## Ausfluss aus communicirenden Gefässen.

**192.** Sind mit einem oben offenen Gefässe $AN$ (Fig. 98) mehrere verschlossene Gefässe von beliebiger Weite mit einander verbunden und communiciren diese durch die Oeffnungen $a_n$, $a_{n-1}, \ldots a_2$ mit einander; so lässt sich die aus der untersten Oeffnung $a_1$ ausfliessende Flüssigkeit, z. B. Wasser, sobald alle Gefässe gefüllt sind und der Beharrungsstand eingetreten ist, ferner unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Wasserspiegels $AB$ auf folgende Weise bestimmen.

Es seien von unten hinauf gezählt $a_1$, $a_2$, $a_3, \ldots a_n$ die Ausflussöffnungen, und zwar wenn Contractionen stattfinden, im kleinsten Querschnitt genommen; $v_1$, $v_2, \ldots v_n$ die in diesen Querschnitten stattfindenden Aus- oder Durchflussgeschwindigkeiten, $h_1$, $h_2, \ldots h_n$ die zugehörigen Höhen; $A_1$, $A_2, \ldots A_n$ die Querschnitte der Gefässe in $CD$, $EF, \ldots MN$, in welchen sich die Mündungen $a_1, a_2, \ldots a_n$ befinden; $V_1, V_2, \ldots V_n$ die Geschwindigkeiten der Wasserschichten in diesen Querschnitten, sowie $H_1$, $H_2, \ldots H_n$ die zugehörigen Höhen; so hat man nach der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$v_2 = \frac{a_1}{a_2} v_1, \quad v_3 = \frac{a_1}{a_3} v_1, \ldots v_n = \frac{a_1}{a_n} v_1, \quad V_1 = \frac{a_1}{A_1} v_1, \quad V_2 = \frac{a_1}{A_2} v_1, \ldots$$

$$V_n = \frac{a_1}{A_n} v_1, \quad h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g}, \ldots h_n = \frac{v_n^2}{2g}, \quad H_1 = \frac{V_1^2}{2g}, \ldots H_n = \frac{V_n^2}{2g}.$$

Um aber die Wasserschichte in $CD$ oder $A_1$ von der Geschwindigkeit $V_1$ auf jene $v_1$ zu bringen, ist die Druckhöhe $\frac{v_1^2 - V_1^2}{2g} = h_1 - H_1$ nothwendig; ebenso sind $h_2 - H_2, \ldots h_n - H_n$ die erforderlichen Druckhöhen, um die Wasserschichten $A_2, \ldots A_n$ von den Geschwindigkeiten $V_2, \ldots V_n$ auf jene $v_2, \ldots v_n$ zu bringen; da endlich, um der über der obersten Oeffnung $a_n$ stehenden Schichte $A_n$ die Geschwindigkeit $V_n$ zu ertheilen, noch ausserdem die Geschwindigkeitshöhe $H_n$ nothwendig ist; so hat man, wenn die ganze Druckhöhe $BS = h$ gesetzt wird, sofort:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n - (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) + H_n,$$

oder wenn man auf die Geschwindigkeiten übergeht und annimmt, dass der Druck auf die Oberfläche $AB$ und gegen die Oeffnung $a_1$ (auf die Flächeneinheit) beziehungsweise durch die Wassersäulenhöhen $h'$ und $h''$ ausgedrückt wird, auch (nach der gewöhnlichen Ansicht):

$$h + h' - h'' = \frac{1}{2g}[v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 - (V_1^2 + V_2^2 + \ldots V_n^2) + V_n^2],$$

oder wenn man auch noch für $v_2, \ldots v_n, V_1, V_2, \ldots V_n$ die vorigen Werthe setzt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left\{\left(\frac{a_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{A_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right\} + \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right],$$

oder nach der kürzeren üblichen Bezeichnung, wenn man noch $a_1^2$ als Factor nimmt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}\right] \ldots (\delta).$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$v_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\left[\frac{2g(h + h' - h'')}{\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}}\right]}$$

wobei für gewöhnlich $h' = h''$ gesetzt werden kann.

Endlich ist die per Secunde ausfliessende Wassermenge $M = a_1 v_1$.

Anmerkung. Nach einer anderen von Navier ausgehenden Ansicht kann man auch folgenden Weg einschlagen.

Verfolgt man die am Wasserspiegel $AB$ befindliche Schichte vom Querschnitt $A$ und unendlich kleiner Höhe, deren unendlich kleine Masse mit $m$ bezeichnet werden soll, bei ihrer Bewegung bis zur Ausflussöffnung $a_1$, wo diese Masse die Geschwindigkeit $v_1$ erhält, während sie in $AB$ nur jene $\frac{a_1}{A} v_1$ besitzt, so ist zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeitsänderung die Wirkungsgrösse (§. 227):

$$W = \frac{m}{2g}\left(v_1^2 - \frac{a_1^2}{A^2} v_1^2\right) = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

erforderlich.

Da ferner diese Masse $m$, nachdem sie die Oeffnung $a_n$ passirt hat, plötzlich durch die vorhandene Erweiterung von der Geschwindigkeit $v_n$ auf die kleinere $V_n$ und zwar indem die unendlich kleine Masse $m$ auf die endliche, unter $MN$ befindliche Wassermasse $M$ stösst, gebracht wird, so entsteht, wie bei dem Stosse unelastischer Körper, wobei $m$ gegen $M$ verschwindet (§. 243), ein Verlust an lebendiger Kraft $= m(v_n - V_n)^2$ oder an Wirkungsgrösse

$$= \frac{m}{2g}(v_n - V_n)^2 = \frac{m}{2g}\left(\frac{a_1}{a_n} v_1 - \frac{a_1}{A_n} v_1\right)^2 = \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A_n}\right)^2.$$

Auf gleiche Weise ist der Verlust an Wirkungsgrösse, beim Durchgange der genannten Schichte oder Masse $m$ durch die Oeffnungen $a_{n-1}, \ldots a_2$

wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen von $v_{n-1}$ in $V_{n-1}, \ldots v_2$ in $V_2$, sofort:

$$\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{A_{n-1}}\right)^2, \ldots \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2$$

so dass man die Summe aller dieser Verluste an Arbeit oder Wirkung durch $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2$ ausdrücken kann, welche von der Arbeit oder Wirkung $mh$ der von der Höhe $BS = h$ herabsinkenden Wasserschichte $m$ abgezogen die obige Wirkungsgrösse $W$ als Rest gibt; man hat nämlich:

$$mh - \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2 = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1-\frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

und daraus folgt, wenn man auch wieder wie oben $h + h' - h''$ statt $h$ setzt:

$$v_1 = \sqrt{\left[\frac{2g(h+h'-h'')}{1-\frac{a_1^2}{A^2}+a_1^2\,\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2}\right]}.$$

Diese hier entwickelten Gleichungen gelten übrigens auch für eine in Fig. 99 dargestellte Anordnung der Gefässe.

**193.** Communiciren mehrere oben offene Gefässe $AK$, $BL$, $DM$, .. (Fig. 100) mit einander durch die Seitenöffnungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche im Vergleiche zur Grösse der Gefässe so klein sein sollen, dass die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser zu den Oeffnungen gelangt, vernachlässigt werden können, so findet man die im Beharrungsstande aus der letzten Oeffnung $a_n = a$ ausfliessende Wassermenge, die also auch in gleicher Zeit in das erste Gefäss wieder zufliessen muss, auf folgende Art.

Es sei $M$ die in jeder Secunde in das erste Gefäss $AK$ zufliessende Wassermenge, ferner der Beharrungsstand bereits eingetreten, so dass also eine gleiche Wassermenge $M$ per Secunde aus einem Gefässe in das andere überfliesst und daher die Wasserspiegel $AB$, $CD$, $EF$, .. zu einem unveränderlichen Stande gelangt sind; in diesem Zustande seien die Druckhöhen $BC = h_1$, $DE = h_2$, $FG = h_3, \ldots$, sowie die lothrechte Höhe des Wasserspiegels $AB$ über der Mitte der letzten Ausflussöffnung $a$ (oder wenn auch diese unter Wasser ausmündet, bis zum Spiegel des Unterwassers) $= h$, so hat man nach §. 353 die theoretischen Ausflussmengen per Secunde der Reihe nach $M_1 = a_1\sqrt{2gh_1}$, $M_2 = a_2\sqrt{2gh_2}$, $M_3 = a_3\sqrt{2gh_3}, \ldots$ und daraus wegen $M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M$ die Druckhöhen:

$$h_1 = \frac{M^2}{2ga_1^2},\; h_2 = \frac{M^2}{2ga_2^2}, \ldots$$

Da nun $h_1 + h_2 + h_3 + .. = h$ ist, so folgt:

$$h = \frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \ldots + \frac{1}{a^2}\right),$$

folglich:

$$M = \sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + .. + \frac{1}{a^2}}\right)}.$$

Sind alle Oeffnungen gleich gross, nämlich $= a$, und ihre Anzahl $= n$, so erhält man:

$$M = a\sqrt{\left(\frac{2gh}{n}\right)},$$

so dass also bei derselben Druckhöhe $h$ die ausfliessende Wassermenge $M$ um so kleiner wird, je grösser $n$, d. i. die Anzahl der Oeffnungen ist.

Anmerkung 1. Um (im Falle die Oeffnungen nicht so erweitert und abgerundet sind, dass keine Contraction stattfindet) die Contraction dabei zu berücksichtigen, muss man wieder $m_1 a_1$, $m_2 a_2$, .. $ma$ statt $a_1$, $a_2$, .. $a$ setzen, wenn $m_1$, $m_2$, .. $m$ die entsprechenden Coefficienten sind.

Anmerkung 2. Münden die oben geschlossenen Gefässe, wie in Fig. 99 $a$, ohne Zwischenwände ineinander ein und nehmen diese in der Weite vom ersten bis zum letzten immer mehr ab, so dass das letzte Gefäss das engste ist, so darf man in der obigen Formel ($\delta$) (Nr. **192**) nur $a_1 = a_2 = A_1$, $a_3 = A_2$, $a_4 = a_n = A_3 = A_{n-1}$ setzen. Man erhält dadurch, $h' = h''$ genommen:

$$h = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_4^2}\right] = \frac{v_1^2}{2g},$$

so dass also die Zwischengefässe auf die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe der letzten Ausflussöffnung $a_1$ keinen Einfluss haben, oder die einmal gewonnene Geschwindigkeit nicht mehr verloren geht.

Befindet sich dagegen, wie in Fig. 99 $b$, zwischen dem letzten Gefäss ein engeres, so dass man für die dargestellte Anordnung $a_1 = A_1$, $a_2 = a_3 = A_2$ und $a_4 = A_3$, folglich aus der genannten Formel $h = \frac{v_1^2}{2g}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ erhält, so folgt, weil $\frac{a_1}{a_2} v_1$ die der Ausflussöffnung $a_2$ entsprechende Geschwindigkeit ist, dass die erforderliche Druckhöhe $h$ nicht nach der, der letzten Ausflussöffnung $a_1$, sondern nach jener, der engsten Oeffnung $a_2 = a_3$ zukommenden Geschwindigkeit, wovon wieder ein Theil verloren geht, bemessen oder bestimmt werden muss.

## Seitenausfluss bei geringen Druckhöhen.

(§. 354.)

**194.** Befindet sich die Ausflussöffnung in einer verticalen Wand und denkt man sich die Oeffnung in unendlich viele und schmale horizontale Streifen getheilt, so wird für einen solchen,