$DN = x$, $dm = y$, $DB = h$ und $da = h'$; so wird im nächst darauf folgenden Zeitelement dt der erstere noch um dx fallen und der letztere um dy steigen, so dass also, mit Rücksicht darauf, dass x abnimmt, während y zunimmt, oder umgekehrt (wodurch dx und dy entgegengesetzte Zeichen erhalten):

$$A'dy = -A\,dx \text{ und (§. 362) } A\,dx = -a\,dt\sqrt{2g}(x - y).$$

Die erste dieser beiden Gleichungen integrirt gibt

$$A'y = C - Ax,$$

oder da für $x = h$, $y = h'$ sein soll, daher die Constante

$$C = Ah + A'h'$$

wird, auch: $Ax + A'y = Ah + A'h' \ldots (m)$.

Bestimmt man aus dieser Gleichung y, setzt diesen Werth in die zweite der vorigen Differenzial-Gleichungen und integrirt diese, so erhält man:

$$dt = -\frac{A\sqrt{A'}}{a\sqrt{2g}}dx\,[(A + A')x - (Ah + A'h')]^{-\frac{1}{2}}$$

und $$t = C - \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}}\sqrt{[(A + A')x - (Ah + A'h')]},$$

oder da für $t = 0$, $x = h$ sein muss, also die Constante

$$C = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}}\sqrt{[A'(h - h')]} \text{ wird, auch:}$$

$$t = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}}\left[\sqrt{[A'(h - h')]} - \sqrt{[(A + A')x - Ah - A'h']}\right]$$

als diejenige Zeit, während welcher der Wasserspiegel AB bis MN sinkt, oder jener ab bis mn steigt.

Ist nun die gesuchte Zeit, in welcher beide Spiegel gleich hoch stehen $= T$, so muss man, um T zu erhalten, in der vorigen Gleichung $x = y = \frac{Ah + A'h'}{A + A'}$ (aus Gleichung m) setzen; dadurch erhält man, nach gehöriger, einfacher Reduction:

$$T = \frac{2AA'\sqrt{(h + h')}}{a(A + A')\sqrt{2g}},$$

wobei wieder, wenn eine Contraction stattfindet, na statt a zu setzen ist (§. 365).

Ausfluss aus einem Gefäss, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt.

207. Wird das Gefäss AD (Fig. 107), welches eine schwere, incompressible Flüssigkeit enthält, in der Richtung RS mit einer veränderlichen Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t

den Werth v haben soll, fortbewegt; so nimmt die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Lage ab an, welche sich auf folgende Weise bestimmen lässt.

Betrachtet man in der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche irgend einen materiellen Punct M, dessen Masse $= m$ sein soll, so wirken auf diesen nach der Richtung Mf die Schwerkraft mit dem Drucke mg und nach der Richtung MS die bewegende Kraft $m\frac{dv}{dt}$ (Nr. **125**). Um aber den während der Bewegung eintretenden Zustand auf das statische Gleichgewicht zurückzuführen, denke man sich an den Punct M eine der nach MS wirksamen Kraft $m\frac{dv}{dt}$, welcher die wirkliche Bewegung des Flüssigkeitstheilchens entspricht, gleiche Kraft nach gerad entgegengesetzter Richtung von M gegen R $\left(\text{d. i. die Kraft } -m\frac{dv}{dt}\right)$ angebracht, so wird diese, so, als ob das Gefäss keine Bewegung hätte, mit dem ganzen Systeme im Gleichgewichte stehen. (M. s. die nachstehende Anmerkung.)

Ist also $Mf = mg$ und $Mn = Mn' = m\frac{dv}{dt}$, so wird die Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit, sowie die ihrer Niveauschichten (Nr. **169**) der Bedingung entsprechen müssen, dass die Flüssigkeit unter der Einwirkung der beiden Kräfte Mn und Mf oder ihrer Resultirenden Md auf jedes ihrer Theilchen von der Masse m im Gleichgewichte bleibe; dieses findet aber (**169**) statt, wenn der Spiegel ab, sowie alle Niveauschichten auf dieser Resultirenden Md perpendikulär stehen.

Anmerkung. Das hier angewendete Verfahren, um die Aufgabe der Bewegung auf eine Aufgabe des Gleichgewichtes zurückzuführen, beruht auf dem allgemeinen (in Nr. 131, in dem Satze 14. erwähnten) Bewegungsgesetz welches nach seinem Erfinder das *d'Alembert*'sche Princip genannt wird und in folgendem besteht.

Wirken auf ein System von materiellen Puncten, deren Massen m, m', m'' .. sein sollen und wovon sich keiner frei oder so bewegen kann, dass er durch seine Bewegung nicht auch zugleich die der übrigen Puncte mit affiziren müsste, beziehungsweise die Kräfte p, p', p'' ... in diese Massen m, m', m'' .. ein; so wird im Allgemeinen von jeder dieser Kräfte nur ein Theil auf die wirkliche Bewegung der Massen m, m' .. (in so weit diese letztere nämlich durch die wechselseitige Verbindung dieser Puncte möglich wird) verwendet, während der andere Theil durch das Verbindungssystem gerade so aufgehoben oder vernichtet wird, wie es der Fall sein würde, wenn sich diese letzteren Theile der Kräfte an dem Systeme im Gleichgewichte befänden.

Nimmt man nun an, dass durch die genannte Einwirkung der Kräfte p, p' .. die Massen m, m' .. eine Bewegung annehmen, wodurch sie in der Zeiteinheit, und zwar in dem Augenblicke als man das System betrachtet, die Beschleunigungen s, s', s'' .. erhalten; so sind die zuerst genannten Theile der Kräfte p, p' .. welche die wirkliche Bewegung der Massen hervorbringen ms, $m's'$, $m''s''$ ... und man kann diese Theile die wirksamen Kräfte des Systemes nennen. Die übrigen Theile der auf das System wirkenden Kräfte, welche sofort durch die Widerstandsfähigkeit der Verbindungen der einzelnen Massen vernichtet werden, befinden sich, wie bereits erwähnt, mit den Widerständen der Verbindungs- oder Verknüpfungsbänder, wenn man sich solche vorstellen will, im Gleichgewichte.

Bleiben sich also diese Widerstände gleich, es mag das System in der Ruhe oder in Bewegung sein, so ist klar, dass wenn man auf die Massen m, m' .. noch Kräfte anbringt, welche den wirksamen Kräften gleich, diesen aber gerade entgegengesetzt sind, d. i. wenn man noch beziehungsweise die Kräfte $-ms$, $-m's'$, $-m''s''$ ... an den Massen m, m' .. des Systemes anbringt, diese mit den Kräften p, p', p'' ... zusammen, das System in den Zustand der Ruhe (oder nach einem Anstoss, der gleichförmigen Bewegung) versetzen müssen.

Da dieses *d'Alembert*'sche Princip, oder eigentlicher dieser Lehrsatz, auch noch in anderer Art ausgesprochen wird, so denke man sich die Kraft p, welche in der Masse m, wenn sie frei, also mit den übrigen Puncten nicht verbunden wäre, in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit v erzeugen soll, also als bewegende Kraft durch mv ausgedrückt werden kann, in die zwei Seitenkräfte ms und mf zerlegt; so ist nach der obigen Voraussetzung, ms der wirksame und mf der verlorne Theil davon auf das System. Bezeichnen $m's'$ und $m'f'$, $m''s''$ und $m''f''$ u. s. w. dasselbe für die übrigen Kräfte p', p'' ...; so folgt nach dem, was oben bemerkt wurde, dass $mf + m'f' + m''f'' + .. = 0$ ist, und da folglich einige dieser Glieder negativ sein müssen, die man im Gegensatze zu den verlornen Kräften gewonnene nennen kann, so kann man entweder sagen, dass die in jedem Augenblicke verloren gehenden Kräfte sich aufheben oder im Gleichgewichte stehen, oder auch dass sich in jedem Systeme die vorlornen und gewonnenen Kräfte der verschiedenen materiellen Puncte das Gleichgewicht halten müssen, in welcher Form dieser Satz eigentlich nichts anderes als die Anwendung des allgemeinen Principes ist: dass Wirknng und Gegenwirkung einander immer gleich und entgegengesetzt sind.

Da man jede Seitenkraft wie mf ebenfalls als eine Mittelkraft, und zwar aus $p = mv$ und $-ms$ ansehen kann, so lässt sich in der vorigen Bedingungsgleichung $mf + m'f' + .. = 0$ jede dieser verlornen Kräfte durch die eben genannten gleichgeltenden Kräfte p und $-ms$, p' und $-m's'$ u. s. w. ersetzen, wodurch man wieder auf die ursprünglich ausgesprochene Form dieses Satzes kommt, in Folge welcher zwischen den gegebenen

Kräften, welche auf die säummtlichen materiellen Puncte eines in Bewegung befindlichen Systemes wirken, und jenen Kräften, welche in jedem Augenblicke die unendlich kleinen Geschwindigkeitsveränderungen in den materiellen Puncten hervorbringen, diese letzteren Kräfte jedoch nach entgegengesetzten Richtungen oder mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, fortwährend Gleichgewicht bestehen muss. Nach der gewählten Bezeichnungsart würde die Kraft p oder mv in dem materiellen Puncte m, wenn er frei wäre, in der unendlich kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit vdt erzeugen, während die wirkliche Zunahme an Geschwindigkeit in dieser Zeit $= s\, dt$, und deren Richtung im Allgemeinen von jener der Geschwindigkeit $v\, dt$ verschieden ist.

208. Um nun die Richtung dieser Ebenen, wie jene ab zu bestimmen, sei der Winkel bMB, welchen die Ebene ab mit dem Horizonte bildet $= \varphi$, und der Winkel fMS, welchen die Bewegungslinie RS des Gefässes mit der lothrechten Linie bildet $= \alpha$, so ist, wenn man $Mn = m\frac{dv}{dt}$ und $Mf = mg$ abschneidet und das Parallelogramm nf construirt, endlich die Resultirende Md durch Q bezeichnet, ganz einfach:

$$Q\, Sin\, \varphi = m\frac{dv}{dt} . Sin\, \alpha,$$

und wenn de parallel zu AB ist, wegen

$$Me = Q\, Cos\, \varphi = Mf - ef = mg - df . Cos\, \alpha,$$

auch: $$Q\, Cos\, \varphi = mg - m\frac{dv}{dt} Cos\, \alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man mit m abkürzt:

$$tang\, \varphi = \frac{\frac{dv}{dt} Sin\, \alpha}{g - \frac{dv}{dt} Cos\, \alpha} \ldots (1)$$

und $$Q = m\sqrt{\left[g^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 2g\frac{dv}{dt} Cos\, \alpha\right]} \ldots (2).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sobald die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, also überhaupt eine gleichförmig veränderliche ist, wofür bekanntlich (Nr. **122**) der Quotient $\frac{dv}{dt}$ eine constante Grösse ist, die beiden Grössen α und Q in Beziehung zur Zeit constant sind und daher auch die Flüssigkeit gegen das Gefäss eine unveränderte Lage beibehält.

Da bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{dv}{dt} = 0$ ist, so wird dafür $tang\, \varphi$, also auch $\varphi = 0$ und $Q = mg$ gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, zum Beweis, dass sich die Flüssigkeit dabei gerade so verhält, als wenn das Gefäss in der Ruhe wäre.

209. Bezeichnet man den Wurzelausdruck der vorigen Gleichung (2) mit u, so ist auch $Q = mu$ oder die nach Md wirksame Resultirende Q ist im Stande, dem Theilchen von der Masse m in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit u mitzutheilen. Da nun dasselbe auch für alle übrigen Flüssigkeitstheilchen gilt, so folgt, dass die Wirkung dieser Kraft Q ganz ähnliche oder analoge Erscheinungen auf die bewegte Flüssigkeit hervorbringt, wie die Schwerkraft auf eine ruhende Flüssigkeit, und da diese letztere Kraft durch $Q = mg$ ausgedrückt wird und lothrecht wirkt, so darf man nur u oder den genannten Wurzelausdruck statt g setzen und berücksichtigen, dass die Richtung dieser Kraft Md ist, um alle aus der Einwirkung der Schwere auf eine ruhende Flüssigkeit stattfindenden Erscheinungen auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

Der genannte Wurzelausdruck ist auch:

$g\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt} \operatorname{Cos}\alpha\right]}$ und da, wenn μ die Dichte der Flüssigkeit, also $\mu g = \gamma$ das Gewicht der cubischen Einheit derselben bezeichnet, so kann man auch bei dieser Umwandlung $\gamma\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt} \operatorname{Cos}\alpha\right]}$ statt γ setzen.

Liegt z. B. ein Punct m in perpendikulärer Richtung gegen den Spiegel ab um die Tiefe $Mm = h$ unter der Oberfläche, so hat man für den in diesen Punct auf die Flächeneinheit stattfindenden hydraulischen Druck:

$$p = p' + \gamma h \sqrt{U} \ldots (3),$$

wenn nämlich p' den auf den Spiegel stattfindenden atmosphärischen Druck und $\sqrt{U}$ Kürze halber den letzteren Wurzelausdruck bezeichnet.

Endlich ist der Gesammtdruck P, welchen die ganze Flüssigkeit gegen das Gefäss ausübt und sich wie eine durch den Schwerpunct der Flüssigkeit nach der Richtung Md wirksame Kraft äussert, wenn man die Masse der ganzen Flüssigkeit durch M und ihr Gewicht durch Q' bezeichnet, sofort:

$$P = Mg\sqrt{U} = Q'\sqrt{U} \ldots (4),$$

wobei $\sqrt{U}$ den genannten Wurzelausdruck bedeutet.

210. Beispiele. 1. Gleitet z. B. das bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllte Gefäss DEF (Fig. 108) über die schiefe Ebene AB, also mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab, und ist der Neigungswinkel $ABC = \beta$, so hat man wegen

(§. 187) $v = gt\,Sin\,\beta$ sofort $\frac{dv}{dt} = g\,Sin\,\beta$ und ausserdem $\alpha = 90^0 - \beta$, folglich nach der Relation (1) in **208**:

$$tang\,\varphi = \frac{g\,Sin\,\alpha\,Sin\,\beta}{g - g\,Sin\,\beta\,Cos\,\alpha} = \frac{Cos\,\beta\,Sin\,\beta}{1 - Sin^2\,\beta} = \frac{Sin\,\beta}{Cos\,\beta} = tang\,\beta,$$

oder $\varphi = \beta$, d. h. der Wasserspiegel stellt sich bei dieser Bewegung parallel mit der schiefen Ebene AB.

Da ferner der obige Wurzelausdruck:

$$\sqrt{U} = \sqrt{(1 + Sin^2\,\beta - 2\,Sin^2\,\beta)} = \sqrt{(1 - Sin^2\,\beta)} = Cos\,\beta$$

ist, so hat man für den hydraulischen Druck p in einem Puncte m, welcher um die Tiefe $Mm = h$ unter dem Wasserspiegel liegt (Mm perpendikulär auf AB) nach der Formel (3) (Nr. **209**) $p = p' + \gamma h\,Cos\,\beta$, oder wenn man p' auslässt, $p = \gamma h\,Cos\,\beta$, so wie endlich den Gesammtdruck der Flüssigkeit normal auf AB, nach der Formel (4), $P = Q'\,Cos\,\beta$, gerade so als ob ein starrer Körper vom Gewichte Q' auf der schiefen Ebene läge oder herabglitte.

2. Wird das Gefäss mit gleichförmig beschleunigter Bewegung nach horizontaler Richtung fortgetrieben, so wird wegen $\alpha = 90^0$, wenn man $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, $tang\,\varphi = \frac{a}{g}$ und

$$p = p' + \gamma h \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)} = p' + \gamma h \sqrt{(1 + tang\,\varphi^2)} = p' + \gamma\,\frac{h}{Cos\,\varphi}$$
$$= p' + \gamma h',$$

wenn man nämlich durch den Punct m die lothrechte Linie mn (Fig. 109) bis zum Wasserspiegel zieht und ihre Länge $= h'$ setzt. Der in irgend einem Puncte m stattfindende hydraulische Druck ist also eben so gross, wie der hydrostatische Druck, welcher bei einer ruhenden Flüssigkeit auf den um die verticale Tiefe $nm = h'$ unter dem Spiegel liegenden Punct stattfinden würde.

Der Gesammtdruck ist in einer auf den Wasserspiegel ab perpendikulären Richtung nach der Formel (4), $P = Q' \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)}$.

3. Wird das Gefäss mit gleichförmig beschleunigter Bewegung vertical aufwärts bewegt, so hat man $\alpha = 180^0$ zu setzen; dadurch wird (Nr. **208**) $tang\,\varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, zum Beweis, dass in diesem Falle der Spiegel der Flüssigkeit horizontal bleibt.

Da ferner, wenn man wieder $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, der obige Wurzelausdruck $\sqrt{U} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2} + 2\frac{a}{g}\right)} = 1 + \frac{a}{g}$ wird, so erhält man für den hydraulischen Druck in der Tiefe h unter der Oberfläche (mit Auslassung des atmosphärischen Druckes, der sich von selbst versteht) $p = \gamma h \left(1 + \frac{a}{g}\right)$, sowie für den Gesammtdruck in verticaler Richtung, $P = Q' \left(1 + \frac{a}{g}\right)$.

Wäre die Beschleunigung bei dieser Bewegung gerade gleich jener der Schwere, nämlich $= g$, so wäre $v = gt$ und $\frac{dv}{dt} = a = g$, folglich $p = 2\gamma h$ und $P = 2Q'$, also der Druck gerade doppelt so gross, als wenn das Gefäss ruhte.

4. Wird endlich das Gefäss vertical abwärts bewegt, und zwar wieder gleichförmig beschleunigt, so wird $\alpha = 0$ und daher $tang\,\varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, so dass sonach der Spiegel wieder horizontal bleibt; ferner ist $p = \gamma h \left(1 - \frac{a}{g}\right)$ und $P = Q' \left(1 - \frac{a}{g}\right)$.

Liesse man in diesem Falle das Gefäss sammt der Flüssigkeit frei herabfallen, so würde wieder $\frac{dv}{dt} = a = g$ und daher $p = 0$ (oder eigentlich $p = p'$) und $P = 0$, so dass also der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen das Gefäss, wie man voraus weiss, Null ist.

211. Es lässt sich jetzt auch leicht die Ausflussmenge bestimmen, wenn das bisher betrachtete Gefäss ABE (Fig. 110) mit einer kleinen Boden- oder Seitenöffnung C, deren Querschnitt $= a$ sein soll, versehen ist.

Ist nämlich ab die nach Nr. **208** bestimmte Lage des Spiegels der Flüssigkeit und $CD = h$ der perpendikuläre Abstand des Mittelpunctes der Ausflussöffnung von der Oberfläche ab der Flüssigkeit, so darf man in den früheren Nummern, welche von dem Ausflusse handeln, wenn nur die geradlinige Bewegung des Gefässes gleichförmig beschleunigt, also der Quotient $\frac{dv}{dt} = A$ constant, folglich der obige Wurzelausdruck in Nr. **209**, den wir Kürze halber mit $\sqrt{U}$ bezeichnen wollen und

$$= \sqrt{\left[1 + \frac{A^2}{g^2} - 2\,\frac{A}{g}\,Cos\,\alpha\right]}$$

wird, nur statt der Richtung der Schwere die auf den Spiegel ab perpendikuläre Richtung, und statt ihrer Intensität g jene $g\sqrt{U}$

nehmen, wodurch dann auch das Gewicht γ der cubischen Einheit in $\gamma\sqrt{U}$ übergeht.

Man erhält dadurch, wenn der Spiegel ab unveränderlich ist, für die constante Ausflussgeschwindigkeit V, oder wenn dieser allmählich herabsinkt, für die momentane Ausflussgeschwindigkeit nach §. 344 oder Nr. **198**:

$$V = \sqrt{[2gh\sqrt{U}]},$$

also für die in der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeitsmenge, wenn keine Contraction stattfindet, $M = aV = a\sqrt{[2gh\sqrt{U}]}$, oder wenn n der Contractions-Coefficient ist: $M = naV$.

Da V die relative Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit gegen das Gefäss ist, so muss man, um die absolute Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeitstheilchen zu erhalten, aus den beiden Geschwindigkeiten v und V des Gefässes und der ausströmenden Flüssigkeit die Resultirende suchen.

212. Beispiele. 1. Gleitet das Gefäss z. B. über eine absolut glatte schiefe Ebene, deren Neigungswinkel $= \beta$ ist, herab, so hat man wegen (Nr. **210**) $\frac{dv}{dt} = g Sin \beta$ und $\alpha = 90^0 - \beta$, folglich $\sqrt{U} = Cos \beta$, sofort die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{(2gh Cos \beta)}.$$

2. Wird das Gefäss vertical auf- oder abwärts bewegt, wobei also (Nr. **210**, 3, 4) der Flüssigkeitsspiegel horizontal bleibt, so erhält man wegen $\alpha = 180^0$ oder 0, also $\sqrt{U} = 1 \pm \frac{A}{g}$ für beide Fälle:

$$V = \sqrt{\left[2gh\left(1 \pm \frac{A}{g}\right)\right]},$$

wobei das obere Zeichen für die aufwärts, das untere für die abwärts gerichtete Bewegung gilt.

Für den besonderen Fall von $\frac{dv}{dt} = A = g$, würde beziehungsweise $V = \sqrt{4gh}$ und $V = 0$, so dass also bei dieser raschen Bewegung nach aufwärts die Ausflussgeschwindigkeit im Verhältniss von $1 : \sqrt{2}$ grösser als im Zustande der Ruhe wäre.

Wäre endlich die Bewegung gleichförmig, also $\frac{dv}{dt} = A = 0$ und $\sqrt{U} = 1$, so wäre der Spiegel horizontal und $V = \sqrt{2gh}$, gerade so wie im Zustande der Ruhe.