Zweiter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Allgemeine Gleichungen der Bewegung.

186. Bewegen sich Flüssigkeiten unter dem Einflusse beliebiger Kräfte, so können die dabei eintretenden Gesetze durch Gleichungen ausgedrückt werden, die sich ganz allgemein in folgender Weise entwickeln lassen.

Man denke sich wieder, wie in Nr. **166**. die tropfbar- oder elastisch-flüssige Masse in unendlich kleine rechtwinkelige Parallelopipede parallel zu den 3 Coordinatenachsen AX, AY, AZ (Fig. 83) zerlegt, bezeichne auf diese bezogen die Coordinaten irgend eines Punctes M im Raume oder in der Flüssigkeit durch x, y, z und nehme an, dass das unendlich kleine Parallelopiped Mf eben durch diesen Punct M mit irgend einer Geschwindigkeit durchfliesse oder sich fortbewege. Diess angenommen seien u, v, w die Componenten dieser Geschwindigkeit nach den Achsen der x, y, z, sowie X, Y, Z die nach denselben Achsen genommenen 3 Componenten der auf dieses Element Mf wirkenden äusseren oder beschleunigenden Kräfte, diese nämlich auf die Einheit der Masse bezogen; ferner sei ϱ die Dichte und p der Druck oder die Pressung, welche in diesem Puncte M der Flüssigkeit stattfindet, und zwar letztere auf die Flächeneinheit verstanden.

Sind nun die Coordinaten des Punctes M, sowie die auf das Flüssigkeitselement Mf einwirkenden Kräfte gegeben, so handelt es sich um die Bestimmung der Geschwindigkeit, Dichte und Pressung in diesem Puncte, wozu sofort die folgenden Betrachtungen führen.

1. Die Seitengeschwindigkeiten oder Componenten u, v, w sind nicht bloss von den Coordinaten x, y, z, sondern zugleich

auch von der Zeit t abhängig, d. h. man muss bei Betrachtung der Veränderung der Geschwindigkeit, welche ein Element bei der Bewegung von einem Punct zum nächstfolgenden erfährt, im Allgemeinen die Grössen u, v, w als Functionen von x, y, z, t ansehen.

2. Ebenso sind sowohl ϱ und p, als auch allgemein genommen die Componenten X, Y, Z Functionen von den nämlichen 4 Variabeln x, y, z, t.

3. Ist die Masse des angenommenen Elementes oder Parallelopipedes Mf sofort $\mathrm{d}m = \varrho \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, sowie die darauf einwirkenden bewegenden Kräfte nach den 3 Coordinatenachsen $X\mathrm{d}m$, $Y\mathrm{d}m$, $Z\mathrm{d}m$.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen bildet man die allgemeinen Gleichungen der Bewegung wieder mit Anwendung des Satzes in Nr. **131**, 5., nach welchem die Summe der nach einer der Achsen wirksamen Componenten aus allen auf das Element Mf wirkenden Kräften gleich ist der Masse dieses Elementes, multiplicirt mit der nach dieser Achse genommenen Beschleunigung (d. i. der Projection der Geschwindigkeit des Elementes auf diese Achse).

Berücksichtigt man nun zuerst die Achse der x, so sind die erwähnten Componenten, oder die nach dieser Achse wirksamen Kräfte erstens die bewegende Kraft $X\mathrm{d}m = X\varrho \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, ferner der auf das Element Mf von aussen nach innen auf die Fläche Md wirkende Druck $p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ der das Element umgebenden Flüssigkeit (in positiver), sowie endlich der auf die entgegengesetzte Fläche af stattfindende Gegendruck $\left[p + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ (in negativer Richtung).

Was ferner die nach dieser Achse stattfindende Beschleunigung u, d. i. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ betrifft, so muss man berücksichtigen, dass diese eine Function der 4 Variabeln t, x, y, z ist, indem bei dem Uebergange des Elementes Mf von der Position in M zu einer nächstfolgenden, dessen Geschwindigkeit nicht bloss mit der Zeit t, sondern auch mit dem Orte, d. i. den Coordinaten x, y, z variirt; der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ bezeichnet sonach das Differentiale von u nicht bloss nach der absolut oder unabhängig Variabeln t, sondern auch nach den Variabeln x, y, z, welche selbst implicite Functionen von t sind, weil sich diese auf keinen festen Punct im Raume, sondern auf eine Position beziehen, die sich mit der Zeit t ändert. Der wahre Ausdruck für diese Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ ist demnach (Comp. §. 656, Anmerkung):

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dt}.$$

Nun ist aber (Nr. **120**) $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit des Parallelopipedes Mf nach der Achse der x, also $= u$, und ebenso sind $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ die Geschwindigkeiten nach den beiden übrigen Achsen, so dass mit Rücksicht darauf der vorige Ausdruck auch die Form erhält:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Es ist daher endlich zufolge des erwähnten Satzes die Gleichung der Bewegung für das Element Mf nach dieser Achse der x:

$$X\varrho\, dx\, dy\, dz + p\, dy\, dz - \left[p + \left(\frac{dp}{dx}\right)dx\right]dy\, dz$$
$$= \varrho\, dx\, dy\, dz\left[\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)\right],$$

oder reducirt:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dx}\right) = X - \left(\frac{du}{dt}\right) - u\left(\frac{du}{dx}\right) - v\left(\frac{du}{dy}\right) - w\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Da man aber für die beiden übrigen Coordinatenachsen der y und z zwei mit dieser ganz analoge Gleichungen erhält, so hat man fürs erste die 3 folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dx}\right) &= X - \left(\frac{du}{dt}\right) - u\left(\frac{du}{dx}\right) - v\left(\frac{du}{dy}\right) - w\left(\frac{du}{dz}\right)\\
\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dy}\right) &= Y - \left(\frac{dv}{dt}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right) - v\left(\frac{dv}{dy}\right) - w\left(\frac{dv}{dz}\right)\\
\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dz}\right) &= Z - \left(\frac{dw}{dt}\right) - u\left(\frac{dw}{dx}\right) - v\left(\frac{dw}{dy}\right) - w\left(\frac{dw}{dz}\right)
\end{aligned}\right\}\ldots(1).$$

187. Da wir im Allgemeinen 5 unbekannte Grössen: ϱ, p, u, v, w zu bestimmen haben, so lösen diese eben gefundenen 3 Gleichungen unsere Aufgabe noch nicht vollständig auf, und es fehlen uns daher noch 2 Gleichungen. Diese fehlenden Gleichungen erhalten wir jedoch aus der bis jetzt noch nicht berücksichtigten Bedingung der Continuität des Flüssigen, d. i. aus der Bedingung, dass die Aufeinanderfolge der Flüssigkeits-Elemente eine zusammenhängende Masse bilden, diese Elemente sich also während der Bewegung von einander nicht trennen oder losreissen.

Um aber diese Bedingung auszudrücken, nehmen wir zuerst den einfacheren Fall an, dass sich die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M, während des Durchganges der Theilchen nicht ändere, dass also der Raum des unendlich kleinen Parallelopipedes Mf, durch welches der Reihe nach die verschiedenen Flüssigkeitstheilchen durchgehen, fortwährend von einer gleich grossen Masse erfüllt werde. In diesem Falle würde daher, wenn sich die kleinen Parallellopipede oder Elemente parallel mit der Achse der x bewegten, aus dem Parallelopiped durch die Seite af eine eben so grosse Masse austreten als gleichzeitig durch die Seite Md in dasselbe eintritt.

Aendert sich dagegen während der Bewegung im Puncte M die Dichte der Flüssigkeit, nimmt diese z. B. continuirlich zu, so kann man sich vorstellen oder annehmen, dass die Zunahme der Masse in diesem Parallelopiped Mf (in Folge der Zunahme der Dichte) dadurch entsteht, dass gleichsam ein Theil der durch die Seite Md eintretenden Masse im Parallelopiped zurückgehalten wird, also in irgend einem beliebigen Augenblicke durch die Seite af des kleinen Parallelopipedes weniger Masse austritt als gleichzeitig durch die Seite Md eintritt. (Das Umgekehrte hätte man sich vorzustellen, wenn die Dichte der Flüssigkeit abnehmen würde.) Bei dieser Annahme müsste dann die Differenz zwischen dem Ein- und Austritt aus diesem Parallelopiped genau der Zunahme der Flüssigkeitsmasse oder der Dichte entsprechen.

Nun ist aber der Gewinn an Masse, welcher in dem Parallelopiped Mf während der Zeit dt entsteht, offenbar gleich dem Volumen $dx\,dy\,dz$ multiplicirt mit der Zunahme der Dichte in dieser Zeit, eine Zunahme, welche durch das Differenziale von ϱ, dieses bloss nach t genommen, ausgedrückt wird; dieser Gewinn ist nämlich:

$$dx\,dy\,dz.\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)dt \ldots (\alpha).$$

Andererseits ist aber die durch die Seitenfläche Md in der Zeit dt eintretende Flüssigkeitsmasse gleich der Dichte derselben, multiplicirt mit dem durchlaufenen Raume, d. i. $= \varrho\,dy\,dz\,u\,dt$, sowie die in derselben Zeit aus der entgegengesetzten Fläche af

austretende Masse, da ihre Dichte und Geschwindigkeit an dieser Stelle um das nach x genommene Differentiale grösser, d. i. beziehungsweise gleich $\varrho + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx$ und $u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx$ ist, sofort gleich:

$$\left[\varrho + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx\right] . dy\, dz \left[u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx\right] dt = dy\, dz \left[\varrho u + \left(\frac{d . \varrho u}{dx}\right) dx\right] dt,$$

wenn man nämlich bei der Reduction berücksichtiget, dass

$$\varrho \left(\frac{du}{dx}\right) dx + u \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx = \left(\frac{d . \varrho u}{dx}\right) dx$$

ist, und wenn man die unendlich kleine Grösse 2ter Ordnung auslässt.

Die Differenz zwischen der ein- und austretenden Masse ist demnach:

$$\varrho\, dy\, dz\, u\, dt - dy\, dz \left[\varrho u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx\right] dt = - dy\, dz \left(\frac{d . \varrho u}{dx}\right) dx\, dt.$$

Da wir bis jetzt der Einfachheit wegen die Bewegung der unendlich kleinen Parallelopipede als parallel mit der Achse der x angenommen haben, während sie sich im Allgemeinen so bewegen, dass ihre Richtungen parallel zu den 3 Coordinatenachsen zerlegt werden können, so müssen wir dieselben Betrachtungen auch rücksichtlich der beiden Achsen der y und z anstellen, also annehmen, dass die Flüssigkeit in das Parallelopiped Mf nicht bloss an der Seite Md ein- und an jener af austritt, sondern dass der Eintritt gleichzeitig an den 3 Seitenflächen Md, Mc, cd und der Austritt an den entgegengesetzten Seiten af, bf, ab stattfindet; dadurch erhält man aber analog mit der vorigen noch die beiden Gleichungen, welche die Differenzen zwischen den an den Seiten Mc, cd eintretenden und aus jenen bf, ab gleichzeitig austretenden Flüssigkeitsmassen ausdrücken:

$$- dx\, dz \left(\frac{d . \varrho v}{dy}\right) dy\, dt \text{ und } - dx\, dy \left(\frac{d . \varrho w}{dz}\right) dz\, dt.$$

Setzt man daher endlich den Ueberschuss der Flüssigkeitsmasse, welcher sich aus dem Unterschiede zwischen der in das Parallelopiped Mf ein- und austretenden Masse ergibt, dem in Relat. (α) ausgedrückten Gewinne an Masse gleich, so erhält man, wenn die Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Factor $dx\, dy\, dz\, dt$ abgekürzt wird, die Relation:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d . \varrho u}{dx}\right) + \left(\frac{d . \varrho v}{dy}\right) + \left(\frac{d . \varrho w}{dz}\right) = 0 \ldots (2),$$

welche sofort die G l e i c h u n g d e r C o n t i n u i t ä t bildet.

188. Obschon wir sammt dieser letzteren Relation erst 4 Gleichungen besitzen, so liefert doch die Natur der Dichte ϱ der Flüssigkeit noch eine weitere Bedingung, je nachdem die Flüssigkeit tropfbar oder gasförmig, homogen oder heterogen ist.

Ist nämlich die Flüssigkeit incompressibel und homogen, so ist die Dichte derselben constant oder $\varrho = Const.$, mithin haben wir in diesem Falle nur 4 unbekannte Grössen: u, v, w und p, zu deren Bestimmung die obigen 4 Gleichungen (1) und (2) hinreichen. In diesem Falle nimmt auch die Continuitäts-Gleichung (2) die einfachere Form an:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0 \ldots (2')$$

und diese drückt [mit Rücksicht auf die Bedeutung der 3 letzten Glieder der Relat. (2)] offenbar die Eigenschaft aus, dass der Ueberschuss zwischen der in das genannte kleine Parallelopiped eintretenden Masse gegen jene, welche gleichzeitig austritt, gleich Null ist. Da aber die Dichte derselben constant, so folgt, dass auch das Volumen der gleichzeitig ein- und austretenden Flüssigkeit gleich gross ist, weshalb man diese Gleichung (2′) Gleichung der Incompressibilität nennen kann.

Ist ferner die Flüssigkeit incompressibel aber heterogen, so besitzt dieselbe nicht in allen Puncten dieselbe Dichte, d. h. sie variirt mit t, x, y, z, es bleibt jedoch wegen der Incompressibilität das Volumen irgend eines Theilchens während seiner Bewegung constant; beide diese Bedingungen werden aber durch die Coexistenz der beiden vorigen Gleichungen (2) (als Bedingung der Heterogenität) und (2′) (als Bedingung der Incompressibilität) ausgedrückt. Verbindet man diese beiden genannten Gleichungen (indem man jene (2′) mit ϱ multiplicirt und dann von jener (2) abzieht), so erhält man die folgende:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + u\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + v\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + w\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) = 0 \ldots (2'').$$

Diese beiden Gleichungen (2′) und (2″) geben mit den obigen in (1) und (2) zusammen die nöthigen 5 Gleichungen zur Bestimmung unserer 5 Unbekannten.

Ist endlich die Flüssigkeit compressibel oder elastisch, d. h. luft- oder gasförmig, so besteht zwischen der Spannkraft p und der Dichte ϱ (Nr. **286.**) die Relation:

$$p = k\varrho \ldots (3),$$

welche mit den obigen in (1) und (2) auch in diesem Falle wieder die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der 5 unbekannten Grössen liefert.

Ausfluss des Wassers bei constanten Druckhöhen.

(§. 344.)

189. Um den permanenten Ausfluss des Wassers oder irgend einer homogenen Flüssigkeit aus einer im Boden des Gefässes ABE (Fig. 93) angebrachten horizontalen Oeffnung ab unter der Voraussetzung zu finden, dass der Wasser- oder Flüssigkeitsspiegel AB continuirlich auf derselben Höhe erhalten wird, hat man zu berücksichtigen, dass hierbei keine anderen bewegenden Kräfte als die Schwerkraft und die beiden constanten Pressungen auf die Oberfläche AB und die Oeffnung ab von aussen nach innen thätig oder wirksam sind und dass, da hier die Dichte ϱ als eine constante Grösse gegeben ist, in den obigen allgemeinen Bewegungs-Gleichungen nur mehr die 4 übrigen Grössen u, v, w, p in Betracht kommen können.

Um diese aber zu bestimmen, oder überhaupt das vorliegende Problem aufzulösen, muss man zur sogenannten Hypothese des Parallelismus der Schichten Zuflucht nehmen oder diese zum Grunde legen, eine Hypothese, welche von Dan. Bernouilli herrührt und in der Annahme besteht, dass während der Bewegung der Flüssigkeit nach abwärts, die sehr oder unendlich dünnen Schichten, in welche man sich die ganze Masse zerlegt denken kann, sich successive in der Art ersetzen, dass wenn man z. B. zwei solche Schichten von gleichem Volumen in verschiedenen Höhen betrachtet, die höher gelegene nach einer gewissen Zeit genau die Lage der niedrigeren einnimmt und alle die Theilchen, welche sie zu Anfang der Bewegung besass, während der Bewegung unverändert beibehält, ohne dass sich diese Theilchen also mit jenen der zunächst liegenden Schichten vermengen oder vertauschen, eine Bedingung, welche offenbar voraussetzt, dass die Geschwindigkeiten der einzelnen Theilchen nach horizontalen Richtungen Null sind und diese sich bloss nach verticaler Richtung bewegen.

Geht man nun auf die allgemeinen Gleichungen (1) in Nr. **186**. zurück und setzt in diesen zufolge der eben gemachten Bemer-