmal so weit gehen darf, wenn der Ausfluss durch die Leitung möglich sein soll.

Theilt man die ganze Druckhöhe $ED = H$ in die beiden Höhen $EH = h_1$ und $HD = h_2$, wovon also die erstere dem Zuflussbehälter oder Reservoir und die letztere der Röhre zukommt, so ist, wenn die Röhre ohne alle Verengungen und Biegungen in die freie Luft ausmündet, nach Gleichung (3) in Nr. **225**:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man für den Reibungswiderstand den Ausdruck (2) in Nr. **215** wählt, auch: $$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2).$$

Damit nun das Wasser den Querschnitt der Röhre völlig ausfülle oder mit vollem Querschnitt ausfliesse, muss das Reservoir eine hinlängliche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dass man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 grösser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden lässt und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1 in §. 369 die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe 16·73 und die ganze Gefällshöhe 16·83 Fuss, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fuss, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fuss Geschwindigkeit aus der Leitung ausfliesst. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$, also jene der Leitung $h_2 > 16{\cdot}73$ Fuss nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfliessen.

Von dem Stosse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 377.)

238. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sei allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stossenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit, nach und mit welcher diese Fläche gleich-