Ausfluss aus einem Gefäss, welches um eine verticale Achse rotirt.

213. Wird das, bis auf eine gewisse Höhe mit einer schweren incompressibeln Flüssigkeit gefüllte Gefäss BF (Fig. 111) mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse CG umgedreht, so findet man den Zustand des Gleichgewichtes der Flüssigkeit, welche an dieser Bewegung Theil nimmt, wenn man berücksichtiget, dass auf jedes Theilchen M von der Masse m erstlich die Schwerkraft nach lothrechter Richtung $KM = g$ und dann noch die Centrifugalkraft LM nach horizontaler Richtung wirksam ist. Setzt man den, dem Puncte M entsprechenden Halbmesser $PM = y$, so ist die Grösse dieser letzteren Kraft, ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen (Nr. **130**, Anmerk.) $LM = yw^2$, so dass, wenn man das Kräftenparallelogramm LK ergänzt, die Resultante aus diesen beiden Kräften KM und LM sofort $QM = \sqrt{[g^2 + (yw^2)^2]}$ ist, welche in der Richtung QM wirkt. Hieraus folgt (**169**), dass das genannte Gleichgewicht der Flüssigkeit nur bestehen kann, wenn die freie Oberfläche, und folglich auch alle Niveauschichten in jedem Punkte auf der entsprechenden Richtung QM normal stehen.

Ist daher BF ein durch die Achse CG geführter verticaler Durchschnitt, NAN' die von der freien Oberfläche gebildete Curve, MT die an irgend einen Punct M derselben geführte Tangente, sowie für diesen Punct $AP = x$, $PM = y$ als rechtwinkelige Coordinaten, und der Winkel $MTC = \alpha$, so folgt wegen W. $QML =$ W. MTC sofort:

$$tang\,\alpha = \frac{QL}{ML} = \frac{KM}{ML} = \frac{g}{yw^2},$$

und da auch $tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man durch Gleichsetzung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{yw^2} \quad \text{oder} \quad y\,dy = \frac{g}{w^2}dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$y^2 = \frac{2g}{w^2}x \ldots (1),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Aus dieser Gleichung (1) folgt also, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine durch Umdrehung der Parabel NAN', deren Parameter $= \frac{2g}{w^2}$ ist und Scheitel A in der Umdrehungsachse liegt, erzeugte paraboloidische Fläche bildet.

Anmerkung. Da die in horizontaler Richtung wirkende Centrifugalkraft keinen Einfluss auf die lothrecht wirkende Schwerkraft hat, so muss in irgend einem Puncte J der Druck p auf die Flächeneinheit eben so gross, nämlich $p = \gamma h$ sein, wenn $JM = h$ und γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit ist, als er in einer ruhigen Flüssigkeit auf einen Punct stattfindet, welcher um die Tiefe h unter dem horizontalen Wasserspiegel liegt. (Der atmosphärische Druck ist dabei wieder ausgelassen.) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auch dadurch überzeugen, dass man die auf das Theilchen M in der Richtung QM drückende Kraft, wieder in die zwei ursprünglichen Seitenkräfte KM und LM nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt, wodurch die erstere $= g$, also gerade so wie die Schwerkraft wirkt.

Bildet die Umdrehungsachse CG zugleich die geometrische Achse des Gefässes, welches also gegen diese symmetrisch ist, so heben sich die, in je zwei diametral gegenüberliegenden, gleich weit von der Achse abstehenden Puncten, wirkenden Centrifugalkräfte auf, d. h. die Resultante der aus den sämmtlichen Centrifugalkräften hervorgehenden Pressungen, ist auf die ganze Flüssigkeit gleich Null, folglich äussert sich der Gesammtdruck der Flüssigkeit bloss in verticaler Richtung und es ist dieser gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

214. Um nun den Ausfluss der Flüssigkeit aus dem Gefäss DN (Fig. 112), welches eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse BC besitzt, zu untersuchen, sei, sobald der Beharrungsstand eingetreten, DAE die in der vorigen Nummer bestimmte Parabel der freien Oberfläche der Flüssigkeit und $AB = h$ die Druckhöhe für den Scheitel. Denkt man sich nun in den Puncten B und N des Bodens zwei, im Verhältniss zum Querschnitt des Gefässes, sehr kleine Oeffnungen, setzt $BN = y$ und die Ausflussgeschwindigkeiten in diesen Oeffnungen beziehungsweise $= v$ und V, so ist nach der vorigen Anmerkung die Pressung der Flüssigkeit in diesen Puncten B und N genau so gross wie in einem ruhenden Gefässe, in welchem AB und MN die Druckhöhen sind, also $v^2 = 2g . AB$ und $V^2 = 2g . MN$, oder da $AB = h$ und $MN = NP + PM = h + x = h + \frac{y^2 w^2}{2g}$ (vorige Nummer, Gleichung 1) ist, auch $v = \sqrt{2gh}$ und

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]},$$

oder wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes N, d. i. $yw = u$ setzt, auch $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh + u^2)}$. (Vergleiche §. 426.)

Die Ausflussgeschwindigkeit nimmt also immer mehr zu, je weiter die Oeffnung von der Rotationsachse CB absteht.

Ist für die Seitenöffnung O der Abstand $AR = h'$, jener $OR = Y$ und die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes $O = U$, so ist für diese kleine Seitenöffnung bei unveränderlichem Spiegel der Flüssigkeit die constante, bei veränderlichem Spiegel die momentane Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + \frac{Y^2 w^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh' + U^2)}.$$

Anmerkung 1. Es versteht sich von selbst, dass diese Resultate keine Aenderung erleiden, wenn auch die Oberfläche der Flüssigkeit nicht frei, sondern das Gefäss oben geschlossen ist, so dass sich dieser parabolische Trichter gar nicht bilden kann; immer kommt es dabei auf die Rotations-Geschwindigkeit der Ausflussöffnung an.

Anmerkung 2. Um den Ausfluss aus einer engen Röhre Ef (Fig. 113) zu bestimmen, welche ebenfalls mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse AB umgedreht wird, darf man nur wieder auf das vorige Gefäss zurückgehen und sich vorstellen, dass sich die Flüssigkeit in lauter sehr feinen Fäden oder Canälen von beliebiger Form, wovon MO (Fig. 112) einer sein soll, durch die Ausflussöffnung O ergiesse; dafür war aber, wenn man $Pr = h$ und $RO = y$ setzt, die Ausflussgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]} \ldots (\alpha).$$

Setzt man nun $AP = y'$, ferner $Mr = h'$, d. i. $h' = h + PM = h + \frac{y'^2 w^2}{2g}$ (**213**), so ist $h = h' - \frac{y'^2 w^2}{2g}$, und wenn man auf jeder Seite dieser Gleichung $\frac{y^2 w^2}{2g}$ addirt:

$$h + \frac{y^2 w^2}{2g} = h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g},$$

so dass man die vorige Gleichung (α) auch unter der Form schreiben kann:

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right)\right]}.$$

Dieselbe Gleichung gilt nun aber auch für die erwähnte Röhre in Fig. 113, wenn man darin $AB = h'$, $AC = y'$ und $BD = y$ setzt und dabei den Spiegel EF als unveränderlich voraussetzt.

Hier ist durchaus angenommen worden, dass der, gegen die Oberfläche der Flüssigkeit etwa stattfindende Druck (wie z. B. jener der Atmosphäre) jenem gegen die Ausflussöffnung gleich sei; wäre diess nicht der Fall, sondern der Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche EF (Fig. 113) $= p$ und auf die Ausflussöffnung $ef = p'$, so müsste z. B. die Geschwindigkeit V der letzten Formel aus der Gleichung

$$\gamma \frac{V^2}{2g} = p - p' + \gamma\left[h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right]$$

bestimmt werden, wobei wieder γ das Gewicht der cubischen oder Volumen-Einheit der Flüssigkeit ist.