Zweiter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Allgemeine Gleichungen der Bewegung.

186. Bewegen sich Flüssigkeiten unter dem Einflusse beliebiger Kräfte, so können die dabei eintretenden Gesetze durch Gleichungen ausgedrückt werden, die sich ganz allgemein in folgender Weise entwickeln lassen.

Man denke sich wieder, wie in Nr. **166**. die tropfbar- oder elastisch-flüssige Masse in unendlich kleine rechtwinkelige Parallelopipede parallel zu den 3 Coordinatenachsen AX, AY, AZ (Fig. 83) zerlegt, bezeichne auf diese bezogen die Coordinaten irgend eines Punctes M im Raume oder in der Flüssigkeit durch x, y, z und nehme an, dass das unendlich kleine Parallelopiped Mf eben durch diesen Punct M mit irgend einer Geschwindigkeit durchfliesse oder sich fortbewege. Diess angenommen seien u, v, w die Componenten dieser Geschwindigkeit nach den Achsen der x, y, z, sowie X, Y, Z die nach denselben Achsen genommenen 3 Componenten der auf dieses Element Mf wirkenden äusseren oder beschleunigenden Kräfte, diese nämlich auf die Einheit der Masse bezogen; ferner sei ϱ die Dichte und p der Druck oder die Pressung, welche in diesem Puncte M der Flüssigkeit stattfindet, und zwar letztere auf die Flächeneinheit verstanden.

Sind nun die Coordinaten des Punctes M, sowie die auf das Flüssigkeitselement Mf einwirkenden Kräfte gegeben, so handelt es sich um die Bestimmung der Geschwindigkeit, Dichte und Pressung in diesem Puncte, wozu sofort die folgenden Betrachtungen führen.

1. Die Seitengeschwindigkeiten oder Componenten u, v, w sind nicht bloss von den Coordinaten x, y, z, sondern zugleich

auch von der Zeit t abhängig, d. h. man muss bei Betrachtung der Veränderung der Geschwindigkeit, welche ein Element bei der Bewegung von einem Punct zum nächstfolgenden erfährt, im Allgemeinen die Grössen u, v, w als Functionen von x, y, z, t ansehen.

2. Ebenso sind sowohl ϱ und p, als auch allgemein genommen die Componenten X, Y, Z Functionen von den nämlichen 4 Variabeln x, y, z, t.

3. Ist die Masse des angenommenen Elementes oder Parallelopipedes Mf sofort $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, sowie die darauf einwirkenden bewegenden Kräfte nach den 3 Coordinatenachsen $X\mathrm{d}m$, $Y\mathrm{d}m$, $Z\mathrm{d}m$.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen bildet man die allgemeinen Gleichungen der Bewegung wieder mit Anwendung des Satzes in Nr. **131**, 5., nach welchem die Summe der nach einer der Achsen wirksamen Componenten aus allen auf das Element Mf wirkenden Kräften gleich ist der Masse dieses Elementes, multiplicirt mit der nach dieser Achse genommenen Beschleunigung (d. i. der Projection der Geschwindigkeit des Elementes auf diese Achse).

Berücksichtigt man nun zuerst die Achse der x, so sind die erwähnten Componenten, oder die nach dieser Achse wirksamen Kräfte erstens die bewegende Kraft $X\mathrm{d}m = X\varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ferner der auf das Element Mf von aussen nach innen auf die Fläche Md wirkende Druck $p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ der das Element umgebenden Flüssigkeit (in positiver), sowie endlich der auf die entgegengesetzte Fläche af stattfindende Gegendruck $\left[p + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ (in negativer Richtung).

Was ferner die nach dieser Achse stattfindende Beschleunigung u, d. i. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ betrifft, so muss man berücksichtigen, dass diese eine Function der 4 Variabeln t, x, y, z ist, indem bei dem Uebergange des Elementes Mf von der Position in M zu einer nächstfolgenden, dessen Geschwindigkeit nicht bloss mit der Zeit t, sondern auch mit dem Orte, d. i. den Coordinaten x, y, z variirt; der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ bezeichnet sonach das Differentiale von u nicht bloss nach der absolut oder unabhängig Variabeln t, sondern auch nach den Variabeln x, y, z, welche selbst implicite Functionen von t sind, weil sich diese auf keinen festen Punct im Raume, sondern auf eine Position beziehen, die sich mit der Zeit t ändert. Der wahre Ausdruck für diese Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ ist demnach (Comp. §. 656, Anmerkung):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dt}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dt}.$$

Nun ist aber (Nr. **120**) $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit des Parallelopipedes Mf nach der Achse der x, also $=u$, und ebenso sind $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$ die Geschwindigkeiten nach den beiden übrigen Achsen, so dass mit Rücksicht darauf der vorige Ausdruck auch die Form erhält:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Es ist daher endlich zufolge des erwähnten Satzes die Gleichung der Bewegung für das Element Mf nach dieser Achse der x:

$$X\varrho\,dx\,dy\,dz+p\,dy\,dz-\left[p+\left(\frac{dp}{dx}\right)dx\right]dy\,dz$$
$$=\varrho\,dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)\right],$$

oder reducirt:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dx}\right)=X-\left(\frac{du}{dt}\right)-u\left(\frac{du}{dx}\right)-v\left(\frac{du}{dy}\right)-w\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Da man aber für die beiden übrigen Coordinatenachsen der y und z zwei mit dieser ganz analoge Gleichungen erhält, so hat man fürs erste die 3 folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dx}\right)&=X-\left(\frac{du}{dt}\right)-u\left(\frac{du}{dx}\right)-v\left(\frac{du}{dy}\right)-w\left(\frac{du}{dz}\right)\\ \frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dy}\right)&=Y-\left(\frac{dv}{dt}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)-v\left(\frac{dv}{dy}\right)-w\left(\frac{dv}{dz}\right)\\ \frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dz}\right)&=Z-\left(\frac{dw}{dt}\right)-u\left(\frac{dw}{dx}\right)-v\left(\frac{dw}{dy}\right)-w\left(\frac{dw}{dz}\right)\end{aligned}\right\}\ldots(1).$$

187. Da wir im Allgemeinen 5 unbekannte Grössen: ϱ, p, u, v, w zu bestimmen haben, so lösen diese eben gefundenen 3 Gleichungen unsere Aufgabe noch nicht vollständig auf, und es fehlen uns daher noch 2 Gleichungen. Diese fehlenden Gleichungen erhalten wir jedoch aus der bis jetzt noch nicht berücksichtigten Bedingung der Continuität des Flüssigen, d. i. aus der Bedingung, dass die Aufeinanderfolge der Flüssigkeits-Elemente eine zusammenhängende Masse bilden, diese Elemente sich also während der Bewegung von einander nicht trennen oder losreissen.

Um aber diese Bedingung auszudrücken, nehmen wir zuerst den einfacheren Fall an, dass sich die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M, während des Durchganges der Theilchen nicht ändere, dass also der Raum des unendlich kleinen Parallelopipedes Mf, durch welches der Reihe nach die verschiedenen Flüssigkeitstheilchen durchgehen, fortwährend von einer gleich grossen Masse erfüllt werde. In diesem Falle würde daher, wenn sich die kleinen Parallellopipede oder Elemente parallel mit der Achse der x bewegten, aus dem Parallelopiped durch die Seite af eine eben so grosse Masse austreten als gleichzeitig durch die Seite Md in dasselbe eintritt.

Aendert sich dagegen während der Bewegung im Puncte M die Dichte der Flüssigkeit, nimmt diese z. B. continuirlich zu, so kann man sich vorstellen oder annehmen, dass die Zunahme der Masse in diesem Parallelopiped Mf (in Folge der Zunahme der Dichte) dadurch entsteht, dass gleichsam ein Theil der durch die Seite Md eintretenden Masse im Parallelopiped zurückgehalten wird, also in irgend einem beliebigen Augenblicke durch die Seite af des kleinen Parallelopipedes weniger Masse austritt als gleichzeitig durch die Seite Md eintritt. (Das Umgekehrte hätte man sich vorzustellen, wenn die Dichte der Flüssigkeit abnehmen würde.) Bei dieser Annahme müsste dann die Differenz zwischen dem Ein- und Austritt aus diesem Parallelopiped genau der Zunahme der Flüssigkeitsmasse oder der Dichte entsprechen.

Nun ist aber der Gewinn an Masse, welcher in dem Parallelopiped Mf während der Zeit dt entsteht, offenbar gleich dem Volumen $dx\,dy\,dz$ multiplicirt mit der Zunahme der Dichte in dieser Zeit, eine Zunahme, welche durch das Differenziale von ϱ, dieses bloss nach t genommen, ausgedrückt wird; dieser Gewinn ist nämlich:

$$dx\,dy\,dz\,.\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)dt\ldots(\alpha).$$

Andererseits ist aber die durch die Seitenfläche Md in der Zeit dt eintretende Flüssigkeitsmasse gleich der Dichte derselben, multiplicirt mit dem durchlaufenen Raume, d. i. $= \varrho\,dy\,dz\,u\,dt$, sowie die in derselben Zeit aus der entgegengesetzten Fläche af

austretende Masse, da ihre Dichte und Geschwindigkeit an dieser Stelle um das nach x genommene Differentiale grösser, d. i. beziehungsweise gleich $\varrho + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx$ und $u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx$ ist, sofort gleich:

$$\left[\varrho + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx\right] . dy\, dz \left[u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx\right] dt = dy\, dz \left[\varrho u + \left(\frac{d.\varrho u}{dx}\right) dx\right] dt,$$

wenn man nämlich bei der Reduction berücksichtiget, dass

$$\varrho \left(\frac{du}{dx}\right) dx + u \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) dx = \left(\frac{d.\varrho u}{dx}\right) dx$$

ist, und wenn man die unendlich kleine Grösse 2ter Ordnung auslässt.

Die Differenz zwischen der ein- und austretenden Masse ist demnach:

$$\varrho\, dy\, dz\, u\, dt - dy\, dz \left[\varrho u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx\right] dt = - dy\, dz \left(\frac{d.\varrho u}{dx}\right) dx\, dt.$$

Da wir bis jetzt der Einfachheit wegen die Bewegung der unendlich kleinen Parallelopipede als parallel mit der Achse der x angenommen haben, während sie sich im Allgemeinen so bewegen, dass ihre Richtungen parallel zu den 3 Coordinatenachsen zerlegt werden können, so müssen wir dieselben Betrachtungen auch rücksichtlich der beiden Achsen der y und z anstellen, also annehmen, dass die Flüssigkeit in das Parallelopiped Mf nicht bloss an der Seite Md ein- und an jener af austritt, sondern dass der Eintritt gleichzeitig an den 3 Seitenflächen Md, Mc, cd und der Austritt an den entgegengesetzten Seiten af, bf, ab stattfindet; dadurch erhält man aber analog mit der vorigen noch die beiden Gleichungen, welche die Differenzen zwischen den an den Seiten Mc, cd eintretenden und aus jenen bf, ab gleichzeitig austretenden Flüssigkeitsmassen ausdrücken:

$$- dx\, dz \left(\frac{d.\varrho v}{dy}\right) dy\, dt \quad \text{und} \quad - dx\, dy \left(\frac{d.\varrho w}{dz}\right) dz\, dt.$$

Setzt man daher endlich den Ueberschuss der Flüssigkeitsmasse, welcher sich aus dem Unterschiede zwischen der in das Parallelopiped Mf ein- und austretenden Masse ergibt, dem in Relat. (α) ausgedrückten Gewinne an Masse gleich, so erhält man, wenn die Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Factor $dx\, dy\, dz\, dt$ abgekürzt wird, die Relation:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d.\varrho u}{dx}\right) + \left(\frac{d.\varrho v}{dy}\right) + \left(\frac{d.\varrho w}{dz}\right) = 0 \ldots (2),$$

welche sofort die Gleichung der Continuität bildet.

188. Obschon wir sammt dieser letzteren Relation erst 4 Gleichungen besitzen, so liefert doch die Natur der Dichte ϱ der Flüssigkeit noch eine weitere Bedingung, je nachdem die Flüssigkeit tropfbar oder gasförmig, homogen oder heterogen ist.

Ist nämlich die Flüssigkeit incompressibel und homogen, so ist die Dichte derselben constant oder $\varrho = Const.$, mithin haben wir in diesem Falle nur 4 unbekannte Grössen: u, v, w und p, zu deren Bestimmung die obigen 4 Gleichungen (1) und (2) hinreichen. In diesem Falle nimmt auch die Continuitäts-Gleichung (2) die einfachere Form an:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0 \ldots (2')$$

und diese drückt [mit Rücksicht auf die Bedeutung der 3 letzten Glieder der Relat. (2)] offenbar die Eigenschaft aus, dass der Ueberschuss zwischen der in das genannte kleine Parallelopiped eintretenden Masse gegen jene, welche gleichzeitig austritt, gleich Null ist. Da aber die Dichte derselben constant, so folgt, dass auch das Volumen der gleichzeitig ein- und austretenden Flüssigkeit gleich gross ist, weshalb man diese Gleichung (2') Gleichung der Incompressibilität nennen kann.

Ist ferner die Flüssigkeit incompressibel aber heterogen, so besitzt dieselbe nicht in allen Puncten dieselbe Dichte, d. h. sie variirt mit t, x, y, z, es bleibt jedoch wegen der Incompressibilität das Volumen irgend eines Theilchens während seiner Bewegung constant; beide diese Bedingungen werden aber durch die Coexistenz der beiden vorigen Gleichungen (2) (als Bedingung der Heterogenität) und (2') (als Bedingung der Incompressibilität) ausgedrückt. Verbindet man diese beiden genannten Gleichungen (indem man jene (2') mit ϱ multiplicirt und dann von jener (2) abzieht), so erhält man die folgende:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + u\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + v\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + w\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) = 0 \ldots (2'').$$

Diese beiden Gleichungen (2') und (2'') geben mit den obigen in (1) und (2) zusammen die nöthigen 5 Gleichungen zur Bestimmung unserer 5 Unbekannten.

Ist endlich die Flüssigkeit compressibel oder elastisch, d. h. luft- oder gasförmig, so besteht zwischen der Spannkraft p und der Dichte ϱ (Nr. **286.**) die Relation:

$$p = k\varrho \ldots (3),$$

welche mit den obigen in (1) und (2) auch in diesem Falle wieder die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der 5 unbekannten Grössen liefert.

Ausfluss des Wassers bei constanten Druckhöhen.

(§. 344.)

189. Um den permanenten Ausfluss des Wassers oder irgend einer homogenen Flüssigkeit aus einer im Boden des Gefässes ABE (Fig. 93) angebrachten horizontalen Oeffnung ab unter der Voraussetzung zu finden, dass der Wasser- oder Flüssigkeitsspiegel AB continuirlich auf derselben Höhe erhalten wird, hat man zu berücksichtigen, dass hierbei keine anderen bewegenden Kräfte als die Schwerkraft und die beiden constanten Pressungen auf die Oberfläche AB und die Oeffnung ab von aussen nach innen thätig oder wirksam sind und dass, da hier die Dichte ϱ als eine constante Grösse gegeben ist, in den obigen allgemeinen Bewegungs-Gleichungen nur mehr die 4 übrigen Grössen u, v, w, p in Betracht kommen können.

Um diese aber zu bestimmen, oder überhaupt das vorliegende Problem aufzulösen, muss man zur sogenannten Hypothese des Parallelismus der Schichten Zuflucht nehmen oder diese zum Grunde legen, eine Hypothese, welche von Dan. Bernouilli herrührt und in der Annahme besteht, dass während der Bewegung der Flüssigkeit nach abwärts, die sehr oder unendlich dünnen Schichten, in welche man sich die ganze Masse zerlegt denken kann, sich successive in der Art ersetzen, dass wenn man z. B. zwei solche Schichten von gleichem Volumen in verschiedenen Höhen betrachtet, die höher gelegene nach einer gewissen Zeit genau die Lage der niedrigeren einnimmt und alle die Theilchen, welche sie zu Anfang der Bewegung besass, während der Bewegung unverändert beibehält, ohne dass sich diese Theilchen also mit jenen der zunächst liegenden Schichten vermengen oder vertauschen, eine Bedingung, welche offenbar voraussetzt, dass die Geschwindigkeiten der einzelnen Theilchen nach horizontalen Richtungen Null sind und diese sich bloss nach verticaler Richtung bewegen.

Geht man nun auf die allgemeinen Gleichungen (1) in Nr. **186.** zurück und setzt in diesen zufolge der eben gemachten Bemerkungen $\varrho = const.$, $u = 0$, $v = 0$, $X = 0$, $Y = 0$ und (da wir die Achse der z nach abwärts angenommen haben) $Z = g$; so fallen die beiden ersten Gleichungen weg und die dritte geht über in folgende:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dz}\right) = g - w\left(\frac{dw}{dz}\right) \text{ oder in } dp = \varrho g dz - \varrho w dw \ldots (1).$$

In dieser Differential-Gleichung bezeichnet z als die absolut Variabele die verticale Ordinate irgend einer der unendlich dünnen Flüssigkeitsschichten Mn, p den Druck, welcher in dieser Schichte auf die Flächeneinheit stattfindet, w die verticale nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit, sowie ϱ die Dichte der Flüssigkeit.

Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man:

$$p = \varrho g z - \tfrac{1}{2}\varrho w^2 + C,$$

wobei C die unbestimmte Constante bezeichnet. Um diese zu bestimmen, sei der auf die Oberfläche AB, und zwar auf die Flächeneinheit bezogene Druck $= p'$, der Querschnitt des Gefässes in AB und Mn beziehungsweise $= A$ und α, sowie der Querschnitt der Ausflussöffnung $= a$. Diess vorausgesetzt, geht für $z = 0$ der Druck p in p' und die Geschwindigkeit w in w', d. i. in jene Geschwindigkeit über, welche der Schichte AB zukömmt; diese ist aber zufolge der Continuität der Flüssigkeit (wegen $w : w' = A : \alpha$) sofort:

$$w' = \frac{\alpha}{A} w.$$

Es ist daher $C = p' - \frac{1}{2}\varrho \frac{\alpha^2}{A^2} w^2$, mithin, wenn man diesen Werth für C in der vorigen Gleichung substituirt, auch:

$$p = p' + \varrho g z - \tfrac{1}{2}\varrho w^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{A^2}\right) \ldots (2),$$

eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen dem Drucke und der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in irgend einer Tiefe z ausdrückt.

Bezeichnet man endlich noch den auf die Flächeneinheit der Ausflussöffnung stattfindenden Druck durch p'', so hat man, wenn h die constante Höhe des Flüssigkeitsspiegels AB über der Oeffnung E ist und die Ausfluss-Geschwindigkeit mit v bezeichnet wird, aus dieser letzten Gleichung, wenn man auf die Ausflussöffnung übergeht:

$$p'' = p' + \varrho g h - \tfrac{1}{2}\varrho v^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) \ldots (3)$$

und man erhält aus dieser letzten Gleichung die gesuchte Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gh + \frac{2}{\varrho}(p' - p'')}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} \ldots (4).$$

Kann man, wie in den meisten Fällen, $p'' = p'$ setzen, so ist einfacher:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} \ldots (5)$$

und die Geschwindigkeit w in irgend einer Schichte MN vom Querschnitt α (wegen $v : w = \alpha : a$):

$$w = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} \ldots (6).$$

Auch lässt sich jetzt leicht der Druck p in dieser Schichte MN bestimmen, indem man nur in der obigen Gleichung (2) diesen Werth für w setzen darf; man erhält nämlich dadurch:

$$p = p' + \varrho g z - \varrho g h . \frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{A^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}} \ldots (7).$$

Steht die Flüssigkeit in dem Gefässe ruhig, so findet in dieser Schichte MN der Druck $p' + \varrho g z$ statt; durch die Bewegung derselben nimmt daher, wie aus dieser letzten Gleichung (7) zu ersehen, dieser Druck zu oder ab, jenachdem das letzte Glied derselben negativ oder positiv ausfällt (was von den Grössen A, α und a abhängt).

Setzt man in dieser Gleichung (7) $z = h$ und $\alpha = a$, so folgt daraus, wie es sein soll: $p = p' = p''$.

Ist endlich a gegen A so klein, dass man $\frac{a^2}{A^2}$ gegen 1, und $\frac{1}{A}$ gegen $\frac{1}{a}$ auslassen kann, so erhält man noch einfacher:

$$v = \sqrt{2gh} \ldots (8), \quad w = \frac{a}{\alpha}\sqrt{2gh} \ldots (9) \text{ und}$$

$$p = p' + \varrho g z - \varrho g h a^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{A^2}\right) \ldots (10).$$

Anmerkung 1. Die erste dieser 3 letzten Gleichungen zeigt, dass unter der gemachten Voraussetzung die Flüssigkeitstheilchen an der Ausflussöffnung dieselbe Geschwindigkeit besitzen, als ob sie im leeren Raume durch die Höhe h frei gefallen wären.

Aus der zweiten Gleichung (9) folgt, dass die Geschwindigkeit der Theilchen irgend einer Schichte von dem Abstande derselben vom Wasserspiegel unabhängig sei und diese nur von der Grösse des Querschnittes α abhänge, so dass also die Geschwindigkeit in allen gleich grossen Querschnitten dieselbe ist. Bildet daher z. B. das Gefäss einen senkrechten Cylinder, so bewegen sich alle Theilchen der Flüssigkeit mit derselben Geschwindigkeit w abwärts. Diese Geschwindigkeit w ist übrigens bei jeder Form des Gefässes kleiner als die Ausflussgeschwindigkeit v, weil sonst irgend ein Querschnitt gleich oder kleiner als die Ausflussöffnung a sein müsste, und es würde im letzteren Falle dieser kleinste Querschnitt gleichsam die Ausflussöffnung selbst bilden.

Die dritte Gleichung (10) endlich zeigt, dass der Druck der Flüssigkeit in der Ruhe, der sogenannte hydrostatische (oder allgemein statische) Druck $= p' + \varrho g z$ in irgend einer Schichte, durch die Bewegung verringert oder vergrössert wird, jenachdem $\alpha < A$ oder $\alpha > A$ ist; dort, wo sich also das Gefäss verengt, nimmt dieser Druck ab, wo es sich erweitert, nimmt der Druck zu, oder es ist, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, in diesen beiden Fällen der hydraulische Druck beziehungsweise kleiner oder grösser als der hydrostatische Druck; für $\alpha = A$ sind beide Drücke gleich gross. Besitzt also das Gefäss verticale Wände, so ist der Druck, welchen die Flüssigkeit gegen dieselben ausübt, derselbe, es mag die Flüssigkeit in der Ruhe oder in Bewegung sein.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhen, welche den am Wasserspiegel AB und im Querschnitt MN des Gefässes stattfindenden Geschwindigkeiten w' und w entsprechen, durch h_1 und h_2, so ist

$$h_1 = \frac{a^2}{A^2}\frac{v^2}{2g} = \frac{a^2}{A^2}h \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{a^2}{\alpha^2}\frac{v^2}{2g} = \frac{a^2}{\alpha^2}h,$$

folglich zufolge der genannten Gleichung (10) die Differenz zwischen dem hydrostatischen und hydraulischen Druck in der Schichte MN, diese auf die Flächeneinheit bezogen:

$$\varrho g h a^2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{A^2}\right) = \varrho g (h_2 - h_1),$$

nämlich gleich der Differenz der Drücke, welche den Geschwindigkeitshöhen im Querschnitt MN und der Oberfläche AB entsprechen.

Bringt man einen Ausflussapparat, welcher etwa die in Fig. 96 dargestellte Form hat, und wobei der Querschnitt $CD > AB$, jener $EF < AB$, und $GH < EF$ sein mag, in den Querschnitten CD, EF und GH communicirende Röhren (die jedoch keine Haarröhrchen sein dürfen) DJ, EK und HL an, so steigt, während die Flüssigkeit durch diesen Apparat durchfliesst, diese im Rohre DJ bis zu einem Puncte a, welcher über dem Niveau AB, dagegen im Rohre EK bis zu einem Puncte b, welcher unter diesem Niveau liegt, während, wenn der Querschnitt GH im Verhältniss zu jenem AB klein genug ist, in diesem sogar ein negativer Druck gegen die Gefässwand entstehen und dadurch, d. h. durch den äusseren Luftdruck eine im Gefässe RS befindliche (zur besseren Wahrnehmung gefärbte) Flüssigkeit, durch das in diese Flüssigkeit eintauchende Röhrchen HL in den Apparat hineingedrückt oder eingesogen werden kann.

Sind nämlich A, F, F' und f der Reihe nach die Querschnittsflächen in AB, CD, EF und GH, so erhält man aus der genannten Gleichung (10), wenn man das bei dieser Untersuchung überflüssige Glied p' auslässt, für den Druck

$$\text{in } CD\colon\ p = \varrho g\left[pn - ha^2\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{A^2}\right)\right] = \varrho g(pn + na),$$

$$\text{in } EF\colon\ p = \varrho g\left[qm - ha^2\left(\frac{1}{F'^2} - \frac{1}{A^2}\right)\right] = \varrho g(qm - mb)$$

$$\text{und in } GH\colon\ p = \varrho g\left[HM - ha^2\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{A^2}\right)\right];$$

jenachdem nun in diesem letzteren Falle $ha^2\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{A^2}\right) \gtreqless HM$ ist, ist auch $p = 0$ oder negativ.

So findet z. B. in einem engen verticalen Rohr vom Querschnitt a, welches oben in ein weites Gefäss oder Reservoir vom Querschnitt A einmündet, wie in Fig. 97, während des Ausflusses des Wassers fortwährend ein negativer hydraulischer Druck statt; denn es ist dieser an der Ausmündung des Rohres, nach der Gleichung (10), wenn man in dieser den gleichen atmosphärischen Gegendruck p' weglässt, und wenn A gegen a so gross ist, dass man $\frac{1}{A^2}$ gegen $\frac{1}{a^2}$ auslassen kann, wegen $z = h$ sofort:

$$p = \varrho gh - \varrho gh = 0.$$

Dagegen ist dieser Druck in den um die Tiefe h' unterm Wasserspiegel liegenden Querschnitt MN, wegen $z = h'$: $p = \varrho gh' - \varrho gh = -\varrho g(h - h')$ negativ, so dass, wenn an dieser Stelle die Rohrwand durchbohrt würde, die äussere Luft durch diese Oeffnung in das Rohr eintreten und bei CD mit austreten müsste.

Anmerkung 2. Die vorige Gleichung (8) lässt sich auch ohne Anwendung der allgemeinen Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Principes der lebendigen Kräfte, und zwar in folgender Weise ableiten.

Werden alle Bezeichnungen von vorhin beibehalten und setzt man für die homogene Flüssigkeit das Wasser, so fliesst aus der Oeffnung a während der Zeit dt die Wassermasse $\varrho av\,dt$ aus, deren lebendige Kraft also $= \varrho av\,dt \times v^2 = \varrho av^3 dt$ ist.

Da der Wasserspiegel unverändert bleibt und der Vorgang während der Bewegung im Gefässe keine Aenderung erleidet, so bleibt auch die lebendige Kraft der Flüssigkeit im Gefässe ungeändert, d. h. es muss die producirte der gleichzeitig consumirten gleich sein; aus diesem Grunde stellt auch der vorige Ausdruck die in der Zeit dt producirte oder erzeugte lebendige Kraft oder (§. 226) $\frac{1}{2}\varrho av^3 dt \ldots (m)$ die in dieser producirte Arbeit vor. Die bewegenden Kräfte aber, welche diese Arbeit erzeugen, sind die Schwere und die Pressungen, welche auf die freie Oberfläche des Wasserspiegels und gegen die Ausflussöffnung stattfinden.

Besteht nun, nach der Hypothese des Parallelismus der Schichten, die Flüssigkeit aus lauter horizontalen Schichten, jede vom Volumen $av\,dt$, so besteht die Wirkung der Schwerkraft darin, jede Schichte durch die unmittelbar darüber stehende zu ersetzen, oder was dasselbe ist, eine jede solche

Schichte vom Wasserspiegel an bis zum Niveau der Bodenöffnung herabsinken zu machen. Da aber $\varrho a v \mathrm{d}t \,.\, g$ das Gewicht einer solchen Schichte ist, so wird die hiezu nöthige Arbeit durch $\varrho a v \mathrm{d}t \times g h = \varrho a g h v \mathrm{d}t \ldots (n)$ ausgedrückt.

Ist ferner der Druck gegen die Ausflussöffnung a derselbe, wie gegen die freie Oberfläche A und zwar auf die Flächeneinheit bezogen, so verhalten sich die Pressungen d und D auf die ganzen Flächen a und A wie diese Flächen, oder es ist $d : D = a : A$.

Die Wege s und S, welche diese Flächen a und A gleichsam als Träger der Kräfte d und D während der Zeit $\mathrm{d}t$ zurücklegen, verhalten sich wie ihre Geschwindigkeiten und diese wie umgekehrt die Flächen oder Querschnitte, d. i. $s : S = A : a$.

Setzt man daher diese beiden Proportionen zusammen, so erhält man $ds : DS = 1 : 1$, d. i. $ds = DS$, oder die beiden aus den genannten Pressungen hervorgehenden gleichzeitigen Arbeiten sind einander gleich, und da sie entgegengesetzte Zeichen haben, so heben sie sich auf und es bleibt für die verrichtete Arbeit nur der vorige Ausdruck (n), welcher sonach dem obigen (m) gleich sein muss. Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke hat man daher:

$$\tfrac{1}{2} \varrho a v^3 \mathrm{d}t = \varrho a g h v \mathrm{d}t \ldots (s)$$

und daraus für die Ausflussgeschwindigkeit wieder wie in (8):

$$v = \sqrt{2 g h}.$$

Bei dieser Entwickelung ist stillschweigend a gegen A so klein angenommen worden, dass der Wasserspiegel (wenigstens für eine gewisse Zeit) als unbeweglich angenommen werden kann. Ist diess jedoch nicht der Fall, sondern muss, um den Wasserspiegel auf derselben Höhe zu erhalten, oben in das Gefäss immer eben so viel Wasser zufliessen als unten abfliesst, und setzt man die Zuflussgeschwindigkeit $= c$, so ist für's erste $A c = a v$ oder $c = \frac{a}{A} v$ und die nöthige Arbeitsgrösse, um in der Masse $\varrho a g v \mathrm{d}t$ diese Geschwindigkeit hervorzubringen (§. 227) $= \varrho a g v \mathrm{d}t \times \frac{c^2}{2g}$. Es ist daher jetzt statt der vorigen Gleichung (s):

$$\tfrac{1}{2} \varrho a v^3 \mathrm{d}t = \varrho a g v \mathrm{d}t \left(h + \frac{c^2}{2g}\right),$$

aus welcher

$$v = \sqrt{2 g h + c^2} \ldots (u),$$

oder wenn man für c den vorigen Werth setzt:

$$v = A \sqrt{\frac{2 g h}{A^2 - a^2}} \ldots (w)$$

wird, welches sofort die obige Gleichung (5) ist.

Setzt man in dieser Gleichung für v den aus der obigen Relation folgenden Werth $\frac{A}{a} c$, so erhält man daraus:

$$a = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{2 g h}{c^2}}},$$

welche Gleichung sofort zeigt, dass für jeden endlichen Werth von c immer $a < A$ ist.

Beispiel. Ist z. B. $A = 60$ und $a = 12$ Quadratzoll, so würde die einfache Formel $v = \sqrt{2gh}$ die Geschwindigkeit v bedeutend zu klein geben, indem diese Geschwindigkeit zufolge der richtigen Formel (5) oder der vorigen (w) noch mit dem Factor:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 - a^2}} = \frac{60}{46{\cdot}333} = 1{\cdot}2922$$

multiplicirt werden muss.

Wäre dagegen bei diesem Werthe von $A = 60$ nur $a = 1$ Quadratzoll, so würde dieser Factor bloss $= \frac{6}{59{\cdot}991} = 1{\cdot}0001$, folglich so gut wie keinen Einfluss haben.

190. Da die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit wegen der Reibung des Wassers an den Wänden des Gefässes und der Ausflussöffnung, sowie der Klebrigkeit, d. i. des nicht absolut vollkommen flüssigen Zustandes desselben, immer kleiner als die durch die obigen Formeln ausgedrückte theoretische ist, so muss man die letztere, um daraus die wirkliche Geschwindigkeit zu erhalten, noch mit einem Erfahrungs-, dem sogenannten Geschwindigkeits-Coefficienten φ, welcher sonach immer kleiner als die Einheit ist, multipliciren.

Ist daher v_1 die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit, so ist:

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh},$$

wenn man nämlich die einfachere Formel (8) anwendet.

Was nun diesen Coefficienten φ betrifft, so ist es äusserst schwierig, dessen Werth genau zu bestimmen, indem derselbe mehr oder weniger von der Druckhöhe und von der Grösse und Form der Ausflussöffnung selbst abhängt.

So fand z. B. Prof. Weisbach aus einer grossen Reihe von Versuchen, welche er über den Ausfluss des Wassers aus horizontalen, in dünnen Wänden angebrachten Oeffnungen, und zwar bei Druckhöhen von 1, 5, 10 und 390 Fuss durchführte, für φ beziehungsweise die Werthe ·958, ·969, ·975, ·988, so dass man hieraus berechtigt wäre, für die gewöhnlich vorkommenden, zwischen 1 und 10 Fuss liegenden Druckhöhen als Mittelwerth $\varphi = {\cdot}967$ zu setzen.

Ebenso kann man für den Ausfluss aus kurzen cylinderischen Ansatzröhren im Mittel $\varphi = {\cdot}816$ oder für gewöhnlich ·82; für conisch-convergente Ansätze $\varphi = {\cdot}830$ bis ·984 setzen, jenachdem der Convergenzwinkel von 0 bis gegen 49° zunimmt.

Anmerkung. Um hier zugleich auch einige Bemerkungen in Beziehung auf den Contractions-Coefficienten α einzuschalten, da dieser Coefficient besonders beim Ausfluss aus Oeffnungen in dünner Wand von wesentlichem Einflusse ist, indem dabei nicht der Querschnitt a der Oeffnung, sondern der kleinere αa in Rechnung kommt, so bemerke man, dass av die theoretische, folglich $\alpha a v_1 = \alpha \varphi a v = \mu a v$ die wirklich ausfliessende Wassermenge ist, wenn man nämlich das Product $\alpha \varphi = \mu$ setzt, und wobei dieser neue Coefficient μ der Ausfluss-Coefficient heisst.

Obschon nun aber zum Behufe der Bestimmung dieses Coefficienten seit Borda unzählige Versuche und Beobachtungen vorgenommen wurden, so kennt man auch heute noch nicht genau alle jene Umstände, welche auf die Grösse desselben Einfluss haben, so dass man sich immer noch mit gewissen Mittelwerthen begnügen muss.

So viel geht indess aus den Versuchen über die Contractions-Erscheinungen hervor, dass 1. die Zusammenziehung des ausfliessenden Wasserstrahles bei Oeffnungen in einer dünnen Wand am stärksten sind, dass 2. die Contraction grösser wird, wenn die Druckhöhe oder auch die Ausflussöffnung zunimmt, dass diese 3. abnimmt und partiel wird, wenn ein Theil des Umfanges der Oeffnung durch die Seitenwände des Gefässes begrenzt wird, und dass endlich 4. diese Contraction auch geringer oder unvollkommen wird, wenn das Wasser vor der Ausflussöffnung nicht ruhig steht, sondern schon mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben anlangt.

Ist ferner die Gefässwand, in welcher sich die Ausflussöffnung befindet, nach innen zu nicht eben, sondern concav oder convex, so ist die Contraction beziehungsweise kleiner oder grösser als sie unter gleichen Umständen bei einer ebenen Wand sein würde.

Nimmt man nun nach Weisbach's Versuchen für den Ausfluss aus Oeffnungen in dünner Wand als Mittelwerth $\alpha = {\cdot}64$ und $\varphi = {\cdot}97$, so ist dafür der Ausfluss-Coefficient $\mu = \varphi\alpha = {\cdot}62$.

Für den Ausfluss durch kurze cylinderische Ansatzröhren ist $\alpha = 1$ und wenn man $\varphi = {\cdot}816$ setzt, sofort als Mittelwerth $\mu = {\cdot}816$, wofür man gewöhnlich ·82 nimmt.

Für den Ausfluss aus conisch-convergenten Ansätzen nimmt der Coefficient μ für dieselbe Oeffnung und bei derselben Druckhöhe von ·83 bis ·95 zu, wenn der Convergenzwinkel von 0 bis nahe 14° wächst.

Um endlich noch der neuesten Versuche zu erwähnen, welche Professor Weisbach über den Ausfluss des Wassers bei sehr hohen Druckhöhen vorgenommen, so ergaben diese im Wesentlichen folgende Resultate.

Bei einer Druckhöhe über 10 Atmosphären war bei dem Ausflusse aus einer kreisförmigen Oeffnung von 1·01 Centim. Durchmesser in einer ebenen, dünnen Wand $\mu = {\cdot}6278$, dagegen bei quadratförmiger Oeffnung von ·003 Centim. Seite $\mu = {\cdot}6151$.

Für ein kurzes cylinderisches Ansatzrohr, 1·014 Centim. weit und 3 Centim. lang ohne innerer Abrundung war $\mu = {\cdot}5999$, sowie bei 6 Centim. Länge $\mu = {\cdot}6038$.

Für ein ähnliches solches Ansatzrohr, ebenfalls 1·014 Centim. weit und 3 Centim. lang, dagegen innen abgerundet, fand sich $\mu = \cdot 9543$, sowie bei einer Länge von 9 Centim. $\mu = \cdot 8933$.

Für ein conoidisches gut abgerundetes Mundstück von 1·002 Centim. Durchmesser war $\mu = \cdot 9935$.

Bei einem längeren düsenförmigen Rohr mit innerer Abrundung, von 3·8 Centim. innerer, sowie nahe 1 Centim. äusserer Weite, und von $14\frac{1}{2}$ Centim. Länge, ergab sich $\mu = \cdot 9971$.

Für eine kurze conisch-convergente Röhre, innen abgerundet und nach aussen cylinderisch verlaufend, von 1·012 Centim. Durchmesser, fand sich $\mu = \cdot 9984$.

Für ein kurzes conisches Rohr endlich, von 4 Centim. Länge und einem Convergenzwinkel von $7^0\,9'$, ferner innen $1\frac{1}{2}$ und aussen 1 Centim. weit, war $\mu = \cdot 9995$.

191. Wird die Flüssigkeit mittelst eines Kolbens, wie z. B. bei einer Druckpumpe oder Feuerspritze durch eine kleine Oeffnung hinausgetrieben, so sei, um die entsprechende Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Flüssigkeit austritt, A die Querschnittsfläche des Gefässes, a jene der Oeffnung, P der Druck auf den Kolben, $AB = h$ (Fig. 95) die anfängliche Druckhöhe und h' die Höhe einer Flüssigkeitssäule, derselben Gattung, welche über dem Kolben stehend denselben Druck P ausübt, also, wenn γ wieder das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit ist, $P = Ah'\gamma$; so ist im ersten Augenblicke die gesammte Druckhöhe $= h + h'$ und daher, wenn $\frac{a}{A}$ ein kleiner Bruch ist, die Ausflussgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g\,(h + h')}$ oder wegen $h' = \frac{P}{\gamma A} = \frac{p'}{\gamma}$, wenn man nämlich den auf die Flächeneinheit des Kolbens stattfindenden Druck durch p' bezeichnet, $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)}$. Ist dagegen der Druck auf die Flächeneinheit in der Tiefe der Oeffnung $BC = p$, also $p = \left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)\gamma$, so ist auch:

$$v = \sqrt{\left(2g\frac{p}{\gamma}\right)} \ldots (3);$$

die Ausflussgeschwindigkeit ist also der Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit (gewöhnlich ist h gegen h' ausser Acht zu lassen) direct und dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Wäre Quecksilber gerade 16 Mal so dicht als Wasser, so würde dieses bei gleichem Drucke 4 Mal langsamer als das Wasser ausfliessen. Ist die Luft 770 Mal leichter als das Wasser, so strömt diese bei gleicher Pressung nahe $27\frac{3}{4}$ Mal schneller als das Wasser aus u. s. w.

Es muss übrigens hier beim Hinausdrücken der Flüssigkeit noch auf die Widerstände aufmerksam gemacht werden, welche in diesem letzteren Falle durch den Kolben, in den übrigen Fällen aber durch die Druckhöhe der Flüssigkeit mit überwunden werden müssen.

Ist nämlich v die wirkliche der Druckhöhe h' entsprechende Ausflussgeschwindigkeit und φ der (vorige Nummer) entsprechende Geschwindigkeits-Coefficient, folglich $\frac{v}{\varphi}$ die theoretische der Höhe h entsprechende Ausflussgeschwindigkeit, so ist $h - h' = z_1$ diejenige Druckhöhe der Flüssigkeit, welche durch diese Hindernisse erschöpft, oder mit anderen Worten, welche zur Ueberwindung derselben verwendet wird. Man nennt diese Höhe z_1, analog mit jener z in §. 366 die Widerstandshöhe, und zwar ist, wegen $h = \frac{v^2}{2g\varphi^2}$ und $h' = \frac{v^2}{2g}$ sofort: $z_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \varepsilon_1 \frac{v^2}{2g}$, wobei der Coefficient:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \ldots (c)$$

nach Weisbach der Widerstands-Coefficient genannt werden kann.

Fliesst nun z. B. aus irgend einer Oeffnung dem Gewichte nach die Wassermenge M per Secunde aus, so ist zur Ueberwindung der erwähnten Hindernisse die Arbeit $Mz_1 = M\varepsilon_1 \frac{v^2}{2g}$ erforderlich, die sonach von der theoretischen Arbeit $Mh = \frac{Mv^2}{2g}$ verloren geht.

Was nun diesen Widerstands-Coefficienten ε_1 betrifft, so ist für Oeffnungen in einer dünnen Wand (vorige Anmerk.) der Geschwindigkeits-Coefficient im Mittel $\varphi = {\cdot}97$, daher $\varepsilon_1 = {\cdot}063$. Für kurze cylinderische Ansätze ist $\varphi = \mu = {\cdot}815$, mithin $\varepsilon_1 = {\cdot}505$. Für kurze nach innen abgerundete oder nach dem contrahirten Wasserstrahl geformte Röhren ist wieder wie in dünner Wand $\varphi = {\cdot}97$, daher $\varepsilon_1 = {\cdot}063$.

Bei Röhrenleitungen nimmt man gewöhnlich für das in den Hauptbehälter einmündende Röhrenstück den Coefficienten

$$\varepsilon_1 = {\cdot}505.$$

Ausfluss aus communicirenden Gefässen.

192. Sind mit einem oben offenen Gefässe AN (Fig. 98) mehrere verschlossene Gefässe von beliebiger Weite mit einander verbunden und communiciren diese durch die Oeffnungen a_n, $a_{n-1}, \ldots a_2$ mit einander; so lässt sich die aus der untersten Oeffnung a_1 ausfliessende Flüssigkeit, z. B. Wasser, sobald alle Gefässe gefüllt sind und der Beharrungsstand eingetreten ist, ferner unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Wasserspiegels AB auf folgende Weise bestimmen.

Es seien von unten hinauf gezählt $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Ausflussöffnungen, und zwar wenn Contractionen stattfinden, im kleinsten Querschnitt genommen; $v_1, v_2, \ldots v_n$ die in diesen Querschnitten stattfindenden Aus- oder Durchflussgeschwindigkeiten, $h_1, h_2, \ldots h_n$ die zugehörigen Höhen; $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Querschnitte der Gefässe in CD, $EF, \ldots MN$, in welchen sich die Mündungen $a_1, a_2, \ldots a_n$ befinden; $V_1, V_2, \ldots V_n$ die Geschwindigkeiten der Wasserschichten in diesen Querschnitten, sowie $H_1, H_2, \ldots H_n$ die zugehörigen Höhen; so hat man nach der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$v_2 = \frac{a_1}{a_2} v_1, \quad v_3 = \frac{a_1}{a_3} v_1, \ldots v_n = \frac{a_1}{a_n} v_1, \quad V_1 = \frac{a_1}{A_1} v_1, \quad V_2 = \frac{a_1}{A_2} v_1, \ldots$$

$$V_n = \frac{a_1}{A_n} v_1, \quad h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g}, \ldots h_n = \frac{v_n^2}{2g}, \quad H_1 = \frac{V_1^2}{2g}, \ldots H_n = \frac{V_n^2}{2g}.$$

Um aber die Wasserschichte in CD oder A_1 von der Geschwindigkeit V_1 auf jene v_1 zu bringen, ist die Druckhöhe $\frac{v_1^2 - V_1^2}{2g} = h_1 - H_1$ nothwendig; ebenso sind $h_2 - H_2, \ldots h_n - H_n$ die erforderlichen Druckhöhen, um die Wasserschichten $A_2, \ldots A_n$ von den Geschwindigkeiten $V_2, \ldots V_n$ auf jene $v_2, \ldots v_n$ zu bringen; da endlich, um der über der obersten Oeffnung a_n stehenden Schichte A_n die Geschwindigkeit V_n zu ertheilen, noch ausserdem die Geschwindigkeitshöhe H_n nothwendig ist; so hat man, wenn die ganze Druckhöhe $BS = h$ gesetzt wird, sofort:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n - (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) + H_n,$$

oder wenn man auf die Geschwindigkeiten übergeht und annimmt, dass der Druck auf die Oberfläche AB und gegen die Oeffnung a_1 (auf die Flächeneinheit) beziehungsweise durch die Wassersäulenhöhen h' und h'' ausgedrückt wird, auch (nach der gewöhnlichen Ansicht):

$$h + h' - h'' = \frac{1}{2g}[v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 - (V_1^2 + V_2^2 + \ldots V_n^2) + V_n^2],$$

oder wenn man auch noch für $v_2, \ldots v_n, V_1, V_2, \ldots V_n$ die vorigen Werthe setzt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left\{\left(\frac{a_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{A_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right\} + \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right],$$

oder nach der kürzeren üblichen Bezeichnung, wenn man noch a_1^2 als Factor nimmt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}\right] \ldots (\delta).$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$v_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\left[\frac{2g(h + h' - h'')}{\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}}\right]}$$

wobei für gewöhnlich $h' = h''$ gesetzt werden kann.

Endlich ist die per Secunde ausfliessende Wassermenge $M = a_1 v_1$.

Anmerkung. Nach einer anderen von Navier ausgehenden Ansicht kann man auch folgenden Weg einschlagen.

Verfolgt man die am Wasserspiegel AB befindliche Schichte vom Querschnitt A und unendlich kleiner Höhe, deren unendlich kleine Masse mit m bezeichnet werden soll, bei ihrer Bewegung bis zur Ausflussöffnung a_1, wo diese Masse die Geschwindigkeit v_1 erhält, während sie in AB nur jene $\frac{a_1}{A} v_1$ besitzt, so ist zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeitsänderung die Wirkungsgrösse (§. 227):

$$W = \frac{m}{2g}\left(v_1^2 - \frac{a_1^2}{A^2} v_1^2\right) = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

erforderlich.

Da ferner diese Masse m, nachdem sie die Oeffnung a_n passirt hat, plötzlich durch die vorhandene Erweiterung von der Geschwindigkeit v_n auf die kleinere V_n und zwar indem die unendlich kleine Masse m auf die endliche, unter MN befindliche Wassermasse M stösst, gebracht wird, so entsteht, wie bei dem Stosse unelastischer Körper, wobei m gegen M verschwindet (§. 243), ein Verlust an lebendiger Kraft $= m(v_n - V_n)^2$ oder an Wirkungsgrösse

$$= \frac{m}{2g}(v_n - V_n)^2 = \frac{m}{2g}\left(\frac{a_1}{a_n} v_1 - \frac{a_1}{A_n} v_1\right)^2 = \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A_n}\right)^2.$$

Auf gleiche Weise ist der Verlust an Wirkungsgrösse, beim Durchgange der genannten Schichte oder Masse m durch die Oeffnungen $a_{n-1}, \ldots a_2$

wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen von v_{n-1} in $V_{n-1}, \ldots v_2$ in V_2, sofort:

$$\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{A_{n-1}}\right)^2, \ldots \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2$$

so dass man die Summe aller dieser Verluste an Arbeit oder Wirkung durch $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2$ ausdrücken kann, welche von der Arbeit oder Wirkung mh der von der Höhe $BS = h$ herabsinkenden Wasserschichte m abgezogen die obige Wirkungsgrösse W als Rest gibt; man hat nämlich:

$$mh - \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2 = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1-\frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

und daraus folgt, wenn man auch wieder wie oben $h + h' - h''$ statt h setzt:

$$v_1 = \sqrt{\left[\frac{2g(h+h'-h'')}{1-\frac{a_1^2}{A^2}+a_1^2\,\Sigma\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{A_2}\right)^2}\right]}.$$

Diese hier entwickelten Gleichungen gelten übrigens auch für eine in Fig. 99 dargestellte Anordnung der Gefässe.

193. Communiciren mehrere oben offene Gefässe AK, BL, DM, .. (Fig. 100) mit einander durch die Seitenöffnungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche im Vergleiche zur Grösse der Gefässe so klein sein sollen, dass die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser zu den Oeffnungen gelangt, vernachlässigt werden können, so findet man die im Beharrungsstande aus der letzten Oeffnung $a_n = a$ ausfliessende Wassermenge, die also auch in gleicher Zeit in das erste Gefäss wieder zufliessen muss, auf folgende Art.

Es sei M die in jeder Secunde in das erste Gefäss AK zufliessende Wassermenge, ferner der Beharrungsstand bereits eingetreten, so dass also eine gleiche Wassermenge M per Secunde aus einem Gefässe in das andere überfliesst und daher die Wasserspiegel AB, CD, EF, .. zu einem unveränderlichen Stande gelangt sind; in diesem Zustande seien die Druckhöhen $BC = h_1$, $DE = h_2$, $FG = h_3, \ldots$, sowie die lothrechte Höhe des Wasserspiegels AB über der Mitte der letzten Ausflussöffnung a (oder wenn auch diese unter Wasser ausmündet, bis zum Spiegel des Unterwassers) $= h$, so hat man nach §. 353 die theoretischen Ausflussmengen per Secunde der Reihe nach $M_1 = a_1\sqrt{2gh_1}$, $M_2 = a_2\sqrt{2gh_2}$, $M_3 = a_3\sqrt{2gh_3}, \ldots$ und daraus wegen $M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M$ die Druckhöhen:

$$h_1 = \frac{M^2}{2ga_1^2},\; h_2 = \frac{M^2}{2ga_2^2}, \ldots$$

Da nun $h_1 + h_2 + h_3 + . . = h$ ist, so folgt:

$$h = \frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \ldots + \frac{1}{a^2}\right),$$

folglich:

$$M = \sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a^2}}\right)}.$$

Sind alle Oeffnungen gleich gross, nämlich $= a$, und ihre Anzahl $= n$, so erhält man:

$$M = a\sqrt{\left(\frac{2gh}{n}\right)},$$

so dass also bei derselben Druckhöhe h die ausfliessende Wassermenge M um so kleiner wird, je grösser n, d. i. die Anzahl der Oeffnungen ist.

Anmerkung 1. Um (im Falle die Oeffnungen nicht so erweitert und abgerundet sind, dass keine Contraction stattfindet) die Contraction dabei zu berücksichtigen, muss man wieder $m_1 a_1$, $m_2 a_2$, . . ma statt a_1, a_2, . . a setzen, wenn m_1, m_2, . . m die entsprechenden Coefficienten sind.

Anmerkung 2. Münden die oben geschlossenen Gefässe, wie in Fig. 99 a, ohne Zwischenwände ineinander ein und nehmen diese in der Weite vom ersten bis zum letzten immer mehr ab, so dass das letzte Gefäss das engste ist, so darf man in der obigen Formel (δ) (Nr. **192**) nur $a_1 = a_2 = A_1$, $a_3 = A_2$, $a_4 = a_n = A_3 = A_{n-1}$ setzen. Man erhält dadurch, $h' = h''$ genommen:

$$h = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_4^2}\right] = \frac{v_1^2}{2g},$$

so dass also die Zwischengefässe auf die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe der letzten Ausflussöffnung a_1 keinen Einfluss haben, oder die einmal gewonnene Geschwindigkeit nicht mehr verloren geht.

Befindet sich dagegen, wie in Fig. 99 b, zwischen dem letzten Gefäss ein engeres, so dass man für die dargestellte Anordnung $a_1 = A_1$, $a_2 = a_3 = A_2$ und $a_4 = A_3$, folglich aus der genannten Formel $h = \frac{v_1^2}{2g}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ erhält, so folgt, weil $\frac{a_1}{a_2}v_1$ die der Ausflussöffnung a_2 entsprechende Geschwindigkeit ist, dass die erforderliche Druckhöhe h nicht nach der, der letzten Ausflussöffnung a_1, sondern nach jener, der engsten Oeffnung $a_2 = a_3$ zukommenden Geschwindigkeit, wovon wieder ein Theil verloren geht, bemessen oder bestimmt werden muss.

Seitenausfluss bei geringen Druckhöhen.

(§. 354.)

194. Befindet sich die Ausflussöffnung in einer verticalen Wand und denkt man sich die Oeffnung in unendlich viele und schmale horizontale Streifen getheilt, so wird für einen solchen, um die Tiefe x unter dem Wasserspiegel liegenden Streifen von der Breite $= y$, also Flächeninhalt $= y\,\mathrm{d}x$ in der Zeiteinheit, bei constantem Wasserspiegel die Wassermenge $y\,\mathrm{d}x\sqrt{2gx}$ ausfliessen. Hieraus folgt nun für die aus der ganzen Oeffnung in der Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge:

$$M = \int y\,\mathrm{d}x\sqrt{2gx}\ldots(1),$$

wobei das Integrale von dem kleinsten Werth von x bis zum grössten der Ausflussöffnung zu nehmen ist.

Ist F die Grösse der Ausflussöffnung, so ist innerhalb derselben Grenzen: $F = \int y\,\mathrm{d}x\ldots(2)$.

Man nennt den Quotienten oder das Verhältniss $\frac{M}{F}$ die mittlere Ausflussgeschwindigkeit; wird diese durch V bezeichnet, so ist:

$$V = \frac{\sqrt{2g}\int y\,\mathrm{d}x\sqrt{x}}{\int y\,\mathrm{d}x}\ldots(3).$$

Die zu dieser Geschwindigkeit gehörige Druckhöhe heisst die mittlere Druckhöhe der Ausflussöffnung, bezeichnet man dieselbe durch H, so ist:

$$H = \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\int y\,\mathrm{d}x\sqrt{x}}{\int y\,\mathrm{d}x}\right)^2\ldots(4).$$

Mit diesen Werthen ist dann auch die Ausflussmenge:

$$M = F\sqrt{2gH}\ldots(5).$$

Anmerkung. Obschon für den Seitenausfluss die Hypothese des Parallelismus der Schichten nicht in aller Strenge richtig sein mag, so weicht sie doch auch hier (wie bei dem Ausflusse aus Bodenöffnungen) von der Wahrheit nicht so weit ab, als dass man dieselbe den Entwickelungen, wie es hier überall stillschweigend geschieht, nicht auch zum Grunde legen dürfte, wenn nur dabei die Ausflussöffnung nicht zu gross gegen den Querschnitt des Gefässes vorausgesetzt wird.

195. Ist z. B. die Ausflussöffnung ein Rechteck AD (Fig. 101) von der horizontalen Breite $AB = b$ und verticalen Höhe $AC = a$, und liegen die beiden Kanten AB und CD beziehungsweise um die Tiefen d und d' unter dem Wasserspiegel, so hat man nach der vorigen Formel (1) für die in der Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge, da hier $y = b$ ist:

$$M = b\sqrt{2g}\int_d^{d'} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}b\sqrt{2g}\cdot\left(d'^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}\right),$$

oder da nach der Relation (4) der vorigen Nummer hier die mittlere Druckhöhe

$$(\alpha) \quad H = \frac{4}{9}\left(\frac{d'^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}{d' - d}\right)^2 = \frac{4}{9a^2}(d'^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}})^2$$

ist, auch: $\quad (\beta) \quad M = ab\sqrt{2gH} = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\,.(d'^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}).$

Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunctes der Oeffnung vom Wasserspiegel durch h, so ist $d' = h + \frac{1}{2}a$ und $d = h - \frac{1}{2}a$, mithin:

$$d'^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}ah^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{96}\frac{a^2}{h^2} - \frac{1}{2048}\frac{a^4}{h^4} - \cdot\cdot\right)$$

und sonach auch die mittlere Druckhöhe, wenn man diesen Werth in den vorigen Ausdruck von H substituirt und gehörig entwickelt:

$$H = h\left(1 - \frac{1}{48}\frac{a^2}{h^2} - \frac{1}{1152}\frac{a^4}{h^4} - \cdot\cdot\right),$$

woraus sofort folgt, dass jene horizontale Schichte, in welcher die mittlere Geschwindigkeit stattfindet, nicht durch den Schwerpunct der Oeffnung geht, sondern etwas höher liegt.

Liegt die obere Kante AB des Rechteckes im Wasserspiegel selbst, so ist wegen $d = o$, $d' = a$ und $h = \frac{1}{2}a$, sofort $H = \frac{4}{9a^2}d'^3 = \frac{4}{9}a$ und damit

$$M = ab\sqrt{2gH} = \tfrac{2}{3}ab\sqrt{2ga} \text{ (vergl. §. 354).}$$

In diesem Falle ist die Differenz $h - H = \frac{1}{2}a - \frac{4}{9}a = \frac{1}{18}a$.

Anmerkung. Steht das Wasser im Gefässe nicht ruhig, sondern kommt dasselbe gegen die Ausflussöffnung (wie diess z. B. bei einem Ueberfall stattfindet) schon mit der Geschwindigkeit c an, wofür die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g} = u$ ist; so muss man (§. 355) in der obigen Formel (β) für die theoretische Ausflussmenge, $d + u$ und $d' + u$ statt d und d' setzen. Dadurch erhält aber auch die mittlere Druckhöhe H in der obigen Relation (α) den Werth:

$$H = \frac{4}{9}\left[\frac{(d' + u)^{\frac{3}{2}} - (d + u)^{\frac{3}{2}}}{d' - d}\right]^2.$$

Liegt nun, wie bei Ueberfällen, die obere Kante des Rechteckes im Wasserspiegel und ist die Höhe der über den Schweller fliessenden Wasserschichte (bei ungesenktem Wasserspiegel) $= h$, so ist $d = 0$ und $d' = h$, mithin für einen solchen Ueberfall die mittlere Druckhöhe:

$$H = \frac{4}{9}\left[\frac{(h + u)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}}{h}\right]^2$$

sowie die in der Zeiteinheit über denselben fliessende theoretische Wassermenge:

$$M = bh\sqrt{2gH} = \tfrac{2}{3}b\sqrt{2g}\,.[(h + u)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}] \ldots (\gamma)$$

(vergl. §. 356).

Was dabei die Höhe h betrifft, so muss diese etwas oberhalb der Ueberfallsschwelle, oder wenn man diese unmittelbar über der Schwelle nehmen und den Einfluss der Senkung des Wasserspiegels durch den betreffenden Reductions-Coefficienten berücksichtigen will, wenigstens nicht in der Mitte der Breite b, sondern mehr gegen beide Seiten zu messen, da sich bekanntlich der Wasserspiegel in der Mitte mehr einsenkt und über der Schwelle keine Ebene, sondern eine concave Fläche bildet.

196. Hat man statt dem Rechteck ein rechtwinkeliges Dreieck ACD (Fig. 102), dessen Spitze A im Wasserspiegel und Cathete CD horizontal liegt, und ist wieder $AC = h$, $CD = b$, $AP = x$, $PM = y$ und $Pp = \mathrm{d}x$, so ist $\mathrm{d}M = y\,\mathrm{d}x\sqrt{2gx}$, oder wegen $y = \frac{b}{h}x$ auch $\mathrm{d}M = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\,.\,x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$, folglich:

$$M = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\int_0^h x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \tfrac{2}{5}\,bh\sqrt{2gh}.$$

Für die umgekehrte Lage, d. i. wenn CD im Wasserspiegel liegt, folgt wegen $y = \frac{b}{h}(h - x)$ sofort $\mathrm{d}M = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\,(h - x)$ und daraus:

$$M = \tfrac{4}{15}\,bh\sqrt{2gh}.$$

Beide Querschnitte zusammen geben die Wassermenge von $\frac{2}{5} + \frac{4}{15}$, d. i. wieder von $\frac{2}{3}\,bh\sqrt{2gh}$, wie es sein soll.

Für die trapezförmige Oeffnung (Fig. 103), wovon die eine parallele Seite AB im Wasserspiegel liegen soll, sei $AB = B$, $CD = b$, $EC = FD = h$, $AE = b'$ und $BF = b''$, so ist nach dem unmittelbar Vorhergehenden die per Secunde ausfliessende Wassermenge $M = (\frac{2}{3}b + \frac{4}{15}b' + \frac{4}{15}b'')\,h\sqrt{2gh}$, oder wegen: $\frac{4}{15}(b' + b'') = \frac{4}{15}(B - b)$, wenn man reducirt:

$$M = \tfrac{2}{15}(3b + 2B)\,h\sqrt{2gh}.$$

Ebenso einfach lässt sich M auch für die umgekehrte Lage des Trapezes bestimmen.

197. Ist die Oeffnung ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunct um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel liegt, so nehme man in der betreffenden verticalen Seitenwand die durch den Mittelpunct des Kreises gezogene Verticallinie zur Abscissenachse und den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; dann schliessen zwei unmittelbar aufeinander folgende Ordinaten die Fläche $2y\,\mathrm{d}x$ ein, und wenn diese vom Mittelpunct abwärts den Abstand x haben, so liegt dieses Flächenelement um die Tiefe $h + x$ unter dem Wasserspiegel und es ist die per

Secunde aus dieser unendlich niederen Oeffnung ausfliessende Wassermenge $dM = 2y\,dx.\sqrt{2g(h+x)}$ oder wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ auch $dM = 2\sqrt{2gh}.dx\sqrt{(r^2-x^2)}.\sqrt{\left(1+\frac{x}{h}\right)}$, oder wenn man $\sqrt{\left(1+\frac{x}{h}\right)} = \left(1+\frac{x}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ in die bekannte Reihe auflöst, auch:

$$dM = 2\sqrt{2gh}.dx\sqrt{(r^2-x^2)}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{h}\right)-\frac{1}{2.4}\left(\frac{x}{h}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{h}\right)^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{x}{h}\right)^4+..\right].$$

Integrirt man diese Gleichung und nimmt die sämmtlichen Integrale $\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$, $\frac{1}{2h}\int x\,dx\sqrt{(r^2-x^2)}$ u. s. w. innerhalb der Grenzen von $x = -r$ bis $x = +r$, so erhält man nach den bekannten Formeln, wenn man Kürze halber $r^2 - x^2 = X^2$ setzt:

$$\int_{-r}^{+r} dx\sqrt{X} = \frac{r^2}{2}\pi, \quad \int_{-r}^{+r} x\,dx\sqrt{X} = 0, \quad \int_{-r}^{+r} x^2 dx\sqrt{X} = \frac{r^4}{8}\pi,$$
$$\int_{-r}^{+r} x^3 dx\sqrt{X} = 0, \quad \int_{-r}^{+r} x^4 dx\sqrt{X} = \frac{r^6}{16}\pi, \quad \text{u. s. w.},$$

folglich, wenn man substituirt:

$$M = 2\sqrt{2gh}.\frac{r^2\pi}{2}\left[1-\frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2-\frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4-..\right],$$

oder wenn man diese von der Einheit nur wenig abweichende convergente Reihe mit R und die Kreis- oder Ausflussöffnung $r^2\pi$ mit F bezeichnet:

$$M = FR\sqrt{2gh}.$$

Für die mittlere Druckhöhe findet man:

$$H = h\left(1-\frac{1}{16}\frac{r^2}{h^2}-\frac{9}{1024}\frac{r^4}{h^4}-..\right).$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so wird wegen $h = r$ sofort:

$$M = F\sqrt{2gh}\left(1-\frac{1}{32}-\frac{5}{1024}-..\right)$$

oder nahe $\quad M = \cdot 964\,F\sqrt{2gh} = \cdot 964\,F\sqrt{2rg}.$

Uebrigens kann man in jenen Fällen, in welchen $h > r$ ist, ohne Fehler $R = 1$, also $M = F\sqrt{2gh}$ setzen, d. h. den Abstand h des Mittelpunctes vom Wasserspiegel als die mittlere Druckhöhe gelten lassen.

Anmerkung. Es ist hier der Ort, einige Bemerkungen über die Anlagen von Wehren zu machen, weil es dabei vorzüglich auf die Bestimmung der über ein Wehr abfliessende Wassermenge ankommt.

Bekanntlich erbaut man Wehren um den Wasserspiegel eines Flusses an gewissen Stellen zu erhöhen, und zwar entweder 1. um sich ein künstliches Gefälle als Betriebskraft für technische Zwecke zu verschaffen;

2. wenn das schon vorhandene natürliche Gefälle nicht hinreichend ist, dieses also vergrössert werden soll; 3. wenn in einem Bach oder Fluss auf eine kurze Strecke seines Laufes ein starkes Gefäll (eine Stromschnelle) vorhanden ist, welches auf einen gewissen Punct concentrirt werden soll; 4. wenn endlich die natürlichen Veränderungen oder Schwankungen im Wasserstande aufgehoben werden sollen. Die grösste Stauung, welche man durch Wehren bewirkt, beträgt in der Regel nicht mehr als 8 Fuss; auch legt man diese nur dort an, wo der Wasserspiegel eines Flusses auf eine längere Strecke über seinen natürlichen Stand ohne Gefahr einer Ueberschwemmung des anliegenden Terrains gehoben werden darf.

Man nennt ein Wehr ein Ueberfallswehr, wenn das Wasser frei über den höchsten Schweller wegfliessen kann, im Gegensatze von Durchlass- oder Schleussenwehren.

Bei der Stauung, welche das fliessende Wasser durch jeden solchen Einbau erleidet, nennt man die Höhe des aufgestauten Wassers über den ursprünglichen noch ungestauten Wasserspiegel, unmittelbar vor dem Wehr die Stauhöhe, sowie die Länge vom Wehr aufwärts gerechnet, soweit sich die Wirkung der Stauung erstreckt, die Stauweite.

Die Ueberfallswehren, auf die wir uns hier beschränken müssen, werden in vollkommene und unvollkommene oder Grundwehren getheilt; bei den ersteren liegt die Krone A, wie in Fig. 103a über den noch ungestauten Wasserspiegel des Flusses, während diese bei den letzteren wie in Fig. 103b unter diesem Wasserspiegel liegt; endlich legt man auch Wehren an, bei welchen die Krone geradezu in den ungestauten Wasserspiegel zu liegen kommt.

Nach der in Nr. **194** in der Anmerkung aufgestellten Formel (γ) hat man für die in der Zeiteinheit über einen freien Ueberfall fliessende Wassermenge den Ausdruck $M = \frac{2}{3} n b \sqrt{2g} \, . \, [(h+u)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}]$, wobei b die Breite des Ueberfalles, h die Höhe der über den Schweller fliessende Wasserschichte (bei ungesenktem Spiegel), $u = \frac{c^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers entsprechende Höhe und n den Reductions-Coefficienten bezeichnet. Nach der Angabe in §. 356 ist unter der Voraussetzung, dass der Ueberfallsschweller scharf abgekantet (abgeschrägt) ist, der mittlere Werth von $\frac{2}{3} n = {\cdot}444$; da jedoch bei Wehren die Krone nicht scharf, sondern eben oder abgerundet ist, wodurch die Contraction auch von unten aufgehoben wird, so kann man nach Eytelwein diesen Coefficienten auf ·57 erhöhen.

Lässt man in der obigen Formel die Geschwindigkeitshöhe u aus, was namentlich für höhere Stauungen, durch welche die Geschwindigkeit c bedeutend vermindert wird, ohne Fehler geschehen kann; so erhält man einfacher:

$$M = {\cdot}57 b h \sqrt{2gh}.$$

Ist nun h die Höhe der Stauung, welche durch das Wehr hervorgebracht werden soll, und b die Breite des Wehres (immer gleich oder grösser als die Breite des Flusses), sowie M die Wassermenge, welche in der Zeiteinheit über das Wehr fliessen soll, so muss man, je nachdem M kleiner, grösser oder gleich $\cdot57\,b\,h\sqrt{2gh}$ sein soll, beziehungsweise ein vollkommenes Ueberfall-, ein Grund-, und endlich ein Wehr anlegen, bei welchem die Wehrkrone in den ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel zu liegen kommt.

In der Regel wird man für Stauhöhen bis höchstens 3 Fuss ein Grundwehr, für Höhen jedoch bis und über 6 Fuss ein vollkommenes Ueberfallswehr anlegen.

Setzt man, zur Bestimmung der Höhe, welche man einem vollkommenem Ueberfallwehr (Fig. 103 *a*) geben muss, die Stauhöhe $= h$, die Höhe der Wehrkrone über dem ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel $= h'$, sowie die Tiefe der Wehrkrone unter dem gestauten Wasserspiegel $= x$, so ist nach der vorigen vereinfachten Formel (mit Auslassung von u) $M = \cdot57\,b\,x\sqrt{2gx}$ und daraus:

$$x = \left(\frac{M}{\cdot57\,b\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} = \cdot367\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

folglich die Stauhöhe:

$$h = h' + \cdot367\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Wäre umgekehrt die Stauhöhe h gegeben, so könnte man hieraus die Höhe h' berechnen.

Ist bei einem Grundwehr (Fig. 103 *b*) wieder h die Höhe, auf welche der ursprüngliche Wasserspiegel BC gestaut werden soll, so wie h' die Tiefe der Wehrkrone unter diesem ursprünglichen Wasserspiegel, so muss man sowohl die über BC fliessende, sowie auch jene Wassermenge für sich berechnen, welche durch AB fliesst; erstere von der Höhe h fliesst wie über einen Ueberfall, letztere von der Höhe h' durch eine untergetauchte Oeffnung.

Für die Zeiteinheit ist daher wieder die erstere Wassermenge

$$M' = \cdot57\,b\,h\sqrt{2gh},$$

und die letztere, wenn man den Reductions-Coefficienten (§. 353) mit $\cdot62$ annimmt:

$$M'' = \cdot62\,b\,h'\sqrt{2g(h+u)},$$

daher ist die gesammte über die Wehrkrone fliessende Wassermenge, wenn man auch in M'' die Höhe u wieder gegen jene h auslässt:

$$M = \cdot57\,b\,h\sqrt{2gh} + \cdot62\,b\,h'\sqrt{2gh},$$

woraus sofort

$$h' = \frac{M}{\cdot62\,b\sqrt{2gh}} - \cdot92\,h$$

folgt. Auch lässt sich hieraus h bestimmen, wenn h' gegeben ist.

Liegt endlich die Wehrkrone im ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so ist $M = \cdot57\,b\,h\sqrt{2gh}$ und diese Wassermenge muss nach der obigen Bemerkung genau jener gleich sein, welche wirklich über das Wehr abfliessen soll.

Was schliesslich die Stauweite, d. i. die Entfernung, bis auf welche sich die Stauung stromaufwärts erstreckt, anbelangt, so ist deren Kenntniss ebenfalls von Wichtigkeit, weil dadurch nicht nur Ueberschwemmungen herbeigeführt, sondern auch für die aufwärts liegenden Werke die Gefälle vermindert und diese in ihrem Betriebe gestört werden können.

Obschon die genaue Bestimmung dieser Stauweite ziemlich weitläufige Entwickelungen erfordert, so kann man diese für gewöhnlich doch ganz einfach und genau genug durch $h \, Cot. \alpha$ ausdrücken, wenn h die Stauhöhe und α den Neigungswinkel bezeichnet, welchen die Wasserfläche vor dem Wehr oder Einbau mit dem Horizont bildet.

Ausfluss bei *veränderlicher* Druckhöhe.

(§. 358.)

198. Es sei AOB (Fig. 104) der verticale Durchschnitt eines z. B. mit Wasser bis AB gefüllten Gefässes von veränderlichem Querschnitt und mit einer horizontalen Bodenöffnung ab versehen. Nimmt man an, der Wasserspiegel AB sei während der Zeit t, diese vom Augenblicke an gerechnet, als der Ausfluss beginnt, bis MM' und dann in dem darauf folgenden Zeitelemente $\mathrm{d}t$ bis mm' gesunken; nimmt man ferner die durch den tiefsten Punct O gezogene Verticallinie OC zur Abscissenachse und setzt $OC = h$, $OP = x$ also $Pp = \mathrm{d}x$, so kann man die Druckhöhe x während der Zeit $\mathrm{d}t$, d. i. während der Spiegel um $Pp = \mathrm{d}x$ herabsinkt, und folglich die momentane Ausflussgeschwindigkeit als constant ansehen, und man erhält daher, wenn a die Fläche der Ausflussöffnung ist und dabei wieder vorausgesetzt wird, dass dieselbe gegen die freie Oberfläche des Wassers sehr klein ist (Nr. **189**), für die theoretische in der Zeit $\mathrm{d}t$ ausfliessende Wassermenge (§. 344):

$$\mathrm{d}M = a \, \mathrm{d}t \sqrt{2gx}.$$

Ist aber die Querschnittfläche des Gefässes an dieser Stelle $MM' = U$, so ist auch $\mathrm{d}M = U\mathrm{d}x$, folglich mit Rücksicht darauf, dass x abnimmt, wenn t zunimmt ($\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}t$ daher verschiedene Zeichen erhalten müssen), die Gleichung der Continuität (Nr. **187**):

$$(\alpha) \ldots a \, \mathrm{d}t \sqrt{2gx} = - U\mathrm{d}x, \text{ woraus } \mathrm{d}t = - \frac{U x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x}{a\sqrt{2g}} \text{ folgt.}$$

Die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, ist daher:

$$t = - \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_h^{h'} U x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} U x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \ldots (1).$$

Da für die Entleerungszeit T, $h' = 0$ gesetzt werden muss, so ist $$T = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int_0^h U x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \ldots (2).$$

Anmerkung. Was die durch diese Relation (2) ausgedrückte Entleerungszeit T anbelangt, so darf diese für die Anwendung, natürlich mit Einführung des Reductions-Coefficienten (indem na statt a zu setzen ist) mehr nur als genäherter Werth angesehen werden, indem die der Entwickelung dieser Formel stillschweigend zum Grunde liegende Bedingung, dass beim allmäligen Herabsinken des Wasserspiegels, selbst wenn die Druckhöhe schon unendlich klein geworden, keine Störungen durch Einsenkungen oder Wirbeln in der Mitte desselben entstehen, in der Wirklichkeit niemals vorhanden ist. Eine genügende Uebereinstimmung der Formel (1) für die Zeit t mit den Beobachtungen findet daher nur in solange statt, als sich beim Herabsinken des Wasserspiegels derselbe noch um eine gewisse Höhe über der Ausflussöffnung befindet.

199. Ist der Querschnitt des Gefässes constant und $= A$, so hat man nach der Formel (1):

$$t = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^h x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

(§. 359, Gleichung 2) und nach der Formel (2):

$$T = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_0^h x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} \sqrt{h}$$

(§. 358, Gleichung 1).

200. Ist das Gefäss durch Umdrehung der Curve AMO um die Achse CO entstanden, so ist, wenn man die zu x gehörige Ordinate $PM = y$ setzt, $U = y^2\pi$, wodurch die vorigen Gleichungen (1) und (2) in die nachstehenden übergehen:

$$(3)\quad t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^h y^2 x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad (4)\quad T = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_0^h y^2 x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x.$$

201. So hat man z. B. wenn AMO eine gerade Linie ist, für den Ausfluss aus einem kegelförmigen Gefässe, vom Halbmesser $CA = CB = r$ und der Höhe $CO = h$, nach diesen Formeln (3) und (4), wegen $y = \frac{r}{h} x$ sofort:

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_{h'}^h x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \frac{r^2}{h^2} (h^2\sqrt{h} - h'^2\sqrt{h'})$$

und $$T = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} r^2 \sqrt{h} = \frac{6}{5} \frac{V}{a\sqrt{2gh}},$$

wenn man nämlich den Inhalt des Gefässes $\frac{1}{3} r^2 \pi h = V$ setzt.

Würde die Druckhöhe h nicht abnehmen, so würde ein gleiches Volumen V schon in der Zeit $T' = \frac{V}{a\sqrt{2gh}}$ ausfliessen, also ist $T = \frac{6}{5}T'$.

202. Ist die Curve AMO ein Kreisbogen vom Halbmesser r, also das Gefäss kugelförmig, so ist wegen $y^2 = 2rx - x^2$, nach der Formel (3):

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{1}{2}} dx (2rx - x^2), \text{ d. i.}$$

$$t = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}} \left[\tfrac{2}{3} r (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) - \tfrac{1}{5}(h^{\frac{5}{2}} - h'^{\frac{5}{2}})\right]$$

und nach der Formel (4), die ganze Ausflusszeit:

$$T = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}} \left(\tfrac{2}{3} r h^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5} h^{\frac{5}{2}}\right).$$

Für die volle Halbkugel wird wegen $h = r$:

$$T = \frac{14}{15} \frac{\pi r^{\frac{5}{2}}}{a\sqrt{2g}} = \frac{7}{5} \frac{V}{a\sqrt{2rg}},$$

wenn man den Inhalt $\frac{2}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Für die ganze gefüllte Kugel wird, wegen $h = 2r$:

$$T = \frac{16}{15} \frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{2g}} r^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{2rg}} V,$$

wenn man den Inhalt der Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Anmerkung. Es unterliegt keinem Anstande, auf dem angedeuteten Wege noch die Ausflusszeit aus vielen anderen regelmässigen Gefässen zu finden. Bei irregulären Gefässen muss man zur Näherungsmethode Zuflucht nehmen.

Auch versteht es sich von selbst, dass man, um auf die wirkliche Ausflussmenge überzugehen, in allen diesen Formeln wieder na für a setzen muss, wenn n den entsprechenden Contractions- oder Reductions-Coefficienten bezeichnet.

Endlich lässt sich mit Hilfe der obigen Gleichung (1) in Nr. **198** auch die in der Zeit t ausfliessende Wassermenge $M = \int_{h'}^{h} U dx$ finden. So ist z. B. für jenen Fall (Nr. **199**), in welchem der Querschnitt des Gefässes constant, nämlich $U = A$ ist, sofort $M = A \int_{h'}^{h} dx = A(h - h')$. Drückt man nun aus dem für diesen Fall gefundenen Werth von

$$t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

die Höhe h' aus und setzt dessen Werth in den vorigen Ausdruck von M, so erhält man auch:

$$M = at\sqrt{2gh} - \frac{a^2 t^2 g}{2A},$$

in welchem Ausdrucke der erste Theil offenbar nichts anderes, als die in der Zeit t ausfliessende Wassermenge bei einer constanten Druckhöhe h ist.

203. Um endlich auch ein Beispiel für den Ausfluss aus einem irregulären Gefässe zu entwickeln, wollen wir die obigen Formeln auf das Ausleeren von Teichen anwenden.

Da sich in diesem Falle das bestimmte Integral $\int_{h'}^{h} \frac{U}{\sqrt{x}} dx$ der Formel (1) in Nr. **198**, indem man U nicht als eine bestimmte Function von x ausdrücken kann, nur näherungsweise und zwar am besten nach der Simpson'schen Formel (siehe auch §. 214) berechnen lässt, so theile man die Höhe $h-h'$, um welche der Wasserspiegel während der Zeit t herabsinkt, in n gleiche Theile, und denke sich durch die entstehenden Theilungspuncte $0, 1, 2 \ldots n$ (von h' aufwärts bis h gezählt) horizontale Schnitte gelegt, bezeichne die Flächeninhalte dieser Querschnitte durch $U_0, U_1, U_2, \ldots U_n$, sowie die Abstände derselben von 0 aufwärts gezählt durch $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$, wobei im obigen Integrale h_0 und h_n statt h' und h zu setzen ist; so hat man in der Voraussetzung, dass n gerade ist, nach dieser Formel, wenn man $\frac{U}{\sqrt{x}} = y_1$ setzt, wodurch also

$$y_0 = \frac{U_0}{\sqrt{h_0}},\ y_1 = \frac{U_1}{\sqrt{h_1}}, \ldots y_n = \frac{U_n}{\sqrt{h_n}}$$

wird, sofort:

$$t = \frac{h_n - h_0}{3na\sqrt{2g}}\left[\frac{U_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{U_n}{\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{U_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{U_3}{\sqrt{h_3}} + \ldots + \frac{U_{n-1}}{\sqrt{h_{n-1}}}\right) + 2\left(\frac{U_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{U_4}{\sqrt{h_4}} + \ldots + \frac{U_{n-2}}{\sqrt{h_{n-2}}}\right)\right].$$

Ebenso erhält man aus der Relation $M = \int_{h_0}^{h_n} U dx$ für die in dieser Zeit t ausfliessende Wassermenge den genäherten Ausdruck:

$$M = \frac{h_n - h_0}{3n}[U_0 + U_n + 4(U_1 + U_3 + \ldots + U_{n-1}) + 2(U_2 + U_4 + \ldots + U_{n-2})],$$

oder auch nach der Relation $M = a\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{x}\, dt$, wenn man in der Simpson'schen Formel $y = \sqrt{x}$, also $y_0 = \sqrt{h_0}$, $y_1 = \sqrt{h_1} \ldots y_n = \sqrt{h_n}$ setzt, und wieder n als gerade annimmt:

$$M = \tfrac{1}{3} a\sqrt{2g} \cdot \frac{t}{n}[\sqrt{h_0} + \sqrt{h_n} + 4(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_3} + \ldots + \sqrt{h_{n-1}}) + 2(\sqrt{h_2} + \sqrt{h_4} + \ldots + \sqrt{h_{n-2}})].$$

Dabei darf man nur, wenn die Zeit t von dem Augenblicke an gezählt wird, in welchem der Wasserspiegel noch die Höhe $h_n = h$ hat, die den gleichen Zeitintervallen von $\frac{t}{n}$ entsprechenden Wasserstände $h_{n-1}, h_{n-2}, \ldots h_2, h_1, h_0 = h'$ beobachten.

204. Erhält das Gefäss einen beständigen Zufluss von m Kubikfuss per Secunde oder in der Zeiteinheit, so verwandelt sich die Relation (α) in Nr. **198**, da jetzt während dem Zeitelement $\mathrm{d}t$ nicht bloss die Schichte $U\mathrm{d}x$, sondern auch noch die Wassermenge $m\mathrm{d}t$ ausfliesst, in die folgende:

$$a\mathrm{d}t\sqrt{2gx} = -U\mathrm{d}x + m\mathrm{d}t,$$

woraus: $$\mathrm{d}t = \frac{-U\mathrm{d}x}{-m + a\sqrt{2gx}} \text{ folgt.}$$

Für ein prismatisches Gefäss von dem constanten Querschnitt $U = A$ erhält man also für die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht:

$$t = A\int_{h'}^{h} \frac{\mathrm{d}x}{-m + a\sqrt{2gx}},$$

oder wenn man $x^{\frac{1}{2}} = y$, also $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$ setzt und in der bekannten Integralformel $\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{a+by} = \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2}\,logn(a+by)$ gehörig substituirt, sofort:

$$t = 2A\left[\frac{\sqrt{h}-\sqrt{h'}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\,logn.\left(\frac{-m+a\sqrt{2gh}}{-m+a\sqrt{2gh'}}\right)\right] \ldots (1)$$

(§. 360, Anmerkung).

Da man für die Entleerungszeit T wieder $h' = 0$ setzen muss, so erhält man (wieder annäherungsweise):

$$T = 2A\left[\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\,logn.\left(1 - \frac{a}{m}\sqrt{2gh}\right)\right] \ldots (2).$$

Ist nun die beständig zufliessende Wassermenge $m = a\sqrt{2gh}$, so verwandelt sich die logarithmische Grösse in $log.\,o$, und da dieser Logarithmus, folglich auch T imaginär wird, so ist diess ein Zeichen, dass unter diesen Umständen der Wasserspiegel nicht herabsinken, das Gefäss also niemals leer werden kann.

Anmerkung. Um überhaupt die Höhe h' zu finden, bis zu welcher der Wasserspiegel sinken muss, damit das ausfliessende Wasserquantum dem zufliessenden gleich wird, von welchem Momente an dann der Wasserspiegel constant bleibt, hat man aus $m = a\sqrt{2gh'}$ die gesuchte Höhe

$$h' = \frac{m^2}{2ga^2} \ldots (\beta).$$

Um also die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel so weit herabsinkt, um dann constant zu bleiben, muss man diesen Werth von h' in der vorigen Formel (1) substituiren. Da jedoch dafür die Formel $t = \infty$ gibt, so ist diess ein Beweis, dass sich der Wasserspiegel in aller Strenge niemals auf dieser Höhe h' unveränderlich erhält, sondern sich dieser Grenze in unendlich kleinen Oscillationen nähert, die jedoch für die Wirklichkeit als verschwindend erscheinen. Da übrigens die obige Gleichung (β) den Werth von h' auch $> h$ geben kann, so muss der Wasserspiegel, anstatt um die genannte Grenze zu erreichen, zu fallen, vielmehr steigen, in welchem Falle in der Formel (1) nur h' mit h vertauscht werden darf, weil das Integrale in diesem Falle von h bis h' genommen werden muss.

Endlich versteht es sich wieder von selbst, dass, um auf die wirkliche Ausflussmenge überzugehen, hier wie überall statt der Ausflussöffnung a das Product na gesetzt werden muss, wenn n den betreffenden Contractions- oder Reductions-Coefficienten bezeichnet.

205. Befindet sich bei Voraussetzung eines Gefässes von durchaus gleicher Weite die Ausflussöffnung in einer verticalen Seitenwand BC (Fig. 105), so sei, um hier nur den einfachsten Fall zu behandeln, diese bis zum Wasserspiegel reichende Oeffnung ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h, so dass also der Ausfluss über einen Ueberfall stattfindet.

Ist nun der Wasserspiegel, welcher wieder als sehr bedeutend gegen die Ausflussöffnung vorausgesetzt wird, während der Zeit t von der Höhe $AB = h$ bis auf jene $AM = x$ herabgesunken, so sinkt er in dem darauf folgenden Zeitelement dt noch um $Mm = dx$ und man hat nach Nr. **195** für die während dieser Zeit ausfliessende theoretische Wassermenge:

$$dM = \tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt \sqrt{2gx}.$$

Da aber, wenn der horizontale Querschnitt des Gefässes $= A$ ist, dieselbe Wassermenge auch durch $A\,dx$ ausgedrückt wird, so hat man, mit Rücksicht auf die Zeichen von dx und dt:

$$\tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt \sqrt{2gx} = -A\,dx,$$

woraus sofort $$dt = -\frac{3}{2}\,\frac{A}{b\sqrt{2g}}\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx$$ folgt.

Um daher die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, hat man durch Integration, wenn man gleich das Zeichen ändert, folglich die Grenzen umkehrt:

$$t = \frac{3}{2}\,\frac{A}{b\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{3}{2}}\, dx = -3\,\frac{A}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h'}}\right),$$

oder $$t = \frac{3A}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h'}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

(Man vergleiche §. 361.)

Dabei ist die in der Zeit t ausgeflossene Wassermenge $M = A\,(h - h')$.

Drückt man aus dieser Gleichung h' aus und setzt den gefundenen Werth in der vorhergehenden Relation für t, so erhält man für die zum Ausfluss einer bestimmten theoretischen Wassermenge M nöthige Zeit den Ausdruck:

$$t = \frac{3A}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h-\frac{M}{A}}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Ist das Gefäss **unregelmässig**, so lässt sich die Ausflussmenge wieder näherungsweise nach demselben Verfahren, welches oben in Nr. **203** angewendet wurde, berechnen.

Theilt man nämlich die Höhe $h - h'$, die wir wieder durch $h_n - h_0$ bezeichnen, in n gleiche Theile, wo n eine **gerade** Zahl sein soll, und berechnet die den Höhen $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$ entsprechenden horizontalen Querschnittsflächen $U_0, U_1, \ldots U_n$, so findet man ganz einfach:

$$t = \frac{h-h'}{2nb\sqrt{2g}}\left[\frac{U_0}{h_0\sqrt{h_0}} + \frac{U_n}{h_n\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{U_1}{h_1\sqrt{h_1}} + \frac{U_3}{h_3\sqrt{h_3}} + \ldots + \frac{U_{n-1}}{h_{n-1}\sqrt{h_{n-1}}}\right)\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{U_2}{h_2\sqrt{h_2}} + \frac{U_4}{h_4\sqrt{h_4}} + \ldots + \frac{U_{n-2}}{h_{n-2}\sqrt{h_{n-2}}}\right)\right]$$

und
$$M = \frac{h-h'}{3n}\left[U_0 + U_n + 4(U_1 + U_3 + \ldots + U_{n-1}) + 2(U_2 + U_4 + \ldots + U_{n-2})\right].$$

Auch ist, wenn man die nach den gleichen Zeitintervallen $\frac{t}{n}$ stattfindenden Wasserstände $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$ beobachtet hat (wobei immer n als **gerade** vorausgesetzt wird), wegen $M = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\int_0^t x^{\frac{3}{2}}\,dt$, wieder näherungsweise:

$$M = \tfrac{2}{3}b\sqrt{2g}\cdot\frac{t}{3n}\left[h_0\sqrt{h_0} + h_n\sqrt{h_n} + 4(h_1\sqrt{h_1} + h_3\sqrt{h_3} + \ldots + h_{n-1}\sqrt{h_{n-1}})\right.$$
$$\left. + 2(h_2\sqrt{h_2} + h_4\sqrt{h_4} + \ldots + h_{n-2}\sqrt{h_{n-2}})\right].$$

206. Stehen in zwei communicirenden Gefässen AD und df (Fig. 106), bevor die Communication, z. B. durch das Oeffnen eines Hahnes hergestellt ist, auf ungleicher Höhe AB, ab, so findet man die Zeit, binnen welcher nach Herstellung der Communication beide Wasserspiegel gleich hoch stehen, auf folgende Weise.

Es seien nämlich sowohl die beiden Gefässe AD, df als auch das Verbindungsrohr prismatisch oder cylinderisch und ihre constanten Querschnitte beziehungsweise A, A', a; ferner sei während der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt, als die Communication hergestellt worden, der Wasserspiegel AB bis MN gesunken und jener ab bis mn gestiegen und dafür

$DN = x$, $dm = y$, $DB = h$ und $da = h'$; so wird im nächst darauf folgenden Zeitelement dt der erstere noch um dx fallen und der letztere um dy steigen, so dass also, mit Rücksicht darauf, dass x abnimmt, während y zunimmt, oder umgekehrt (wodurch dx und dy entgegengesetzte Zeichen erhalten):

$$A'dy = -A\,dx \text{ und (§. 362) } A\,dx = -a\,dt\sqrt{2g}(x-y).$$

Die erste dieser beiden Gleichungen integrirt gibt

$$A'y = C - Ax,$$

oder da für $x = h$, $y = h'$ sein soll, daher die Constante

$$C = Ah + A'h'$$

wird, auch: $Ax + A'y = Ah + A'h' \ldots (m)$.

Bestimmt man aus dieser Gleichung y, setzt diesen Werth in die zweite der vorigen Differenzial-Gleichungen und integrirt diese, so erhält man:

$$dt = -\frac{A\sqrt{A'}}{a\sqrt{2g}}dx\,[(A+A')x - (Ah + A'h')]^{-\frac{1}{2}}$$

und $$t = C - \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}}\sqrt{[(A+A')x - (Ah + A'h')]},$$

oder da für $t = 0$, $x = h$ sein muss, also die Constante

$$C = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}}\sqrt{[A'(h-h')]} \text{ wird, auch:}$$

$$t = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}}\left[\sqrt{[A'(h-h')]} - \sqrt{[(A+A')x - Ah - A'h']}\right]$$

als diejenige Zeit, während welcher der Wasserspiegel AB bis MN sinkt, oder jener ab bis mn steigt.

Ist nun die gesuchte Zeit, in welcher beide Spiegel gleich hoch stehen $= T$, so muss man, um T zu erhalten, in der vorigen Gleichung $x = y = \frac{Ah + A'h'}{A + A'}$ (aus Gleichung m) setzen; dadurch erhält man, nach gehöriger, einfacher Reduction:

$$T = \frac{2AA'\sqrt{(h+h')}}{a(A+A')\sqrt{2g}},$$

wobei wieder, wenn eine Contraction stattfindet, na statt a zu setzen ist (§. 365).

Ausfluss aus einem Gefäss, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt.

207. Wird das Gefäss AD (Fig. 107), welches eine schwere, incompressible Flüssigkeit enthält, in der Richtung RS mit einer veränderlichen Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t

den Werth v haben soll, fortbewegt; so nimmt die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Lage ab an, welche sich auf folgende Weise bestimmen lässt.

Betrachtet man in der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche irgend einen materiellen Punct M, dessen Masse $= m$ sein soll, so wirken auf diesen nach der Richtung Mf die Schwerkraft mit dem Drucke mg und nach der Richtung MS die bewegende Kraft $m\frac{dv}{dt}$ (Nr. **125**). Um aber den während der Bewegung eintretenden Zustand auf das statische Gleichgewicht zurückzuführen, denke man sich an den Punct M eine der nach MS wirksamen Kraft $m\frac{dv}{dt}$, welcher die wirkliche Bewegung des Flüssigkeitstheilchens entspricht, gleiche Kraft nach gerad entgegengesetzter Richtung von M gegen R $\left(\text{d. i. die Kraft } -m\frac{dv}{dt}\right)$ angebracht, so wird diese, so, als ob das Gefäss keine Bewegung hätte, mit dem ganzen Systeme im Gleichgewichte stehen. (M. s. die nachstehende Anmerkung.)

Ist also $Mf = mg$ und $Mn = Mn' = m\frac{dv}{dt}$, so wird die Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit, sowie die ihrer Niveauschichten (Nr. **169**) der Bedingung entsprechen müssen, dass die Flüssigkeit unter der Einwirkung der beiden Kräfte Mn und Mf oder ihrer Resultirenden Md auf jedes ihrer Theilchen von der Masse m im Gleichgewichte bleibe; dieses findet aber (**169**) statt, wenn der Spiegel ab, sowie alle Niveauschichten auf dieser Resultirenden Md perpendikulär stehen.

Anmerkung. Das hier angewendete Verfahren, um die Aufgabe der Bewegung auf eine Aufgabe des Gleichgewichtes zurückzuführen, beruht auf dem allgemeinen (in Nr. 131, in dem Satze 14. erwähnten) Bewegungsgesetz welches nach seinem Erfinder das *d'Alembert*'sche Princip genannt wird und in folgendem besteht.

Wirken auf ein System von materiellen Puncten, deren Massen m, m', m''.. sein sollen und wovon sich keiner frei oder so bewegen kann, dass er durch seine Bewegung nicht auch zugleich die der übrigen Puncte mit affiziren müsste, beziehungsweise die Kräfte p, p', p'' ... in diese Massen m, m', m''.. ein; so wird im Allgemeinen von jeder dieser Kräfte nur ein Theil auf die wirkliche Bewegung der Massen m, m'.. (in so weit diese letztere nämlich durch die wechselseitige Verbindung dieser Puncte möglich wird) verwendet, während der andere Theil durch das Verbindungssystem gerade so aufgehoben oder vernichtet wird, wie es der Fall sein würde, wenn sich diese letzteren Theile der Kräfte an dem Systeme im Gleichgewichte befänden.

Nimmt man nun an, dass durch die genannte Einwirkung der Kräfte p, p' .. die Massen m, m' .. eine Bewegung annehmen, wodurch sie in der Zeiteinheit, und zwar in dem Augenblicke als man das System betrachtet, die Beschleunigungen s, s', s'' .. erhalten; so sind die zuerst genannten Theile der Kräfte p, p' .. welche die wirkliche Bewegung der Massen hervorbringen ms, $m's'$, $m''s''$ ... und man kann diese Theile die wirksamen Kräfte des Systemes nennen. Die übrigen Theile der auf das System wirkenden Kräfte, welche sofort durch die Widerstandsfähigkeit der Verbindungen der einzelnen Massen vernichtet werden, befinden sich, wie bereits erwähnt, mit den Widerständen der Verbindungs- oder Verknüpfungsbänder, wenn man sich solche vorstellen will, im Gleichgewichte.

Bleiben sich also diese Widerstände gleich, es mag das System in der Ruhe oder in Bewegung sein, so ist klar, dass wenn man auf die Massen m, m' .. noch Kräfte anbringt, welche den wirksamen Kräften gleich, diesen aber gerade entgegengesetzt sind, d. i. wenn man noch beziehungsweise die Kräfte $-ms$, $-m's'$, $-m''s''$ ... an den Massen m, m' .. des Systemes anbringt, diese mit den Kräften p, p', p'' ... zusammen, das System in den Zustand der Ruhe (oder nach einem Anstoss, der gleichförmigen Bewegung) versetzen müssen.

Da dieses *d'Alembert*'sche Princip, oder eigentlicher dieser Lehrsatz, auch noch in anderer Art ausgesprochen wird, so denke man sich die Kraft p, welche in der Masse m, wenn sie frei, also mit den übrigen Puncten nicht verbunden wäre, in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit v erzeugen soll, also als bewegende Kraft durch mv ausgedrückt werden kann, in die zwei Seitenkräfte ms und mf zerlegt; so ist nach der obigen Voraussetzung, ms der wirksame und mf der verlorne Theil davon auf das System. Bezeichnen $m's'$ und $m'f'$, $m''s''$ und $m''f''$ u. s. w. dasselbe für die übrigen Kräfte p', p'' ...; so folgt nach dem, was oben bemerkt wurde, dass $mf + m'f' + m''f'' + .. = 0$ ist, und da folglich einige dieser Glieder negativ sein müssen, die man im Gegensatze zu den verlornen Kräften gewonnene nennen kann, so kann man entweder sagen, dass die in jedem Augenblicke verloren gehenden Kräfte sich aufheben oder im Gleichgewichte stehen, oder auch dass sich in jedem Systeme die vorlornen und gewonnenen Kräfte der verschiedenen materiellen Puncte das Gleichgewicht halten müssen, in welcher Form dieser Satz eigentlich nichts anderes als die Anwendung des allgemeinen Principes ist: dass Wirknng und Gegenwirkung einander immer gleich und entgegengesetzt sind.

Da man jede Seitenkraft wie mf ebenfalls als eine Mittelkraft, und zwar aus $p = mv$ und $-ms$ ansehen kann, so lässt sich in der vorigen Bedingungsgleichung $mf + m'f' + .. = 0$ jede dieser verlornen Kräfte durch die eben genannten gleichgeltenden Kräfte p und $-ms$, p' und $-m's'$ u. s. w. ersetzen, wodurch man wieder auf die ursprünglich ausgesprochene Form dieses Satzes kommt, in Folge welcher zwischen den gegebenen

Kräften, welche auf die säumtlichen materiellen Puncte eines in Bewegung befindlichen Systemes wirken, und jenen Kräften, welche in jedem Augenblicke die unendlich kleinen Geschwindigkeitsveränderungen in den materiellen Puncten hervorbringen, diese letzteren Kräfte jedoch nach entgegengesetzten Richtungen oder mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, fortwährend Gleichgewicht bestehen muss. Nach der gewählten Bezeichnungsart würde die Kraft p oder mv in dem materiellen Puncte m, wenn er frei wäre, in der unendlich kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit vdt erzeugen, während die wirkliche Zunahme an Geschwindigkeit in dieser Zeit $= s\,dt$, und deren Richtung im Allgemeinen von jener der Geschwindigkeit $v\,dt$ verschieden ist.

208. Um nun die Richtung dieser Ebenen, wie jene ab zu bestimmen, sei der Winkel bMB, welchen die Ebene ab mit dem Horizonte bildet $= \varphi$, und der Winkel fMS, welchen die Bewegungslinie RS des Gefässes mit der lothrechten Linie bildet $= \alpha$, so ist, wenn man $Mn = m\frac{dv}{dt}$ und $Mf = mg$ abschneidet und das Parallelogramm nf construirt, endlich die Resultirende Md durch Q bezeichnet, ganz einfach:

$$Q\,Sin\,\varphi = m\frac{dv}{dt}.\,Sin\,\alpha,$$

und wenn de parallel zu AB ist, wegen

$$Me = Q\,Cos\,\varphi = Mf - ef = mg - df.\,Cos\,\alpha,$$

auch: $$Q\,Cos\,\varphi = mg - m\frac{dv}{dt}Cos\,\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man mit m abkürzt:

$$tang\,\varphi = \frac{\frac{dv}{dt}Sin\,\alpha}{g - \frac{dv}{dt}Cos\,\alpha} \dots (1)$$

und $$Q = m\sqrt{\left[g^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 2g\frac{dv}{dt}Cos\,\alpha\right]} \dots (2).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sobald die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, also überhaupt eine gleichförmig veränderliche ist, wofür bekanntlich (Nr. **122**) der Quotient $\frac{dv}{dt}$ eine constante Grösse ist, die beiden Grössen α und Q in Beziehung zur Zeit constant sind und daher auch die Flüssigkeit gegen das Gefäss eine unveränderte Lage beibehält.

Da bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{dv}{dt} = 0$ ist, so wird dafür $tang\,\varphi$, also auch $\varphi = 0$ und $Q = mg$ gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, zum Beweis, dass sich die Flüssigkeit dabei gerade so verhält, als wenn das Gefäss in der Ruhe wäre.

209. Bezeichnet man den Wurzelausdruck der vorigen Gleichung (2) mit u, so ist auch $Q = mu$ oder die nach Md wirksame Resultirende Q ist im Stande, dem Theilchen von der Masse m in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit u mitzutheilen. Da nun dasselbe auch für alle übrigen Flüssigkeitstheilchen gilt, so folgt, dass die Wirkung dieser Kraft Q ganz ähnliche oder analoge Erscheinungen auf die bewegte Flüssigkeit hervorbringt, wie die Schwerkraft auf eine ruhende Flüssigkeit, und da diese letztere Kraft durch $Q = mg$ ausgedrückt wird und lothrecht wirkt, so darf man nur u oder den genannten Wurzelausdruck statt g setzen und berücksichtigen, dass die Richtung dieser Kraft Md ist, um alle aus der Einwirkung der Schwere auf eine ruhende Flüssigkeit stattfindenden Erscheinungen auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

Der genannte Wurzelausdruck ist auch:

$g\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt} Cos\,\alpha\right]}$ und da, wenn μ die Dichte der Flüssigkeit, also $\mu g = \gamma$ das Gewicht der cubischen Einheit derselben bezeichnet, so kann man auch bei dieser Umwandlung $\gamma\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt} Cos\,\alpha\right]}$ statt γ setzen.

Liegt z. B. ein Punct m in perpendikulärer Richtung gegen den Spiegel ab um die Tiefe $Mm = h$ unter der Oberfläche, so hat man für den in diesen Punct auf die Flächeneinheit stattfindenden hydraulischen Druck:

$$p = p' + \gamma h \sqrt{U} \ldots (3),$$

wenn nämlich p' den auf den Spiegel stattfindenden atmosphärischen Druck und $\sqrt{U}$ Kürze halber den letzteren Wurzelausdruck bezeichnet.

Endlich ist der Gesammtdruck P, welchen die ganze Flüssigkeit gegen das Gefäss ausübt und sich wie eine durch den Schwerpunct der Flüssigkeit nach der Richtung Md wirksame Kraft äussert, wenn man die Masse der ganzen Flüssigkeit durch M und ihr Gewicht durch Q' bezeichnet, sofort:

$$P = Mg\sqrt{U} = Q'\sqrt{U} \ldots (4),$$

wobei $\sqrt{U}$ den genannten Wurzelausdruck bedeutet.

210. Beispiele. 1. Gleitet z. B. das bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllte Gefäss DEF (Fig. 108) über die schiefe Ebene AB, also mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab, und ist der Neigungswinkel $ABC = \beta$, so hat man wegen

(§. 187) $v = g\,t\,Sin\,\beta$ sofort $\frac{dv}{dt} = g\,Sin\,\beta$ und ausserdem $\alpha = 90^0 - \beta$, folglich nach der Relation (1) in **208**:

$$tang\,\varphi = \frac{g\,Sin\,\alpha\,Sin\,\beta}{g - g\,Sin\,\beta\,Cos\,\alpha} = \frac{Cos\,\beta\,Sin\,\beta}{1 - Sin^2\,\beta} = \frac{Sin\,\beta}{Cos\,\beta} = tang\,\beta,$$

oder $\varphi = \beta$, d. h. der Wasserspiegel stellt sich bei dieser Bewegung parallel mit der schiefen Ebene AB.

Da ferner der obige Wurzelausdruck:

$$\sqrt{U} = \sqrt{(1 + Sin^2\,\beta - 2\,Sin^2\,\beta)} = \sqrt{(1 - Sin^2\,\beta)} = Cos\,\beta$$

ist, so hat man für den hydraulischen Druck p in einem Puncte m, welcher um die Tiefe $Mm = h$ unter dem Wasserspiegel liegt (Mm perpendikulär auf AB) nach der Formel (3) (Nr. **209**) $p = p' + \gamma\,h\,Cos\,\beta$, oder wenn man p' auslässt, $p = \gamma\,h\,Cos\,\beta$, so wie endlich den Gesammtdruck der Flüssigkeit normal auf AB, nach der Formel (4), $P = Q'\,Cos\,\beta$, gerade so als ob ein starrer Körper vom Gewichte Q' auf der schiefen Ebene läge oder herabglitte.

2. Wird das Gefäss mit gleichförmig beschleunigter Bewegung nach horizontaler Richtung fortgetrieben, so wird wegen $\alpha = 90^0$, wenn man $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, $tang\,\varphi = \frac{a}{g}$ und

$$p = p' + \gamma h \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)} = p' + \gamma h \sqrt{(1 + tang\,\varphi^2)} = p' + \gamma\,\frac{h}{Cos\,\varphi}$$
$$= p' + \gamma h',$$

wenn man nämlich durch den Punct m die lothrechte Linie mn (Fig. 109) bis zum Wasserspiegel zieht und ihre Länge $= h'$ setzt. Der in irgend einem Puncte m stattfindende hydraulische Druck ist also eben so gross, wie der hydrostatische Druck, welcher bei einer ruhenden Flüssigkeit auf den um die verticale Tiefe $nm = h'$ unter dem Spiegel liegenden Punct stattfinden würde.

Der Gesammtdruck ist in einer auf den Wasserspiegel ab perpendikulären Richtung nach der Formel (4), $P = Q' \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)}$.

3. Wird das Gefäss mit gleichförmig beschleunigter Bewegung vertical aufwärts bewegt, so hat man $\alpha = 180^0$ zu setzen; dadurch wird (Nr. **208**) $tang\,\varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, zum Beweis, dass in diesem Falle der Spiegel der Flüssigkeit horizontal bleibt.

Da ferner, wenn man wieder $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, der obige Wurzelausdruck $\sqrt{U} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2} + 2\frac{a}{g}\right)} = 1 + \frac{a}{g}$ wird, so erhält man für den hydraulischen Druck in der Tiefe h unter der Oberfläche (mit Auslassung des atmosphärischen Druckes, der sich von selbst versteht) $p = \gamma h \left(1 + \frac{a}{g}\right)$, sowie für den Gesammtdruck in verticaler Richtung, $P = Q' \left(1 + \frac{a}{g}\right)$.

Wäre die Beschleunigung bei dieser Bewegung gerade gleich jener der Schwere, nämlich $= g$, so wäre $v = gt$ und $\frac{dv}{dt} = a = g$, folglich $p = 2\gamma h$ und $P = 2Q'$, also der Druck gerade doppelt so gross, als wenn das Gefäss ruhte.

4. Wird endlich das Gefäss vertical abwärts bewegt, und zwar wieder gleichförmig beschleunigt, so wird $\alpha = 0$ und daher $tang\, \varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, so dass sonach der Spiegel wieder horizontal bleibt; ferner ist $p = \gamma h \left(1 - \frac{a}{g}\right)$ und $P = Q' \left(1 - \frac{a}{g}\right)$.

Liesse man in diesem Falle das Gefäss sammt der Flüssigkeit frei herabfallen, so würde wieder $\frac{dv}{dt} = a = g$ und daher $p = 0$ (oder eigentlich $p = p'$) und $P = 0$, so dass also der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen das Gefäss, wie man voraus weiss, Null ist.

211. Es lässt sich jetzt auch leicht die Ausflussmenge bestimmen, wenn das bisher betrachtete Gefäss ABE (Fig. 110) mit einer kleinen Boden- oder Seitenöffnung C, deren Querschnitt $= a$ sein soll, versehen ist.

Ist nämlich ab die nach Nr. **208** bestimmte Lage des Spiegels der Flüssigkeit und $CD = h$ der perpendikuläre Abstand des Mittelpunctes der Ausflussöffnung von der Oberfläche ab der Flüssigkeit, so darf man in den früheren Nummern, welche von dem Ausflusse handeln, wenn nur die geradlinige Bewegung des Gefässes gleichförmig beschleunigt, also der Quotient $\frac{dv}{dt} = A$ constant, folglich der obige Wurzelausdruck in Nr. **209**, den wir Kürze halber mit $\sqrt{U}$ bezeichnen wollen und

$$= \sqrt{\left[1 + \frac{A^2}{g^2} - 2\,\frac{A}{g}\, Cos\, \alpha\right]}$$

wird, nur statt der Richtung der Schwere die auf den Spiegel ab perpendikuläre Richtung, und statt ihrer Intensität g jene $g\sqrt{U}$

nehmen, wodurch dann auch das Gewicht γ der cubischen Einheit in $\gamma\sqrt{U}$ übergeht.

Man erhält dadurch, wenn der Spiegel ab unveränderlich ist, für die constante Ausflussgeschwindigkeit V, oder wenn dieser allmählich herabsinkt, für die momentane Ausflussgeschwindigkeit nach §. 344 oder Nr. **198**:

$$V = \sqrt{[2gh\sqrt{U}]},$$

also für die in der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeitsmenge, wenn keine Contraction stattfindet, $M = aV = a\sqrt{[2gh\sqrt{U}]}$, oder wenn n der Contractions-Coefficient ist: $M = naV$.

Da V die relative Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit gegen das Gefäss ist, so muss man, um die absolute Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeitstheilchen zu erhalten, aus den beiden Geschwindigkeiten v und V des Gefässes und der ausströmenden Flüssigkeit die Resultirende suchen.

212. Beispiele. 1. Gleitet das Gefäss z. B. über eine absolut glatte schiefe Ebene, deren Neigungswinkel $= \beta$ ist, herab, so hat man wegen (Nr. **210**) $\frac{dv}{dt} = g Sin\beta$ und $\alpha = 90^0 - \beta$, folglich $\sqrt{U} = Cos\,\beta$, sofort die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{(2gh\,Cos\,\beta)}.$$

2. Wird das Gefäss vertical auf- oder abwärts bewegt, wobei also (Nr. **210**, 3, 4) der Flüssigkeitsspiegel horizontal bleibt, so erhält man wegen $\alpha = 180^0$ oder 0, also $\sqrt{U} = 1 \pm \frac{A}{g}$ für beide Fälle:

$$V = \sqrt{\left[2gh\left(1 \pm \frac{A}{g}\right)\right]},$$

wobei das obere Zeichen für die aufwärts, das untere für die abwärts gerichtete Bewegung gilt.

Für den besonderen Fall von $\frac{dv}{dt} = A = g$, würde beziehungsweise $V = \sqrt{4gh}$ und $V = 0$, so dass also bei dieser raschen Bewegung nach aufwärts die Ausflussgeschwindigkeit im Verhältniss von $1 : \sqrt{2}$ grösser als im Zustande der Ruhe wäre.

Wäre endlich die Bewegung gleichförmig, also $\frac{dv}{dt} = A = 0$ und $\sqrt{U} = 1$, so wäre der Spiegel horizontal und $V = \sqrt{2gh}$, gerade so wie im Zustande der Ruhe.

Ausfluss aus einem Gefäss, welches um eine verticale Achse rotirt.

213. Wird das, bis auf eine gewisse Höhe mit einer schweren incompressibeln Flüssigkeit gefüllte Gefäss BF (Fig. 111) mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse CG umgedreht, so findet man den Zustand des Gleichgewichtes der Flüssigkeit, welche an dieser Bewegung Theil nimmt, wenn man berücksichtiget, dass auf jedes Theilchen M von der Masse m erstlich die Schwerkraft nach lothrechter Richtung $KM = g$ und dann noch die Centrifugalkraft LM nach horizontaler Richtung wirksam ist. Setzt man den, dem Puncte M entsprechenden Halbmesser $PM = y$, so ist die Grösse dieser letzteren Kraft, ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen (Nr. **130**, Anmerk.) $LM = yw^2$, so dass, wenn man das Kräftenparallelogramm LK ergänzt, die Resultante aus diesen beiden Kräften KM und LM sofort $QM = \sqrt{[g^2 + (yw^2)^2]}$ ist, welche in der Richtung QM wirkt. Hieraus folgt (**169**), dass das genannte Gleichgewicht der Flüssigkeit nur bestehen kann, wenn die freie Oberfläche, und folglich auch alle Niveauschichten in jedem Punkte auf der entsprechenden Richtung QM normal stehen.

Ist daher BF ein durch die Achse CG geführter verticaler Durchschnitt, NAN' die von der freien Oberfläche gebildete Curve, MT die an irgend einen Punct M derselben geführte Tangente, sowie für diesen Punct $AP = x$, $PM = y$ als rechtwinkelige Coordinaten, und der Winkel $MTC = \alpha$, so folgt wegen W. $QML =$ W. MTC sofort:

$$tang\,\alpha = \frac{QL}{ML} = \frac{KM}{ML} = \frac{g}{yw^2},$$

und da auch $tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man durch Gleichsetzung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{yw^2} \quad \text{oder} \quad y\,dy = \frac{g}{w^2}\,dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$y^2 = \frac{2g}{w^2}x \ldots (1),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Aus dieser Gleichung (1) folgt also, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine durch Umdrehung der Parabel NAN', deren Parameter $= \frac{2g}{w^2}$ ist und Scheitel A in der Umdrehungsachse liegt, erzeugte paraboloidische Fläche bildet.

Anmerkung. Da die in horizontaler Richtung wirkende Centrifugalkraft keinen Einfluss auf die lothrecht wirkende Schwerkraft hat, so muss in irgend einem Puncte J der Druck p auf die Flächeneinheit eben so gross, nämlich $p = \gamma h$ sein, wenn $JM = h$ und γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit ist, als er in einer ruhigen Flüssigkeit auf einen Punct stattfindet, welcher um die Tiefe h unter dem horizontalen Wasserspiegel liegt. (Der atmosphärische Druck ist dabei wieder ausgelassen.) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auch dadurch überzeugen, dass man die auf das Theilchen M in der Richtung QM drückende Kraft, wieder in die zwei ursprünglichen Seitenkräfte KM und LM nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt, wodurch die erstere $= g$, also gerade so wie die Schwerkraft wirkt.

Bildet die Umdrehungsachse CG zugleich die geometrische Achse des Gefässes, welches also gegen diese symmetrisch ist, so heben sich die, in je zwei diametral gegenüberliegenden, gleich weit von der Achse abstehenden Puncten, wirkenden Centrifugalkräfte auf, d. h. die Resultante der aus den sämmtlichen Centrifugalkräften hervorgehenden Pressungen, ist auf die ganze Flüssigkeit gleich Null, folglich äussert sich der Gesammtdruck der Flüssigkeit bloss in verticaler Richtung und es ist dieser gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

214. Um nun den Ausfluss der Flüssigkeit aus dem Gefäss DN (Fig. 112), welches eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse BC besitzt, zu untersuchen, sei, sobald der Beharrungsstand eingetreten, DAE die in der vorigen Nummer bestimmte Parabel der freien Oberfläche der Flüssigkeit und $AB = h$ die Druckhöhe für den Scheitel. Denkt man sich nun in den Puncten B und N des Bodens zwei, im Verhältniss zum Querschnitt des Gefässes, sehr kleine Oeffnungen, setzt $BN = y$ und die Ausflussgeschwindigkeiten in diesen Oeffnungen beziehungsweise $= v$ und V, so ist nach der vorigen Anmerkung die Pressung der Flüssigkeit in diesen Puncten B und N genau so gross wie in einem ruhenden Gefässe, in welchem AB und MN die Druckhöhen sind, also $v^2 = 2g . AB$ und $V^2 = 2g . MN$, oder da $AB = h$ und $MN = NP + PM = h + x = h + \frac{y^2 w^2}{2g}$ (vorige Nummer, Gleichung 1) ist, auch $v = \sqrt{2gh}$ und

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]},$$

oder wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes N, d. i. $yw = u$ setzt, auch $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh + u^2)}$. (Vergleiche §. 426.)

Die Ausflussgeschwindigkeit nimmt also immer mehr zu, je weiter die Oeffnung von der Rotationsachse CB absteht.

Ist für die Seitenöffnung O der Abstand $AR = h'$, jener $OR = Y$ und die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes $O = U$, so ist für diese kleine Seitenöffnung bei unveränderlichem Spiegel der Flüssigkeit die constante, bei veränderlichem Spiegel die momentane Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + \frac{Y^2 w^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh' + U^2)}.$$

Anmerkung 1. Es versteht sich von selbst, dass diese Resultate keine Aenderung erleiden, wenn auch die Oberfläche der Flüssigkeit nicht frei, sondern das Gefäss oben geschlossen ist, so dass sich dieser parabolische Trichter gar nicht bilden kann; immer kommt es dabei auf die Rotations-Geschwindigkeit der Ausflussöffnung an.

Anmerkung 2. Um den Ausfluss aus einer engen Röhre Ef (Fig. 113) zu bestimmen, welche ebenfalls mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse AB umgedreht wird, darf man nur wieder auf das vorige Gefäss zurückgehen und sich vorstellen, dass sich die Flüssigkeit in lauter sehr feinen Fäden oder Canälen von beliebiger Form, wovon MO (Fig. 112) einer sein soll, durch die Ausflussöffnung O ergiesse; dafür war aber, wenn man $Pr = h$ und $RO = y$ setzt, die Ausflussgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]} \ldots (\alpha).$$

Setzt man nun $AP = y'$, ferner $Mr = h'$, d. i. $h' = h + PM = h + \frac{y'^2 w^2}{2g}$ (**213**), so ist $h = h' - \frac{y'^2 w^2}{2g}$, und wenn man auf jeder Seite dieser Gleichung $\frac{y^2 w^2}{2g}$ addirt:

$$h + \frac{y^2 w^2}{2g} = h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g},$$

so dass man die vorige Gleichung (α) auch unter der Form schreiben kann:

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right)\right]}.$$

Dieselbe Gleichung gilt nun aber auch für die erwähnte Röhre in Fig. 113, wenn man darin $AB = h'$, $AC = y'$ und $BD = y$ setzt und dabei den Spiegel EF als unveränderlich voraussetzt.

Hier ist durchaus angenommen worden, dass der, gegen die Oberfläche der Flüssigkeit etwa stattfindende Druck (wie z. B. jener der Atmosphäre) jenem gegen die Ausflussöffnung gleich sei; wäre diess nicht der Fall, sondern der Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche EF (Fig. 113) $= p$ und auf die Ausflussöffnung $ef = p'$, so müsste z. B. die Geschwindigkeit V der letzten Formel aus der Gleichung

$$\gamma\frac{V^2}{2g} = p - p' + \gamma\left[h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right]$$

bestimmt werden, wobei wieder γ das Gewicht der cubischen oder Volumen-Einheit der Flüssigkeit ist.

Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

(§. 366.)

215. Bezeichnet man den inneren oder lichten Durchmesser der gleich weiten Röhre mit D, den Umfang mit U, den Querschnitt mit A, die Länge derselben mit L, die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre mit v und den durch die Reibung des Wassers an den Röhrenwänden entstehenden Gefällsverlust, d. h. die Höhe der Wassersäule, deren Gewicht im Stande ist diesen Reibungswiderstand zu überwinden, mit z, so hat man nach §. 368, wenn α und β zwei Erfahrungs-Coefficienten sind, für Röhren von was immer für einer Querschnittsform:

$$z = \frac{UL}{A}(\alpha v + \beta v^2) \ldots (1)$$

und für cylinderische Röhren:

$$z = \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \ldots (2).$$

Legt man dabei den Meter als Einheit zum Grunde, so kann man für die Coefficienten α, β nach Prony die Werthe nehmen $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0003483 \ldots (a)$. Nimmt man dagegen den Wiener Fuss zur Einheit, so verwandeln sich diese Werthe in $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101 \ldots (m)$.

Nach den genauesten Versuchen von Du Buat, Bossut und Couplet hat d'Aubuisson folgende Werthe erhalten, und zwar wenn man den Meter zur Einheit nimmt:

$$\alpha = \cdot 0000188, \quad \beta = \cdot 0003425 \ldots (b),$$

und wenn man den Wiener Fuss zum Grunde legt:

$$\alpha = \cdot 0000188, \quad \beta = \cdot 0001083 \ldots (n).$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Geschwindigkeitsverminderung des Wassers beim Eintritte in die Röhrenleitung (m. s. Nr. **190**, Anmerk.), nach welcher die ganze Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2gn^2} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und $n = \cdot 8125$ gesetzt wurde, fand Eytelwein aus 51 Beobachtungen von Couplet, Bossut und Du Buat für das Metermass:

$$\alpha = \cdot 0000223579, \quad \beta = \cdot 000283174.$$

Weisbach dagegen fand unter derselben Voraussetzung mit Zugrundelegung von 49 Beobachtungen:

$$\alpha = \cdot 000057287, \quad \beta = \cdot 00023097.$$

Es ist daher, wenn man diese letzteren Werthe benützt und gleich 4mal nimmt, für Metermass ($g = 9{\cdot}808$ gesetzt):

$$h = {\cdot}0772\, v^2 + {\cdot}00022915 \frac{L}{D} v + {\cdot}00092388 \frac{L}{D} v^2 \ldots (3)$$

und auf den Wiener Fuss bezogen:

$$h = {\cdot}0244\, v^2 + {\cdot}00022915 \frac{L}{D} v + {\cdot}00029204 \frac{L}{D} v^2 \ldots (4).$$

Zur Bestimmung der Röhrendurchmesser D erhält man, wenn M die Wassermenge bezeichnet, welche per Secunde durch die Röhrenleitung fliessen soll, wegen $M = \frac{1}{4} D^2 \pi v$, woraus $v = \frac{4M}{\pi D^2} = 1{\cdot}27324 \frac{M}{D^2}$ folgt, und wenn man diesen Werth für v in den beiden vorigen Gleichungen substituirt und gehörig ordnet und reducirt, für Metermass:

$$D^5 - {\cdot}00029176 \frac{LM}{h} D^2 - {\cdot}12515 \frac{M^2}{h} D - {\cdot}0014977 \frac{LM^2}{h} = 0 \ldots (5),$$

für den Wiener Fuss:

$$D^5 - {\cdot}00029176 \frac{LM}{h} D^2 - {\cdot}039561 \frac{M^2}{h} D - {\cdot}00047344 \frac{LM^2}{h} = 0 \ldots (6).$$

216. Anstatt dass in den vorigen Formeln nach der gewöhnlichen Methode nebst der 2ten auch noch die 1ste Potenz der Geschwindigkeit eingeführt ist, findet Weisbach, welcher die früheren Versuche von Prony, Eytelwein, Couplet, Bossut und Du Buat, sowie seine eigenen 11 Versuche (nebst einem von Gueymond in Grenoble), nämlich 63 an der Zahl, zum Grunde legt, dass man der Wahrheit näher komme, wenn man statt der 1sten die $\frac{3}{2}$te Potenz der Geschwindigkeit in die Formel aufnimmt. Er findet nämlich nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn man diese Widerstandshöhe durch

$$z = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \ldots (7)$$

ausdrückt und den Meter zur Einheit nimmt, sofort:

$\alpha = {\cdot}01439$ und $\beta = {\cdot}0094711$, wobei $g = 9{\cdot}808$ ist.

Legt man den Wiener Fuss zum Grunde, so hat man:

$\alpha = {\cdot}01439$ und $\beta = {\cdot}01685$ zu setzen, wobei $g = 31$ ist.

Hagen, welcher ausser den bereits erwähnten Versuchen auch noch jene benützte, welche von Provis in England angestellt und im Jahre 1838 veröffentlicht wurden, glaubt statt der 1sten Potenz von v, wie diess schon vor ihm Woltmann gethan, die $\frac{7}{4}$te benützen zu sollen und stellt als annähernden Ausdruck die Gleichung: $h = \cdot 024\, v^2 + \cdot 003 \frac{l}{\varrho} v^{\frac{1}{4}}$

auf, in welcher ϱ den Röhrenhalbmesser, und zwar in Zollen bezeichnet, während die übrigen Grössen h, l, v in rheinländischen Fussen zu nehmen sind.

Für die meisten Fälle ebenfalls hinreichend, hält Hagen die noch einfachere Formel:

$$h = \cdot 005 \frac{l}{\varrho} v^{\frac{7}{4}}.$$

Die von Darcy in der neuesten Zeit in Dijon mit Röhren aus Eisen, Blei und Glas von ·01 bis ·05 Meter Durchmesser und bei Geschwindigkeiten von ·03 bis ·05 Meter per Sec. durchgeführten Versuche, zeigten deutlich den Einfluss, welchen sowohl das verschiedene Materiale, als namentlich die Beschaffenheit der Röhren (ob diese von innen glatt und rein, oder mit Niederschlägen belegt) auf die durchfliessende Wassermenge ausübe und er stellt in dieser Beziehung die Formel auf:

$$\varrho \frac{h}{l} = A v^2,$$

wobei der Zahlenwerth von A vom Halbmesser der Röhre ϱ abhängig gemacht und $A = \cdot 000507 + \frac{\cdot 00000647}{\varrho}$ gesetzt wird.

So wäre z. B. für $\varrho = \cdot 5^{m.}$ sofort $A = \cdot 000519$, für $\varrho = \cdot 1^{m.}$ dagegen $A = \cdot 000571$ u. s. w.

Auch bemerkt Darcy noch, dass wenn V die Geschwindigkeit des Wassers in der Achse der Röhre, und w jene am Umfange oder der Wandfläche derselben ist, sofort als mittlere Geschwindigkeit jene: $v = \frac{3V + 4w}{7}$

in Rechnung gebracht werden könne.

Dupuit endlich empfiehlt für die gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fälle zur Bestimmung des Röhrendurchmessers die sehr bequeme, auf Metermass sich beziehende Formel:

$$D = \cdot 3018 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{h}} \ldots (8),$$

welche, auf den Wiener Fuss bezogen, in

$$D = \cdot 2397 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{h}} \ldots (9)$$

übergeht, und in welcher wieder M die Wassermenge bezeichnet, welche die Röhrenleitung per Secunde liefern soll.

Anmerkung. Da mit Ausnahme der Couplet'schen alle übrigen bei Bildung der obigen Formeln benützten und zu Grunde gelegten Versuche mit Röhren vorgenommen wurden, die innen rein und glatt waren, so darf es nicht auffallen, wenn alle diese Formeln, sobald sie auf Röhren angewendet werden, die schon längere Zeit in Verwendung stehen, den Röhrenwiderstand zu gering angeben.

So zeigt Darcy, dass die Widerstands-Coefficienten für die in Dijon bereits gebrauchten Wasserleitungsröhren im Mittel doppelt so gross genommen werden müssen, als diese in den gewöhnlichen Formeln für neue und noch glatte Röhren angegeben werden. Soll daher in einer Leitung, bei welcher die Röhrenwände bereits mit Oxyd oder einem Niederschlage belegt sind, die Geschwindigkeit berechnet werden, mit welcher das Wasser wirklich durchfliesst, so räth er an, von der wirklich vorhandenen Gefällshöhe nur die Hälfte als solche in die Formeln einzuführen; also auch umgekehrt die aus den Formeln für eine gegebene Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus der Leitung ausfliessen soll, berechnete Gefällshöhe, in der Wirklichkeit doppelt so gross zu nehmen.

D'Aubisson und Hagen rathen gleichfalls, um sicher zu gehen, die Wassermenge, welche eine Leitung liefern soll, lieber um die Hälfte grösser in Rechnung zu bringen.

Dupuit endlich scheint in seiner oben angegebenen Formel (8) diesen Umstand schon mit berücksichtiget zu haben.

Beispiel. Welchen lichten Durchmesser muss man der Hauptröhre einer Wasserleitung geben, wenn diese bei einer Länge von 765 Klafter und einer Druckhöhe von 3 Klafter per Minute 75 Kubikfuss Wasser liefern soll?

Setzt man in der obigen Gleichung (6) $L = 4590$, $h = 18$ und $M = 1{\cdot}25$, so folgt, wenn man, was hier ohne Anstand geschehen kann, statt des genauen Coefficienten ·092999, welcher sich dabei ergibt, den kürzeren ·093 setzt, sofort: $D^5 = {\cdot}093\,D^2 + {\cdot}003434\,D + {\cdot}18864 \ldots (\alpha)$, aus welcher Gleichung nunmehr D zu berechnen ist.

Lässt man zur Bestimmung eines ersten Näherungswerthes im zweiten Theil dieser Gleichung die beiden ersten Glieder aus und setzt $D^5 = {\cdot}18864$, so folgt als 1ster Näherungswerth: $D = {\cdot}71635$.

Setzt man jetzt diesen Werth für D in den 2ten Theil der ursprünglichen Gleichung (α), so erhält man nach gehöriger Reduction $D^5 = {\cdot}23882$ und daraus als 2ten Näherungswerth: $D = {\cdot}75095$.

Wird ferner abermals dieser letztere Werth im zweiten Theil der genannten Gleichung (α) substituirt, so folgt $D^5 = {\cdot}24366$ und daraus als 3ter Näherungswerth: $D = {\cdot}75397$.

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet man $D^5 = {\cdot}244098$, oder als 4ten Näherungswerth: $D = {\cdot}75426$, wobei man offenbar stehen bleiben und sich mit dem Werthe von $D = {\cdot}76$ begnügen kann.

Nach der Dupuit'schen Formel (8) erhält man, was im Voraus zu vermuthen war, einen etwas grösseren Werth, und zwar findet man $D = {\cdot}79385$.

Es dürfte daher mit Rücksicht auf die vorigen Bemerkungen gerathen erscheinen, bei der wirklichen Anlage dieser Leitung den lichten Röhrendurchmesser nicht unter ·80 Fuss zu nehmen.

217. Um den durch plötzliche Verengungen oder Erweiterungen des Röhrenquerschnittes herbeigeführten Verlust an Gefällshöhe zu bestimmen, wollen wir zuerst annehmen, dass sich die normale Querschnittsfläche A der Röhre (Fig. 114) plötzlich erweitere und in A' übergehe. Ist daher v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt A und v' jene in der Erweiterung A', so muss die grössere Geschwindigkeit v plötzlich auf die kleinere v' gebracht werden. Jedes Wassertheilchen m stösst also gegen die unendlich grössere Wassermasse m' und verliert wie bei dem Stosse unelastischer Körper (§. 243) an lebendiger Kraft $\frac{mm'(v-v')^2}{m+m'}$, oder da m gegen m' verschwindet, $\frac{mm'}{m'}(v-v')^2 = m(v-v')^2$, folglich ist der Verlust an Wirkungsgrösse $= \frac{m(v-v')^2}{2g}$ (wenn nämlich m dem Gewichte nach ausgedrückt wird), oder an Gefällshöhe $z' = \frac{(v-v')^2}{2g} = \left(1 - \frac{v'}{v}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$.

Da sich nun die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte verhalten müssen, um in derselben Zeit gleiche Wassermengen durchzuführen (was die Continuität der Flüssigkeit erfordert), so ist $v' = \frac{A}{A'}v$ und daher der Gefällsverlust oder die Widerstandshöhe:

$$z' = \left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g} = \varepsilon \frac{v^2}{2g},$$

wenn man nämlich den Coefficienten $\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2$ nach Weisbach Widerstands-Coefficient genannt, durch ε bezeichnet.

Anmerkung. Der hier betrachtete Verlust kann durch Abrunden der Kanten und allmähliches Uebergehen von einer Röhre in die andere, wie in Fig. 114', bedeutend vermindert und selbst ganz aufgehoben werden.

218. Ein ähnlicher Verlust an Gefällshöhe entsteht auch dann, wenn das Wasser aus einem Gefässe oder Behälter, wie in Fig. 115, in eine Röhre tritt. Ist dieser Eintritt noch durch eine dünne Wand, d. i. ein Diaphragma, oder auch, wie es oft der Fall, durch ein Sieb oder Gitter verengt, so sei wieder A der Querschnitt der Röhre und f jener der Oeffnung des Diaphragma oder die Summe der Oeffnungen des Siebes, sowie α der entsprechende Contractions-Coefficient beim Durchgange des Wassers durch diese Oeffnungen. Da nun αf der Querschnitt der grössten Zusammenziehung, also (wenn wieder v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre) $\frac{A}{\alpha f} v$ die in diesem Querschnitt stattfindende Geschwindigkeit ist, welche plötzlich in die kleinere v übergeht, so hat man wie vorhin dadurch die Widerstandshöhe:

$$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \cdot \cdot (\alpha).$$

Fällt das Diaphragma weg, so ist wegen $f = A$ in diesem Falle:

$$z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \cdot \cdot (\beta).$$

Anmerkung. Derselbe Verlust an Geschwindigkeitshöhe tritt bei jedem an einer Ausflussöffnung angebrachten Ansatzröhre ein.

Setzt man in der vorigen Formel (β) den Contractions-Coefficienten $\alpha = \cdot 64$, so erhält man in dem erwähnten Falle den Widerstands-Coefficienten

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{\cdot 64} - 1\right)^2 = \cdot 316.$$

Nach den Versuchen von Weisbach ist der gesammte Widerstands-Coefficient für den Ausfluss des Wassers durch ein kurzes Ansatzrohr $\varepsilon = \cdot 505$. Ferner kann man mit Rücksicht auf ein Diaphragma nach denselben Versuchen für $\frac{f}{A} = \cdot 1, \cdot 2, \cdot 3, \cdot 4, \cdot 5, \cdot 6, \cdot 7, \cdot 8, \cdot 9, 1$ den Contractions-Coeffizient $\alpha = \cdot 616, \cdot 614, \cdot 612, \cdot 610, \cdot 607, \cdot 605, \cdot 603, \cdot 601, \cdot 598, \cdot 596$ setzen. So wäre z. B. für $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$ oder $f = \frac{1}{2} A$, nach der vorigen Formel der durch diese Verengung und plötzliche Erweiterung entstehende Verlust an Gefällshöhe: $z' = \left(\frac{2}{\cdot 607} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 5 \cdot 266 \frac{v^2}{2g}$, also $5\frac{1}{4}$ Mal grösser als die der Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe. Für $\frac{f}{A} = \frac{1}{10}$ wäre sogar $z' = 232 \frac{v^2}{2g}$.

219. Tritt das Wasser anstatt aus einem weiten Behälter nur aus einer etwas weiteren Röhre in die engere ein (Fig. 116), so bleibt die Erscheinung, also wenn man die vorige Bezeichnung beibehält, auch die Formel (α) oder jene (β), d. i. jene für den Fall eines Diaphragma, $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ und ohne dasselbe $z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ dieselbe, nur dass dabei, wegen der jetzt eintretenden unvollständigen Contraction, der Coefficient α, welcher von dem Verhältniss $\frac{f}{F}$ der verengten Oeffnung f und des Querschnittes des weiteren Zuleitungsrohres F abhängt, grösser ausfällt.

Nach Weisbach's Versuchen ist für $\frac{f}{F} = \cdot1, \cdot2, \cdot3, \cdot4, \cdot5, \cdot6, \cdot7, \cdot8, \cdot9, 1$ beziehungsweise $\alpha = \cdot624, \cdot632, \cdot643, \cdot659, \cdot681, \cdot712, \cdot755, \cdot813, \cdot892, 1\cdot000$.

Wäre z. B. das Zuleitungsrohr 4, die Oeffnung des Diaphragma 2 und das Ausflussrohr 3 Zoll weit und sollte, wenn diese Röhren nur ganz kurz sind, die Druckhöhe h' gefunden werden, für welche per Minute 20 Kubikfuss Wasser durch diesen Apparat fliessen; so wäre $\frac{f}{F} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, folglich, wenn man die vorige Reihe interpolirt, der betreffende Contractions-Coefficient $\alpha = \cdot637$. Ferner ist $\frac{A}{f} = \frac{9}{4}$, daher

$$\frac{A}{\alpha f} - 1 = \frac{9}{4 \times \cdot637} - 1 = 2\cdot532.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit v findet sich aus der Gleichung $\frac{1}{4}(\frac{1}{4})^2 \pi v = \frac{20}{60}$, und zwar ist $v = \frac{2 \times 64}{6\pi} = 6\cdot792$ Fuss, folglich die Widerstandshöhe z', d. i. diejenige Wassersäulenhöhe, welche durch die verengte Oeffnung absorbirt wird:
$$z' = (2\cdot532)^2 \frac{(6\cdot792)^2}{62} = 4\cdot77$$
und daher die gesuchte Druckhöhe $h = z' + \frac{v^2}{2g}$, d. i.

$$h = 4\cdot77 + \frac{(6\cdot792)^2}{62} = 5\cdot514 \text{ Fuss.}$$

Ohne diese Verengung wäre $h = \cdot744$ Fuss.

220. Befindet sich das Diaphragma, wie in Fig. 117, in der gleichweiten Röhre und ist wieder A der Querschnitt der Röhre, f jener der Durchgangsöffnung und α der entsprechende Contractions-Coefficient, so ist wie vorhin die Widerstandshöhe

$$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Was dabei den Coefficienten α betrifft, so hat er dieselben in der vorigen Nummer angegebenen Werthe, nur muss man statt dem Quotienten $\frac{f}{F}$ jenen $\frac{f}{A}$ setzen. Wäre z. B. dieser Quotient $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$, so würde man $\alpha = \cdot681$ setzen und damit die Widerstandshöhe oder den Gefällsverlust $z' = 3\cdot751 \frac{v^2}{2g}$ also $3\frac{3}{4}$ Mal so gross als die Geschwindigkeitshöhe von v erhalten.

Dieser Verlust lässt sich bedeutend vermindern, wenn nicht ganz beseitigen, wenn man durch Abrunden der Kanten die Contraction vermindert, oder durch Einsetzung eines sich allmählich nach beiden Seiten erweiternden Rohres (Fig. 118) gänzlich aufhebt.

221. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie in Fig. 119 dargestellt ist, wobei das Wasser aus dem grösseren Querschnitt A in den engeren A' plötzlich, und von da wieder ebenso in den weiteren Querschnitt A'' übertritt, hat man, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre A, und α den Contractions-Coefficient für den Uebergang aus A in A' bezeichnet, also die Geschwindigkeiten in A' und $A'' = v'$ und v'', die Werthe haben $v' = \frac{A}{A'}v$ und $v'' = \frac{A'}{A''}v'$, genau wieder wie in Nr. **219** für den Verlust an Gefällshöhe beim Uebergang von A in A':

$$z_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{A^2}{A'^2}\frac{v^2}{2g}$$

und für jenen beim Uebergang von A' in A'' wie in Nr. **217**:

$$z_2 = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{A^2}{A'^2}\frac{v^2}{2g},$$

folglich ist der Gesammtverlust für diese Verbindung $z' = z_1 + z_2$, d. i.

$$z' = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung. Diese Formel zeigt, dass z' jeden auch noch so grossen Werth durch Verkleinerung des verengten Querschnittes A' annehmen kann, indem sich dadurch der Quotient $\frac{A}{A'}$ immer mehr der Grenze ∞ nähert.

222. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie Fig. 120 zeigt, wobei das Wasser aus dem normalen Querschnitt A in den erweiterten A' und von da wieder in den normalen A oder überhaupt nur in einen engeren A'' übertritt, hat man ebenso, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte A, und α den Contractions-Coefficienten für den Uebertritt des Wassers von A' in A'' bezeichnet, für den Verlust an Gefällshöhe:

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{A^2}{A'^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Im Falle $A'' = A$ ist, wird

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung 1. Wie man aus der letzten Formel sieht, so kann durch die Erweiterung A' die Widerstandshöhe z' keineswegs, wie bei der vorigen Verengung, ohne Ende zunehmen, sondern diese ist (weil für $A' = \infty$ der Quotient $\frac{A}{A'} = 0$ wird) an die Grenze $\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$ gebunden.

Anmerkung 2. Was endlich die durch Verengungen mittelst Hähnen, Klappen und Ventilen herbeigeführten Verluste an der Gefällshöhe betrifft, die oft sehr bedeutend werden können, so hat Weisbach auch hierüber zahlreiche Versuche durchgeführt und die Resultate zur Bestimmung der betreffenden Widerstands-Coefficienten tabellarisch zusammengestellt.

a) Ist z. B. $abcd$ (Fig. 121) ein gegen die Achse der Röhre perpendikulärer Schieber oder Schubventil, mittelst welchem der Querschnitt der Röhre $AD = A$ bis auf die Durchflussöffnung $Ab = A'$ verengt wird, so hat man, den Verlust an Gefällshöhe $z_1 = n_1 \frac{v^2}{2g}$ gesetzt, für den Widerstands-Coefficienten n_1 nach Weisbach,

für parallelopipedische Röhren (Fig. 121):

wenn $\frac{A'}{A} = 1,\ \cdot9,\ \cdot8,\ \cdot7,\ \cdot6,\ \cdot5,\ \cdot4,\ \cdot3,\ \cdot2,\ \cdot1$ ist,

sofort $n_1 = 0\cdot00,\ 0\cdot09,\ 0\cdot39,\ 0\cdot95,\ 2\cdot08,\ 4\cdot02,\ 8\cdot12,\ 17\cdot8,\ 44\cdot5,\ 193,$

für cylinderische Röhren (Fig. 122):

wenn $\frac{A'}{A} = 1,\ \frac{7}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{1}{8}$ ist,

sofort $n_1 = 0\cdot00,\ 0\cdot07,\ 0\cdot26,\ 0\cdot81,\ 2\cdot06,\ 5\cdot52,\ 17\cdot0,\ 97\cdot8.$

b) Bei Drehklappen oder Drosselventilen theilt sich das Wasser beim Durchgang durch die Röhre AE (Fig. 123) in zwei Theile und geht durch die verengten Oeffnungen Aa und Bb, deren Querschnitt in Summa $= A'$, sowie der Querschnitt der Röhre $= A$ sein soll. Ist der Dreh- oder Stellwinkel $DCF = \alpha$, und der Durchmesser ab der Klappe gleich dem Durchmesser der Röhre, so ist nach Weisbach der Widerstands-Coefficient n_1,

für parallelopipedische Röhren:

für $\alpha =$	5°,	10°,	15°,	20°,	25°,	30°,	35°,	40°,	45°,	50°,
und $\frac{A'}{A} =$	·913,	·826,	·741,	·658,	·577,	·500,	·426,	·357,	·293,	·234,
sofort $n_1 =$	·28,	·45,	·77,	1·34,	2·16,	3·54,	5·72,	9·27,	15·07,	24·9,
$\alpha =$	55°,	60°,	65°,	70°,	90°					
$A' : A =$	·181,	·134,	·094,	·060,	0					
$n_1 =$	42·7,	77·4,	158,	368	∞					

für cylinderische Röhren:

für dieselben Werthe von α und $\frac{A'}{A}$:

$n_1 = \cdot24,\ \cdot52,\ \cdot90,\ 1\cdot54,\ 2\cdot51,\ 3\cdot91,\ 6\cdot22,\ 10\cdot8,\ 18\cdot7,\ 32\cdot6,\ 58\cdot8,\ 118,\ 256,\ 751,\ \infty.$

c) Tritt das Wasser durch ein Kegelventil cd (Fig. 124) und ist wieder A die Querschnittsfläche der Röhre AB, v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, der Querschnitt der Oeffnung ab des Ventilsitzes $= f$, sowie jener der ringförmigen Oeffnung $AcBd = f'$, so kann man für die eigentliche verengte Oeffnung das arithmetische Mittel nehmen und $A' = \frac{1}{2}(f + f')$ setzen. Ist endlich wieder α der entsprechende Contractions-Coefficient, so hat man nach Nr. **219** den Widerstands-Coefficienten

$$n_1 = \left(\frac{A}{\alpha A'} - 1\right)^2.$$

Dabei fand Weisbach nach einem Versuche, wobei $\frac{A'}{A} = \cdot381$ war, $\alpha = \cdot608$.

d) Bei einem Klappenventil CD (Fig. 125) fand Weisbach bei einem Verhältniss der Oeffnung $ab = A'$ im Ventilsitz zum Querschnitt der Röhre A, d. i. bei $\frac{A'}{A} = \cdot 535$ bei verschiedenen Stellwinkeln α folgende Werthe für den Widerstands-Coefficienten n_1, und zwar

für $\alpha = 15^0, 20^0, 25^0, 30^0, 35^0, 40^0, 45^0, 50^0, 55^0, 60^0, 65^0, 70^0$
sofort $n_1 = 90, 62, 42, 30, 20, 14, 9\cdot5, 6\cdot6, 4\cdot6, 3\cdot2, 2\cdot3, 1\cdot7$.

e) Bei Hähnen tritt das Wasser (Fig. 126) aus dem Querschnitt A der Röhre durch die verengte Oeffnung $ab = A'$, in die eben so weite Bohrung A und von da wieder durch die verengte Oeffnung $cd = A'$ in den ursprünglichen Querschnitt A über. Bei den von Weisbach angestellten Versuchen war das Verhältniss von $\frac{A'}{A}$ derart, dass bei den parallelopipedischen Röhren dieselben bei einem Stellwinkel $\alpha = 66\frac{3}{4}{}^0$ und bei den cylinderischen Röhren bei $\alpha = 82\frac{1}{8}{}^0$ vollkommen geschlossen waren. Diess vorausgesetzt, fand er den Widerstands-Coefficienten n_1,

bei parallelopipedischen Röhren:

für $\alpha =$	5^0,	10^0,	15^0,	20^0,	25^0,	30^0,	35^0,	40^0,	45^0,	50^0,	55^0,	$66\frac{3}{4}{}^0$
und $\frac{A'}{A} =$	·926,	·849,	·769,	·687,	·604,	·520,	·436,	·352,	·269,	·188,	·110,	0
sofort $n_1 =$	·05,	·31,	·88,	1.84,	3.45,	6·15,	11.2,	20·7,	41·0,	95·3,	275,	∞

bei cylinderischen Röhren:

für $\alpha =$	5^0,	10^0,	15^0,	20^0,	25^0,	30^0,	35^0,	40^0,	45^0,	50^0,
und $\frac{A'}{A} =$	·926,	·850,	·772,	·692,	·613,	·535,	·458,	·385,	·315,	·250,
sofort $n_1 =$	·05,	·29,	·75,	1·56,	3·10,	5·47,	9·68,	17·3,	31·2,	52·6,
$\alpha =$	55^0,	60^0,	65^0,	$82\frac{1}{8}{}^0$						
$A' : A =$	·190,	·137,	·091,	0						
$n_1 =$	106,	206,	486,	∞*).						

223. Kommt bei einer Röhrenleitung eine Krümmung vor, so lässt sich der dabei eintretende Gefällsverlust, welcher wieder dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers proportional ist, nach Navier und Morin (auf den Wiener Fuss bezogen) durch
$$z'' = (\cdot 01233 + \cdot 0186\, R) \frac{S}{R^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \cdot (m)$$
ausdrücken, wenn R den Krümmungshalbmesser CA der Achse (Fig. 127), S die Länge des betreffenden Bogens ANB bezeichnet.

Weisbach findet aus seinen Versuchen, dass man den Widerstands-Coefficienten $n'' = \left[\cdot 131 + \cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}$ ausdrücken

*) M. s. das Weitere in den „Versuchen über den Ausfluss des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. Weisbach. Leipzig, 1842."

kann, wenn D den Durchmesser der cylinderischen Röhre, R den Krümmungshalbmesser und α den Krümmungswinkel ACB in Graden ausgedrückt bezeichnet.

Für parallelopipedische Röhren wäre ebenso:

$$n'' = \left[\cdot 124 + \cdot 274 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}.$$

Ist z. B. bei einer solchen Krümmung von cylinderischen Röhren $D = \frac{1}{2}$, $R = 10$ Fuss und $\alpha = 90^0$, so wäre nach der Weisbach'schen Formel, da der Theil $\cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 163 \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 000004556$ hier keinen Einfluss hat, $n'' = \cdot 131 \times \frac{1}{2} = \cdot 0655$, folglich der Gefällsverlust:

$$z'' = \cdot 0655 \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen würde nach der erstern Formel (m) wegen $S = R\alpha = 10 \times \frac{3\cdot 1416}{2}$ $= 15\cdot 7080$, diese Widerstandshöhe $z'' = \cdot 19833 \times \frac{15\cdot 708}{100} \frac{v^2}{2g}$, d. i.

$$z'' = \cdot 03115 \frac{v^2}{2g}$$

ungefähr nur halb so gross. Jedenfalls ist dieser Widerstand so gering, dass er in der Regel gegen die übrigen vernachlässiget werden kann, besonders wenn der Krümmungshalbmesser nicht gar zu klein ist.

224. Bildet endlich die Achse der Leitung an irgend einem Puncte B (Fig. 128) einen scharfen Winkel ABC, also die Röhre an dieser Stelle ein Knie, so lässt sich der durch die plötzliche Aenderung der Richtung und der im Knie entstehenden Contraction herbeigeführte Verlust der Gefällshöhe z''' auf folgende Weise bestimmen.

Ist wieder A der Querschnitt der Röhre, v die Geschwindigkeit des Wassers, der Ablenkungswinkel $CBD = \alpha$, und nimmt man an, dass sich jedes Wassertheilchen in einer, zur gebrochenen Linie ABC parallelen Richtung fortbewegt, so geht in jedem Zeitelement dt eine Wasserschichte von dem Volumen $Av\,dt$, oder, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, von dem Gewichte $\gamma A v\,dt$ mit der Geschwindigkeit v von der Richtung AB plötzlich in jene BC über, vereinigt sich mit dem in diesem Schenkel befindlichen Wasser und fliesst mit derselben Geschwindigkeit v weiter.

Zerlegt man nun die Geschwindigkeit dieser Wassermasse $m = \gamma A v\,dt$ vor und nach dem Stosse in zwei Seitenkräfte, eine nach der Richtung AB, die andere darauf senkrecht, so hat man für diese beiden Seitenkräfte vor dem Stoss beziehungsweise v und 0, und nach dem Stoss $v\, Cos\, \alpha$ und $v\, Sin\, \alpha$, also ist der durch den Stoss herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft nach der Relation (2) in Nr. **158**, Anmerkung:

$$m\,[(v - v\, Cos\, \alpha)^2 + (0 - v\, Sin\, \alpha)^2] = 2\, m v^2 (1 - Cos\, \alpha)$$
$$= 4\, m v^2 Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Es ist also der Verlust an Wirkungsgrösse oder Arbeit während der Zeit dt, wenn man für m den Werth herstellt:

$$4 \frac{\gamma A v\, dt}{2g} v^2 Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha,$$

oder für die Zeiteinheit, wenn man die entsprechende Masse $\gamma A v = M$ setzt:

$$4\, M \frac{v^2}{2g}\, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha;$$

es ist also

$$M z''' = 4\, M \frac{v^2}{2g}\, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha,$$

und daher die gesuchte Widerstandshöhe:

$$z''' = 4 \frac{v^2}{2g}\, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = n''' \frac{v^2}{2g},$$

wenn man den Widerstands-Coefficienten $4\, Sin^2 \frac{1}{2} \alpha = n'''$ setzt.

Anmerkung. Der hier theoretisch gefundene Widerstands-Coefficient ist gegen die Erfahrung aus dem Grunde zu gross, weil sich die Wassertheilchen nicht sämmtlich mit der gebrochenen Linie ABC parallel, sondern die mittleren Fäden in Curven bewegen, welche einen geringeren Verlust an lebendiger Kraft bedingen. Weisbach glaubt aus seinen Versuchen diesen Widerstands-Coefficienten durch die Formel

$$n''' = \cdot 9457\, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + 2\cdot 047\, Sin^4 \tfrac{1}{2} \alpha$$

ausdrücken zu können und berechnet darnach eine Tabelle, nach welcher

für	$\alpha =$ 20°,	40°,	60°,	80°,	90°,	100°,	110°,	120°,	130°,	140°,
sofort	$n''' =$ ·046,	·139,	·364,	·740,	·984,	1·260,	1·556,	1·861,	2·158,	2·431

wird.

Aber selbst wenn diese Coefficienten nicht zu klein sein sollten, ist der Widerstand immer noch gross genug, um sich bestimmen zu lassen, alle scharfen Winkel bei den Leitungen möglichst zu vermeiden und dafür sanfte Krümmungen zu wählen.

225. Verbindet nun eine Röhrenleitung von den in den vorigen Nummern angenommenen Dimensionen, d. i. vom Durchmesser D und der Länge L, den oberen Sammelbehälter ABC (Fig. 129) mit einem tiefer liegenden Behälter $A'B'D$, wobei der Oberwasserspiegel AB die Fläche F und der untere $A'B'$ jene f haben soll, und ist, sobald der Beharrungsstand eingetreten und das Wasser durch die Röhre mit der Geschwindigkeit v fliesst, die constante

Druck- oder Gefällshöhe $EF = H$, ferner die Geschwindigkeitshöhen, welche den Geschwindigkeiten $v' = \frac{A}{F} v$ und $v'' = \frac{A}{f} v$ entsprechen, mit welchen die Wasserschichten in den oberen Behälter bei AB ein- und im unteren Behälter $A'B'$ austreten $\frac{v'^2}{2g} = h'$ und $\frac{v''^2}{2g} = h''$, so hat man, wenn der atmosphärische Druck auf beide Wasserspiegel als gleich gross angenommen wird, die allgemeine Gleichung:

$$H + h' = h'' + z + \Sigma(z') + \Sigma(z'') + \Sigma(z''') \ldots (1),$$

wenn man die Wassersäulenhöhe z zur Ueberwindung der Reibung an den Röhrenwänden aus Nr. **215** oder **216**, die Summe der Wassersäulenhöhen $\Sigma(z')$ zur Ueberwindung der in der Leitung vorkommenden plötzlichen Verengungen oder Erweiterungen nach den Nrn. **217** bis **222**, jene $\Sigma(z'')$ zur Ueberwindung des Widerstandes in Krümmungen nach Nr. **223** und endlich jene $\Sigma(z''')$, welche dem Widerstande in scharfen Biegungen entsprechen, nach Nr. **224** bestimmt. Führt man statt diesen Widerstandshöhen $z, z', \ldots$ die entsprechenden Widerstands-Coefficienten $n, n', \ldots$ und anstatt der Geschwindigkeitshöhen h, h', h'' die Geschwindigkeiten selbst ein, so verwandelt sich die vorige Gleich. (1) wegen $z = n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ (welche Form man sofort dem Ausdrucke (2) in **215** geben kann) und $z' = n' \frac{v^2}{2g}$, $z'' = n'' \frac{v^2}{2g}, \ldots$ in die folgende:

$$H = \frac{v^2}{2g} \left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{F^2} + n \frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') \right] \ldots (2).$$

Ist der untere Behälter nicht vorhanden, sondern mündet die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft aus, so ist $f = A$, und wenn man unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt A der Röhre gegen jenen des Behälters F sehr klein sei, das Glied $\frac{A^2}{F^2}$ vernachlässigt (die Wasserschichten bei AB nämlich als still stehend ansieht), sofort:

$$H = \frac{v^2}{2g} \left[1 + n \frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') \right] \ldots (3).$$

Mündet dagegen die Leitungsröhre durch ein verengtes Mundstück in die freie Luft aus, so muss man, wenn f der Querschnitt der Ausmündung ist, anstatt 1 wieder das obige Glied $\frac{A^2}{f^2}$ der Gleich. (2) setzen, wenn keine Contraction Statt hat, sonst aber $\frac{A^2}{\alpha f}$, nehmen, wenn α der entsprechende Contractions-Coefficient ist. Sind nicht alle Kanten gehörig abgerundet, so muss man in die Summe $\Sigma(n')$ auch noch den Widerstands-Coefficienten aufnehmen, welcher dem Widerstande entspricht, den das Wasser beim Durchgange durch dieses Mundstück erfährt.

Anmerkung. Wäre der Druck auf die Flächeneinheit auf den oberen Wasserspiegel durch die Wassersäule h' und auf den unteren Wasserspiegel durch jene h'' ausgedrückt und h' von h'' verschieden, so müsste man in dieser Gleichung $H + h' - h''$ anstatt H setzen.

Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit aus einer Röhrenleitung.

226. Für den ganz allgemeinen Fall darf man nur die vorige Gleichung (2) oder (3) nach v auflösen, um diese Geschwindigkeit zu erhalten. Nehmen wir hier nur den einfachsten Fall und setzen eine Leitung voraus, in welcher weder Verengungen noch Krümmungen vorkommen, und bei welcher auch durch gehörige Erweiterung der Einflussöffnung die Contraction des Wassers beim Eintritt aus dem Behälter in die Röhrenleitung vermieden ist, so hat man, mit Beibehaltung aller früheren Bezeichnungen in der vorigen Formel (3) alle mit dem Summenzeichen Σ behafteten Glieder auszulassen und

$$(a) \quad H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

zu setzen, woraus sofort

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH}{1 + n\frac{L}{D}}\right]} \ldots (4) \quad \text{folgt.}$$

Tritt dagegen das Wasser aus dem Behälter mit Contraction in die Leitung, so hat man mit Hinzufügung des betreffenden Widerstands-Coefficienten $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ (Nr. **218**, Gleich. β) oder jenes $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ [Nr. **191** (c)] $H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + n\frac{L}{D}\right]$ oder wenn man Kürze halber $\frac{\alpha}{\sqrt{[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]}} = m$ setzt, auch

$$(a') \quad H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right),$$

woraus sofort: $v = m\sqrt{\left(\frac{2gH}{1 + nm^2\frac{L}{D}}\right)} \ldots (5)$ folgt.

Anmerkung. Da man den diesem Fall entsprechenden Contractions-Coefficienten (Nr. **218**, Anmerkung) $\alpha = \cdot 596$ setzen kann, so folgt für den Coefficienten m der mittlere Werth $m = \cdot 83$, welcher nahe mit dem Geschwindigkeits-Coefficienten ·82 beim Ausflusse des Wassers aus kurzen cylinderischen Ansatzröhren übereinstimmt (d. i. ·816 Nr. **190**), und da er diesen in etwas übertrifft, nur den Beweis liefert, dass selbst bei einem kurzen Ansatzrohr schon einiger Reibungswiderstand an den Röhrenwänden stattfindet.

227. Nimmt man für die Widerstandshöhe z anstatt des Ausdruckes (7) in Nr. **216** jenen (2) in Nr. **215**, so wird

$$(b) \quad H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und daraus, wenn man $g = 31$ und für α, β die in Nr. **215** angegebenen, auf den Wiener Fuss sich beziehenden Werthe (m) setzt (und durch Division mit $8g\beta$ den Coefficienten $8g\beta L + D$ auf die Form $L + 36{\cdot}6D$ bringt):

$$v = -\frac{\cdot 002536\, gL}{L + 36{\cdot}6D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002536\, gL}{L + 36{\cdot}6D}\right)^2 + \frac{73{\cdot}2\, gDH}{L + 36{\cdot}6D}\right]} \ldots (6).$$

Ist die Leitung so lang, dass man $36{\cdot}6D$ gegen L auslassen darf, so ist einfacher:

$$v = -\cdot 002536g + \sqrt{\left[(\cdot 002536g)^2 + \frac{73{\cdot}2gDH}{L}\right]} \ldots (7).$$

Ist die Geschwindigkeit v grösser als 2 Fuss, so kann man, da dann das Glied mit der 1sten Potenz von v vernachlässigt werden darf (§. 369)

$$v = 8{\cdot}427 \sqrt{\left(\frac{gHD}{L + 35.5D}\right)} = 46{\cdot}95 \sqrt{\left(\frac{HD}{L + 35{\cdot}5D}\right)} \ldots (8)$$

setzen.

Nimmt man dagegen die wenigstens eben so viel Vertrauen verdienenden Werthe (n) (aus Nr. **215**), so erhält man:

$$(6') \quad v = -\frac{\cdot 002800\, gL}{L + 37{\cdot}2D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002800\, gL}{L + 37{\cdot}2D}\right)^2 + \frac{74{\cdot}405\, gDH}{L + 37{\cdot}2D}\right]}.$$

Kann man $37{\cdot}2D$ gegen L auslassen, so ist:

$$(7') \quad v = -\cdot 002800g + \sqrt{\left[(\cdot 002800g)^2 + \frac{74{\cdot}405\, gDH}{L}\right]}.$$

Ist die Geschwindigkeit v nach der einen oder andern dieser Formeln bestimmt, so findet man die per Secunde durch die Röhrenleitung fliessende Wassermenge aus der Formel

$$M = \tfrac{1}{4}\pi D^2 v = \cdot 7854 D^2 v \ldots (9).$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dass sich diese Formeln nicht nur aut den Wiener Fuss als Einheit, sondern auch auf den Meter und überhaupt auf jedes beliebige Mass beziehen, wenn man nur g im ersteren Falle $= 31$, im zweiten $= 9{\cdot}808$ und so überhaupt in dem landesüblichen Masse ausgedrückt substituirt.

228. Um die Gefällshöhe H zu bestimmen, welche vorhanden sein muss, damit eine Röhrenleitung von der Länge L und dem Durchmesser D per Secunde M Kubikfuss Wasser liefere, suche man zuerst aus der vorigen Gleichung (9) die Geschwindigkeit $v = \frac{4M}{\pi D^2}$ und damit die Gefällshöhe H aus (a) oder (a') in Nr. **226**, oder aus (b) in Nr. **227**, d. i. entweder, wenn das Wasser aus dem Behälter ohne Contraction in die Röhren tritt, aus der Formel:

$$H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei $n = {\cdot}01439 + \frac{{\cdot}01685}{\sqrt{v}}$ ist, oder, wenn das Wasser mit Contraction eintritt, aus der Formel:

$$H = \left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei n den vorigen Werth hat und $m = {\cdot}83$ ist, oder endlich aus der Formel:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2),$$

wobei $\alpha = {\cdot}00001733$ und $\beta = {\cdot}0001101$, oder auch $\alpha = {\cdot}0000188$ und $\beta = {\cdot}0001083$ ist.

Beispiel. Um diese verschiedenen Werthe wenigstens an einem Beispiele mit einander zu vergleichen, in welchem $D = {\cdot}79$ und $L = 4587$ Fuss ist, ferner $M = 1{\cdot}235$ Kubikfuss sein soll, hat man zuerst aus der Formel (9) für die Geschwindigkeit $v = 2{\cdot}5196$ Fuss und damit aus der letzten Formel für die Gefällshöhe $H = 17{\cdot}35$ oder $H = 17{\cdot}17$ Fuss, je nachdem man für die Coefficienten α und β die ersteren oder letzteren der eben angegebenen Werthe nimmt.

229. Um den Durchmesser D zu bestimmen, welchen eine Röhrenleitung erhalten muss, damit diese bei einem Gefälle $= H$ in jeder Secunde M Kubikfuss Wasser liefere, hat man zuerst, wenn man in die Formel (9) (Nr. **227**) den genäherten Werth für v aus der Formel (8) setzt, und darin noch $35{\cdot}5\,D$ gegen L auslässt:

$$M = {\cdot}7854 \times 46{\cdot}95\,D^2\sqrt{\left(\frac{HD}{L}\right)} = 36{\cdot}874\sqrt{\left(\frac{HD^5}{L}\right)}$$

und daraus

$$D = {\cdot}2362\sqrt[5]{\left(\frac{LM^2}{H}\right)}\ldots(c).$$

Anmerkung. Genauer kann man diesen Durchmesser dadurch finden, dass man in der Gleichung $D = \sqrt{\frac{4M}{\pi v}}$ (welche aus 9 folgt) für v versuchsweise mehrere Werthe annimmt und damit die entsprechenden Werthe von D berechnet. Je zwei zusammengehörige Werthe von v und D setzt man dann in die Gleichung $H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ [Gleich. (b) in Nr. **227**], oder wenn man die Weisbach'schen vorzieht, in jene (a) oder (a') in Nr. **226**, so sind jene Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, die wahren Werthe von v und D.

230. Um endlich noch die vortheilhafteste Geschwindigkeit zu finden, bei welcher die Wasserkraft, welche durch eine Röhrenleitung von gegebenen Dimensionen erhalten werden kann, ein Maximum wird, hat man die Wirkungsgrösse der per Secunde mit der Geschwindigkeit v ausfliessenden Wassermenge M, wenn diese durch W bezeichnet wird: $W = \gamma M \frac{v^2}{2g} = \gamma M h$, oder wegen $M = \frac{1}{4}\pi D^2 v$ auch $W = A D^2 h v$, wenn man Kürze halber $\frac{1}{4}\gamma\pi = A$ setzt. Nun folgt aber aus $H = h + z = h + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ sofort:

$$h = H - \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2),$$

folglich ist

$$W = AD^2\left[Hv - \frac{4L}{D}(\alpha v^2 + \beta v^3)\right]$$

und es muss in dieser Gleichung v so bestimmt werden, dass dafür W am grössten wird. Nun ist aber, wenn man nach der bekannten Regel verfährt:

$$\frac{dW}{dv} = AD^2\left[H - \frac{4L}{D}(2\alpha v + 3\beta v^2)\right] = 0 \quad \text{oder} \quad 2\alpha v + 3\beta v^2 = \frac{DH}{4L}$$

und daraus

$$v = -\frac{\alpha}{3\beta} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{9\beta^2} + \frac{1}{12\beta} \cdot \frac{HD}{L}\right]}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für α und β die obigen Werthe (m) aus Nr. **215**, d. i. $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$, so erhält man nahe genug, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit, wofür die Wirkung W, weil dafür der 2te Differenzial-Quotient negativ ausfällt, in der That ein Maximum wird:

$$v = -\cdot 0525 + \sqrt{\left(\cdot 002756 + 756 \cdot 9 \frac{HD}{L}\right)}.$$

Anmerkung. Diese Entwickelung kann, da man es nicht in seiner Gewalt hat, diese vortheilhafteste Geschwindigkeit herbeizuführen, nur dazu dienen, um sich zu überzeugen (man vergleiche diese Formel mit jener (7) in Nr. **227**), dass diese vortheilhafteste Geschwindigkeit in der Regel immer kleiner als die wirkliche ist, folglich auch das Maximum der Wirkung des durch die Leitung fliessenden Wassers nicht erreicht werden kann.

231. Bestände die Röhrenleitung aus mehreren Stücken, beziehungsweise von den Längen $L, L_1, L_2, \ldots$ den Querschnitten $A, A_1, A_2, \ldots$ den Durchmessern $D, D_1, D_2, \ldots$ in welchen das Wasser mit den Geschwindigkeiten $v, v_1, v_2, \ldots$ fliesst und wären $n, n_1, n_2, \ldots$ die entsprechenden Reibungs-Coefficienten, so müsste man in den Formeln (2) und (3) Nr. **225** statt $n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$ setzen:

$$n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}+n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g}+n_2\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g}+\ldots$$

d. i. wegen $v_1=\frac{D^2}{D_1^2}v,\ v_2=\frac{D^2}{D_2^2}v, \ldots$ sofort:

$$\left(n\frac{L}{D}+n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{D^4}{D_1^4}+n_2\frac{L_2}{D_2}\frac{D^4}{D_2^4}+\ldots\right)\frac{v^2}{2g},$$

d. h. also, man muss $n\frac{L}{D}+n_1\frac{L_1}{D_1}\frac{D^4}{D_1^4}+\ldots$ anstatt $n\frac{L}{D}$ setzen.

232. Um die Höhe von springenden Strahlen zu bestimmen, welche durch Röhrenleitungen gespeist werden, muss man, wenn das Mundstück *abcd* (Fig. 130) lang oder sehr eng ist, nicht bloss auf den durch die plötzliche Querschnittsänderung hervorgehenden, sondern auch auf jenen Widerstand Rücksicht nehmen, welcher aus der Reibung beim Durchgange des Wassers durch dieses Mundstück entsteht. Bezeichnet man nämlich die Länge des Mundstückes mit l, ihren Durchmesser mit d und den nach Nr. **219** (Anmerk.) zu bestimmenden Widerstands-Coefficienten für den Eintritt des Wassers mit μ, so muss man nach der eben gemachten Bemerkung (vorige Nr.) in der allgemeinen Formel (2) statt $n\frac{L}{D}$ setzen: $n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$, und wenn man den Widerstand, welcher beim Eintritte des Wassers in das Mundstück von der allgemeinen Summe $\Sigma(n')$ ausscheidet und für sich hinstellt, $\mu+\frac{A^2}{f^2}$ statt $\frac{A^2}{f^2}\left(=\frac{D^4}{d^4}\right)$ setzen; dadurch erhält man für den vorliegenden Fall, wenn man wieder den kleinen Quotienten $\frac{A^2}{f^2}$ auslässt:

$$H=\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2}+\mu+n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}+\Sigma(n')+\Sigma(n'')+\Sigma(n''')\right]\ldots(10)$$

dabei bezeichnen, wie bereits bemerkt, μ den Widerstands-Coefficienten für den Eintritt des Wassers in das Mundstück (Nr. **219**), $n\frac{L}{D}$ und $n_1\frac{l}{d}$ die Widerstands-Coefficienten für die

Reibung des Wassers an den Wänden der Leitungsröhre und des Mundstückes (Nr. **215** und **216**), n' den Widerstands-Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch irgend eine in der Leitungsröhre befindliche Scheidewand, plötzliche Erweiterung oder Verengung, wozu auch der Eintritt des Wassers aus dem Sammelbehälter in die Röhre gehört, wenn diese nicht nach aufwärts gehörig erweitert ist, ein Ventil u. s. w. (Nr. **217** bis **222**), n'' den Widerstands-Coefficienten durch eine Krümmung (Nr. **223**) und endlich n''' den Widerstands-Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein Knie (Nr. **224**).

Anmerkung. Was den Coefficienten n_1 betrifft, so kann man diesen, da für gewöhnlich die Geschwindigkeit des Wassers im Mundstück sehr gross ist $n_1 = \cdot 016$ setzen.

233. Da das Wasser aus der Mündung mit der Geschwindigkeit $\frac{A}{f}v$ ausspringt, so erreicht der Strahl (abgesehen vom Widerstande der Luft) die Höhe $h = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g}$. Führt man diese Sprunghöhe h in die vorige Formel ein, und setzt Kürze halber die Summe der Glieder

$$\mu + n\frac{L}{D} + n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') = S, \text{ so erhält man}$$

$$(11) \quad H = h\left(1 + \frac{f^2}{A^2}S\right) \text{ und daraus } h = \frac{H}{1 + \frac{f^2}{A^2}S} \ldots (12).$$

Da aus der Gleichung (11) $h = H - h\frac{f^2}{A^2}S$ und (Fig. 131) $ED = EC - CD = H - h = H - (H - h\frac{f^2}{A^2}S) = h\frac{f^2}{A^2}S$ ist, so folgt, dass die Sprunghöhe $CD = h$ um diese Höhe $ED = h\frac{f^2}{A^2}S$ kleiner als die disponible Druckhöhe $CE = H$ ist.

Anmerkung. Denkt man sich die Druckhöhe $CE = H$ im Puncte D so getheilt, dass sich verhält $CD : DE = h : H - h = 1 : \frac{f^2}{A^2}S$, so bezeichnet ED den Verlust an Druckhöhe, d. i. die gesammte Widerstandshöhe, sowie CD die wirksame Druckhöhe oder Sprunghöhe.

Mit Rücksicht darauf, dass der vertical aufsteigende Wasserstrahl, theils wegen des Luftwiderstandes, theils weil die zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht völlig diese Höhe h, sondern die geringere Höhe h_1 erreicht, kann man nach D'Aubuisson für diese Steighöhe setzen

$$h_1 = h(1 - \cdot 0032h),$$

wenn man nämlich den Wiener Fuss zur Einheit nimmt.

234. Soll das Wasser aus einer Hauptleitung durch mehrere Nebenleitungen, z. B. durch zwei Zweigröhren geleitet werden, so findet man die Geschwindigkeiten, welche das Wasser in diesen Röhrenleitungen annimmt, auf folgende Weise.

Es sei H die Höhe des Reservoirs über dem Theilungspunct der Leitung, L die Länge und D der Durchmesser der Hauptleitungsröhre, sowie V die Geschwindigkeit des Wassers in derselben. Ferner sei h die Höhe des genannten Theilungspunctes über der Ausflussöffnung der ersten Zweigröhre, sowie l ihre Länge, d ihr Durchmesser und v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben; für die zweite Zweigröhre sollen h', l', d' und v' dieselbe Bedeutung haben.

Diess vorausgesetzt ist die am Theilungspunct der Hauptleitung nach Abzug der Widerstandshöhe noch vorhandene wirksame Druckhöhe [**215**, Relat. (2)] $h'' = H - \frac{4L}{D}(\alpha V + \beta V^2)$.

Dagegen ist die zur Bewegung des Wassers im ersten Zweigrohr nöthige Druckhöhe [**227**, Relat. (b)]:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(\alpha v + \beta v^2),$$

sowie jene im zweiten Zweigrohre:

$$h' = \frac{v'^2}{2g} + \frac{4l'}{d'}(\alpha v' + \beta v'^2).$$

Da nun diese 3 Druckhöhen einander gleich sein müssen, so hat man die beiden Gleichungen:

$$h'' = h \text{ und } h'' = h'$$

und man darf zu diesen nur noch die Continuitäts-, d. i. die Bedingungs-Gleichung hinzufügen, dass die in der Hauptröhre fliessende Wassermenge gleich sein muss der Summe der Wassermengen, die in den Zweigröhren fortfliessen, d. i. die Gleichung:

$$VD^2 = vd^2 + v'd'^2,$$

um aus diesen 3 Gleichungen die 3 Geschwindigkeiten V, v und v' bestimmen zu können.

Anmerkung. Fliesst das Wasser aus den Zweigröhren (deren Zahl natürlich nicht auf 2 beschränkt zu sein braucht) nicht voll, sondern durch ein Ansatzrohr oder Mundstück vom lichten Durchmesser, beziehungsweise δ und δ' aus, so muss man, wie leicht zu sehen, in den obigen Ausdrücken von h und h' anstatt v^2 und v'^2 sofort $v^2\frac{d^4}{\delta^4}$ und $v'^2\frac{d'^4}{\delta'^4}$ setzen.

235. Um schliesslich noch den in irgend einem Querschnitt mn (Fig. 129) einer Röhrenleitung stattfindenden hydraulischen Druck zu finden, sei die diesem Drucke entsprechende Druckhöhe $= \mathfrak{z}$, der lothrechte Abstand des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes mn unter dem oberen Wasserspiegel AB, d. i. $ac = z$, die Länge des Röhrenstückes $Cc = l$ und jene von $cD = L - l = l'$, so ist, wenn man zuerst jenen Theil cD der Leitung betrachtet, welcher zwischen der gedrückten Stelle c und der Ausmündung liegt, in der Gleichung (2) Nr. **225**, in welcher man sich den ersten Theil (nach Anmerk. der erwähnten Nummer) mit $H + h' - h''$ geschrieben denken muss, $\mathfrak{z}$ statt h' und $H - z$ statt H zu setzen. Bezeichnet man ferner noch die Summenzeichen Σ durch Σ_1, insoferne sie sich auf jene Widerstände, als Verengungen u. s. w. beziehen, welche im oberen Theile Cc, dagegen mit Σ_2, insoferne sie sich auf die im unteren Theile cD der Leitung vorkommenden Widerstände beziehen und setzt statt F eine allgemeine Querschnittsfläche a, so hat man für das Stück cD:

$$H - z + \mathfrak{z} - h'' = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{a^2} + n\frac{l'}{D} + \Sigma_2(n') + \Sigma_2(n'') + \Sigma_2(n''')\right] (k).$$

Zieht man nun diese Gleichung von der genannten (2) in Nr. **225** ab, so erhält man für den oberen Röhrentheil, wegen $L - l' = l$ und $\Sigma - \Sigma_2 = \Sigma_1$ sofort:

$$\mathfrak{z} = z + h' - \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{a^2} - \frac{A^2}{F^2} + n\frac{l}{D} + \Sigma_1(n') + \Sigma_1(n'') + \Sigma_1(n''')\right] .. (13),$$

d. h. die Druckhöhe, welche dem im Querschnitte a stattfindenden hydraulischen Drucke entspricht, ist gleich der verticalen Tiefe des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes unter dem Wasserspiegel des Behälters, vermehrt um die Wassersäulenhöhe, welche dem auf den Wasserspiegel stattfindenden Drucke entspricht und vermindert um die Summe der Geschwindigkeitshöhe des Wassers im betreffenden Querschnitt und der Widerstandshöhen aller im oberen Theile der Röhre, vom betreffenden Querschnitte an bis zum Behälter vorkommenden Hindernisse.

Ist γ das Gewicht von 1 Kubikfuss Wasser, so ist der hydraulische Druck q auf die Flächeneinheit, d. i. auf 1 Quadratfuss:

$$q = \gamma\mathfrak{z}.$$

236. Für den Fall, als der untere Behälter nicht vorhanden ist und die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft ausmündet, ferner weder im oberen Behälter noch in der Röhre plötzliche Querschnittsänderungen vorkommen, endlich auch keine Contraction bei der Einmündung der Röhre stattfindet, hat man für den hydraulischen Druck auf die Flächeneinheit in irgend einem Puncte des Behälters, wegen $a = F$ und $n = n' = \ldots = 0$ sofort:

$$q = \gamma \mathfrak{z} = \gamma z + \gamma h';$$

dagegen für irgend einen Querschnitt der Röhre, z. B. bei c (Fig. 132) wegen $a = A$, und wenn man den in der Regel sehr kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ wieder auslässt:

$$q = \gamma z + \gamma h' - \gamma \left(1 + n \frac{l}{D}\right) \frac{v^2}{2g},$$

oder da für diesen Fall die Gleich. (3) in Nr. **225** in $H = \frac{v^2}{2g}\left(1 + n \frac{L}{D}\right)$ übergeht, woraus $\frac{v^2}{2g} = \frac{H}{1 + n\frac{L}{D}}$ folgt, auch:

$$q = \gamma h' + \gamma z - \gamma H \frac{1 + n\frac{l}{D}}{1 + n\frac{L}{D}} \ldots (14).$$

Da dieser Quotient $1 + n\frac{l}{D} : 1 + n\frac{L}{D}$, besonders wenn l nicht sehr verschieden von L ist, also namentlich für die unteren Querschnitte der Leitung, nahe $= \frac{l}{L}$ ist, so hat man auch sehr nahe:

$$q = \gamma h' + \gamma\left(z - \frac{l}{L} H\right) \ldots (15).$$

Anmerkung. Findet in einer horizontalen Röhrenleitung keine plötzliche Verengung oder Erweiterung, sowie auch keine Contraction beim Eintritt des Wassers statt, so ist, wenn die Röhre mit voller Oeffnung in die freie Luft ausmündet, nach der Formel (k) in Nr. **235**, wegen $f = a = A$, $n' = n'' = \ldots = 0$ und $z = H$ sofort:

$$\mathfrak{z} - h'' = n \frac{l'}{D} \frac{v^2}{2g},$$

so dass also der Ueberschuss des inneren Wasserdruckes (oder wenn man den Druck der Atmosphäre, da er, wenn es sich z. B. um die Bestimmung der Wanddicke handelt, von innen und aussen gleich stark ist und sich aufhebt, unberücksichtigt lässt, sofort der hydraulische Druck) an dem betreffenden Querschnitt, dem Drucke einer Wassersäule gleich kommt, welche nothwendig ist, um die Reibung des Wassers in jenem Theile der Röhre, welcher zwischen der gedrückten Stelle und der Ausmündung liegt, zu überwinden. Dieser Druck wächst also genau wie die Entfernung der gedrückten Stelle von der Ausmündung, in welchem Puncte selbst er gleich Null ist.

Ist dagegen die Ausmündung verengt und vernachlässigt man den Röhrenwiderstand, so folgt wieder aus derselben Formel (k), wegen $a = A$:

$$\mathfrak{z} - h'' = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = H - h \text{ oder } \gamma(\mathfrak{z} - h'') = \gamma(H - h),$$

d. h. der Ueberschuss dieses Druckes, oder wenn man den atmosphärischen Druck $\gamma h''$ unberücksichtiget lässt, der hydraulische Druck, ist in diesem Falle in der ganzen Röhre derselbe, und zwar gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe die um die Geschwindigkeitshöhe des fliessenden Wassers verminderte Druckhöhe ist. (Vergleiche §. 371.)

237. Ist B (Fig. 132) jener Punct des Wasserspiegels, welcher lothrecht über der Einmündung C der Röhre liegt, und zieht man die Gerade BD, so werden in der Regel die Stücke Bb und BD sehr wenig von jenen Cc und CD, d. i. von l und L verschieden sein, so dass man nahe $\frac{Bb}{BD} = \frac{l}{L}$, und wegen $ab : ED = Bb : BD$ auch $ab = \frac{Bb}{BD} ED = \frac{l}{L} H$ setzen kann.

Da nun $ac = z$ ist, so wird nahe $bc = z - \frac{l}{L} H$, folglich nach der letzten Gleichung (15) der hydraulische Druck q in c sehr nahe gleich $\gamma h' + \gamma . bc$, d. i. gleich dem hydrostatischen Drucke einer oben offenen Wassersäule von der Höhe bc sein, auf deren obere Fläche also noch der athmosphärische Druck $\gamma h'$ wirkt.

Würde man daher die Röhre c an der obern Seite durchbohren und auf diese Oeffnung ein oben offenes Rohr (einen sogenannten Piëzometer oder Druckmesser) aufsetzen, so würde das Wasser darin bis auf die Höhe b steigen und sonach den in diesem Puncte der Leitung stattfindenden hydraulischen Druck messen oder angeben (§. 372, Anmerkung 2).

Macht man die über B gezogene Verticale $BF = h'$, d. i. gleich der Höhe einer mit dem Luftdrucke im Gleichgewichte stehenden Wassersäule (also nahe = 32 Fuss) und zieht FG parallel mit BD, so wird der in c herrschende hydraulische Druck q mit Inbegriff des atmosphärischen durch das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe cN ausgedrückt, oder es ist $q = \gamma . Nc$. (Vergleiche auch die Anmerkungen zu §. 372.)

Anmerkung. Liegt der betreffende Punct c in b, so ist $bc = 0$ und $q = \gamma h' = \gamma . Nb$. Liegt c in N, so ist $bc = -bN = -h'$ und $q = 0$. Könnte c über N z. B. in c' liegen, was z. B. der Fall wäre, wenn die Leitung die Form $Cc'D$ hätte, so wäre cN, also auch der Druck q negativ.

Es ist jedoch leicht zu sehen, dass die Gerade FG die Grenze ist, über welche hinaus kein Punct der Leitung liegen, ja dass man selbst nicht einmal so weit gehen darf, wenn der Ausfluss durch die Leitung möglich sein soll.

Theilt man die ganze Druckhöhe $ED = H$ in die beiden Höhen $EH = h_1$ und $HD = h_2$, wovon also die erstere dem Zuflussbehälter oder Reservoir und die letztere der Röhre zukommt, so ist, wenn die Röhre ohne alle Verengungen und Biegungen in die freie Luft ausmündet, nach Gleichung (3) in Nr. **225**:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + n\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man für den Reibungswiderstand den Ausdruck (2) in Nr. **215** wählt, auch:
$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2).$$

Damit nun das Wasser den Querschnitt der Röhre völlig ausfülle oder mit vollem Querschnitt ausfliesse, muss das Reservoir eine hinlängliche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dass man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 grösser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden lässt und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1 in §. 369 die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe 16·73 und die ganze Gefällshöhe 16·83 Fuss, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fuss, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fuss Geschwindigkeit aus der Leitung ausfliesst. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$, also jene der Leitung $h_2 > 16{\cdot}73$ Fuss nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfliessen.

Von dem Stosse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 377.)

238. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sei allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stossenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit, nach und mit welcher diese Fläche gleichförmig ausweicht oder sich fortbewegt; endlich BG die Richtung und u die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verlässt.

Um die Untersuchung zu vereinfachen und das Ganze auf ein System zurückzuführen, in welchem die Fläche AMB ruht, kann man sich, ohne dass dadurch an dem mechanischen Zustande des vorliegenden Systemes etwas geändert wird, vorstellen, dass allen Puncten desselben nach der gemeinschaftlichen Richtung MD' die gleichförmige Geschwindigkeit v, welche nämlich jener der Fläche AMB gleich und gerade entgegengesetzt ist, mitgetheilt werde; dadurch erhält man ohne Aenderung der Sache ein System, in welchem die Fläche AMB ruht, dagegen das ein- und austretende Wasser die sogenannte relative Geschwindigkeit gegen diese Fläche annimmt.

Schneidet man daher $MC' = MC = V$, ferner $MD' = MD = v$ ab und construirt das Parallelogramm $C'D'$, so stellt die Diagonale ME die Richtung und Grösse der relativen Geschwindigkeit des eintretenden Strahles vor, welche V' heissen soll.

Ebenso ist, wenn man $BG = u$, gleich der relativen Geschwindigkeit des austretenden Wassers, und auf der durch B mit MD parallelen Geraden $BH = v$, gleich der Geschwindigkeit der Stossfläche abschneidet und das Parallelogramm GH construirt, die Diagonale BJ sofort die absolute Geschwindigkeit des austretenden Wassers, die wir mit U bezeichnen wollen.

Es gibt in der That, wenn man nach der vorigen Bemerkung an dem Puncte B die der MD gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit $BK = v$ anbringt, diese letztere mit der absoluten Geschwindigkeit $BJ = U$ die gegen die Fläche AMB relative Geschwindigkeit $BG = u$.

239. Bezeichnet man den Winkel DMC', welchen die positiven absoluten Geschwindigkeiten V und v miteinander bilden, durch α, jenen $C'ME$, welchen die positiven Geschwindigkeiten V und V' einschliessen, durch β, sowie jenen GBH, welchen die relative Geschwindigkeit u mit der absoluten v einschliesst, mit γ, so hat man zuerst aus dem Dreieck $MD'E$, ME oder

$$V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,Vv\,Cos\,\alpha)} \ldots (1)$$

und

$$Sin\,\beta = \frac{v}{V'}\,Sin\,\alpha \ldots (2);$$

ferner aus dem Dreiecke BHJ, BJ oder

$$U = \sqrt{(v^2 + u^2 + 2\,vu\,Cos\,\gamma)} \ldots (3).$$

Anmerkung. Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich leicht die, den in der Praxis am häufigsten vorkommenden speciellen Fällen entsprechenden Formeln.

Weicht nämlich die Fläche AMB in der Richtung CM des anstossenden Strahles aus, so ist $\alpha = 0$ und daher aus (1) und (2):

$$V' = V - v \text{ und } \beta = 0 \ldots (e).$$

Bewegt sich dagegen die Fläche dem anstossenden Strahle gerade entgegen, so ist $\alpha = 180^0$ und daher:

$$V' = V + v \text{ und } \beta = 0 \ldots (f).$$

Ist endlich diese Fläche AMB unbeweglich, so ist $v = 0$ und daher:

$$V' = V \text{ und } \beta = 0 \ldots (g).$$

In Beziehung auf die Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit noch nach dem Stosse besitzt, sind für die Praxis besonders zwei Fälle herauszuheben, und zwar erstens der Fall, in welchem der anstossende Wasserstrahl seine ganze relative Geschwindigkeit gegen die Stossfläche verliert, und zweitens jener Fall, in welchem das Wasser nach dem Stosse ohne Hinderniss längs dieser Fläche hingleitet und dieselbe mit einer relativen Geschwindigkeit verlässt, welche der relativen Eintrittsgeschwindigkeit gleich ist. Für den ersteren dieser beiden Fälle hat man $u = 0$ und daher aus Gleichung (3)

$$U = v,$$

und für den zweiten Fall:

$$u = V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2Vv \, Cos\, \alpha)} \text{ und } U = \sqrt{(V'^2 + v^2 + 2V'v \, Cos\, \gamma)}.$$

Stösst in diesem letzteren Falle der Wasserstrahl normal gegen die Stossfläche (wie z. B. bei einer Rotationsfläche, wenn der Strahl gegen dieselbe in der Richtung der Rotationsachse anstösst), so ist auch noch $\alpha = 0$ und daher $V' = V - v$ und $U = \sqrt{(V-v)^2 + v^2 + 2(V-v)v\,Cos\,\gamma} \ldots (h)$.

Durch das oben angewendete Verfahren wird man sich in allen Fällen die Fläche AMB als ruhend vorstellen, während der Wasserstrahl mit der absoluten Geschwindigkeit $V' = EM$ eintritt und im ersteren dieser beiden genannten Fälle die ganze Geschwindigkeit verliert, so dass $u = 0$ wird, und im zweiten Falle mit derselben Geschwindigkeit $u = V'$ wieder austritt. Ruht diese Fläche AMB nicht, so bezeichnen V' und u die relativen Ein- und Austrittsgeschwindigkeiten, und man darf für V' nur den Werth aus Gleichung (1) setzen, um die Resultate als Functionen der absoluten Geschwindigkeiten V und v zu erhalten.

240. Um nun die Stosskraft oder Pressung P zu bestimmen, die ein continuirlicher Wasserstrahl, welcher im Augenblicke als er die Fläche trifft, seine Richtung und Geschwindigkeit plötzlich ändert, ausübt, wollen wir ein Wassertheilchen M (Fig. 134) von der Masse m betrachten, welches sich nach der Richtung AM mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt und während der sehr kleinen Zeit t von seiner Richtung MN in jene MN' abgelenkt und gezwungen wird, in dieser neuen Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 weiter zu gehen. Soll aber diese plötzliche Aenderung in der Masse m durch die constante Kraft P bewirkt werden, deren Richtung mit AN den Winkel φ bildet, so bemerke man, dass wenn W. $NMN' = \delta$ ist und die nach MN' wirksame Geschwindigkeit v_2 in zwei aufeinander senkrechte Geschwindigkeiten nach MN und MO zerlegt wird, sofort die erstere $= v_2 \, Cos \, \delta$ und die letztere $= v_2 \, Sin \, \delta$ ist, folglich die Masse m während dieser Zeit t nach MN die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \, Cos \, \delta$ verliert und in der darauf perpendikulären Richtung MO jene $v_2 \, Sin \, \delta$ gewinnt; da man aber annehmen kann, dass dieser Verlust und Gewinnst mit der sehr kleinen Zeit t gleichförmig zugenommen hat, so beträgt dieser bei der constanten Einwirkung der Kraft P während der Zeiteinheit beziehungsweise $\frac{v_1 - v_2 \, Cos \, \delta}{t}$ und $\frac{v_2 \, Sin \, \delta}{t}$. Zerlegt man nun auch die Kraft P in zwei Seitenkräfte nach NM und MO, so sind diese respective $P \, Cos \, \varphi$ und $P \, Sin \, \varphi$, wovon die erstere offenbar den eben genannten Verlust und die letztere den Gewinn an Geschwindigkeit während der Zeiteinheit hervorbringen muss. Da nun diese beiden Seitenkräfte ebenfalls constante Kräfte sind, so hat man nach §. 186 die Relationen:

$$P \, Cos \, \varphi = \frac{m}{gt}(v_1 - v_2 \, Cos \, \delta) \text{ und } P \, Sin \, \varphi = \frac{m}{gt} v_2 \, Sin \, \delta \ldots (a),$$

dabei muss man für m diejenige Wassermenge substituiren, welche während der angenommenen Zeit t diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung erleidet; übrigens bezeichnet der Quotient $\frac{m}{t} = m'$ das Gewicht der in der Zeiteinheit anstossenden Wassermasse.

Anmerkung. Mit Benützung des Principes der lebendigen Kräfte oder der Wirkungsgrössen, kann man die Stosskraft P auch auf folgende Weise ableiten.

Es sei m' die in der Zeiteinheit anstossende Wassermasse, diese dem Gewichte nach ausgedrückt, so erleidet diese, weil sie vor und nach dem Stosse beziehungsweise die Geschwindigkeiten V und U besitzt, die Geschwindigkeitsänderung $V - U$, wozu (§. 227) die Arbeit $\frac{m'}{2g}(V^2 - U^2)$ erforderlich ist, welche sofort der Arbeitsgrösse Pv gleich sein muss. Es ist daher, wenn man beide Ausdrücke einander gleich setzt und mit v dividirt, sofort:

$$P = \frac{m'}{2gv}(V^2 - U^2),$$

in welchem Ausdruck man für den allgemeinsten Fall für U den Werth aus der Relat. (3) der vorigen Nummer substituiren muss.

Für den besonderen Fall des normalen Stosses, welcher durch die vorige Relat. (h) ausgedrückt ist, erhält man, wenn für U der Werth aus der genannten Gleichung gesetzt wird, wegen

$V^2 - U^2 = 2v(V-v)(1 - Cos\,\gamma)$ sofort $P = \frac{m'}{g}(V-v)(1 - Cos\,\gamma) \ldots (i)$.

Findet der Stoss gegen eine ebene Tafel statt, so werden die Wasserfäden unter einen rechten Winkel abgelenkt, also ist auch $\gamma = 90^0$ und für diesen Fall:
$$P = \frac{m'}{g}(V-v) \ldots (k).$$

241. Wendet man die vorigen beiden Formeln (a) auf den vorliegenden Fall in Fig. 133 an und setzt den Winkel, welchen die positiven Richtungen der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' und des Druckes oder Stosses P (welcher auf der absolut glatten Fläche nur normal sein kann) gleich φ, so ist
$$P\,Cos\,\varphi = \frac{m}{gt}(V' - u\,Cos\,\delta) \text{ und } P\,Sin\,\varphi = \frac{m}{gt}u\,Sin\,\delta \ldots (b).$$

242. Um endlich noch die Wassermasse m zu finden, welche in der sehr kleinen Zeit t zum Stoss gelangt, so lassen sich dabei zwei Fälle unterscheiden, nämlich erstens jener, in welchem die Stossfläche mit der Geschwindigkeit v in's Unbestimmte fortschreitet und sich von der Ausflussöffnung des Wasserstrahles immer mehr entfernt (oder umgekehrt auch nähert) und dann jener, in welchem die Fläche an derselben Stelle bleibt, oder wenn sie sich bewegt, augenblicklich, d. i. in den kleinen Zeitintervallen t, nachdem sie den Stoss empfangen hat, durch eine neue Fläche an derselben Stelle ersetzt wird (beiläufig so, wie diess mit den Schaufeln eines unterschlächtigen Rades der Fall ist). Da aber der erstere Fall fast gar keine practische Anwendung zulässt, so soll derselbe hier übergangen und sofort nur dieser letztere berücksichtigt werden.

Bezeichnet man nun den normalen Querschnitt des Wasserstrahles mit a und das Gewicht eines Kubikfuss Wassers mit γ, so ist offenbar in diesem letzteren Falle die dem Gewichte nach ausgedrückte Wassermasse $m = \gamma a V t$; mit diesem Werthe von m erhalten die beiden letzten Formeln (b) die Form:
$$P\,Cos\,\varphi = \frac{\gamma}{g}aV(V' - u\,Cos\,\delta),\quad P\,Sin\,\varphi = \frac{\gamma}{g}aVu\,Sin\,\delta \ldots (4).$$

Anmerkung. Nimmt man, um in Kürze auf den erwähnten ersten Fall, in welchem die Stossfläche in's Unbestimmte ausweicht, zurückzukommen, diese Fläche als eine Ebene DE (Fig. 135) an, welche sich in der Richtung

MN mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, während der Wasserstrahl in der Richtung AM mit der Geschwindigkeit V ankömmt, setzt, wie oben, den W. $NMM' = \alpha$ dagegen jenen $AMD = \varepsilon$, nimmt ferner $MN = v$ und zieht durch N mit DE die Parallele $D'E'$, so stellt $D'E'$ die Lage der Stossfläche am Ende der Zeiteinheit, d. i. einer Secunde vor, wenn DE diese Lage im Anfange dieser Secunde bezeichnet. Da nun $MM' = \frac{Sin(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v$ ist, so ist in dem obigen Ausdrucke von $m = \gamma a V t$ statt der absoluten Geschwindigkeit V die relative $V - MM'$ zu setzen, wodurch man für die in diesem Falle während der Zeit t zum Stosse gelangende Wassermasse den Ausdruck

$$m = \gamma a \left[V - \frac{Sin\,(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v \right] t \text{ erhält.}$$

Bewegt sich die Fläche mit dem Strahle in derselben Richtung, so ist $\alpha = 0$ und daher $m = \gamma a (V - v) t$.

Bewegt sich diese Fläche dem Strahle direct entgegen, so ist $\alpha = 180^0$ und $m = \gamma a (V + v) t$.

Wäre die Fläche unbeweglich, also $v = 0$, so wäre $m = \gamma a V t$.

Stoss eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe durch den Stoss seine ganze relative Geschwindigkeit verliert.

243. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen (in Nr. **238** und Nr. **239**) und mit Beziehung auf Fig. 133 folgt aus den Gleichungen (4) der vorigen Nummer, da die relative Austrittsgeschwindigkeit $u = 0$ ist, sofort:

$$P\,Cos\,\varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' \quad \text{und} \quad P\,Sin\,\varphi = 0,$$

folglich ist $\varphi = 0$ und

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \ldots (5).$$

Die Fläche AMB erleidet also in der Richtung FM einen Stoss oder vielmehr continuirlichen Druck P, welcher durch diese letzte Gleichung bestimmt wird; setzt man in diese für V' den Werth aus (1) in Nr. **239**, so wird dieser Druck als Function der absoluten Geschwindigkeiten V und v des Strahles und der Fläche ausgedrückt. Die Richtung FM dieses Druckes ist durch die Gleichung (2) gegeben.

244. Dieser eben betrachtete Fall findet Anwendung bei dem Stosse eines Strahles auf die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades. Bewegen sich dabei die Schaufeln in der Richtung des einfallenden Strahles, so ist (Nr. **239**, Relat. e) $V' = V - v$ und daher der Stoss nach der vorigen Formel (5):

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V - v) \ldots (6).$$

(Vergleiche (k) in Nr. **240**, wo $m' = \gamma a V$ ist.)

Ruht die Fläche, so ist $v = 0$ und $V' = V$, folglich

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2 \gamma a h,$$

wobei $h = \frac{V^2}{2g}$ die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe zu V bezeichnet. (Vergl. §. 380.)

Stoss eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit auch wieder austritt.

245. Tritt der Strahl CM (Fig. 136) mit der Geschwindigkeit V gegen die Fläche AMB, welche in dieser Richtung mit Randleisten versehen ist, also gleichsam wie in eine Rinne ein, so wird sich der Strahl nur nach dieser einen Richtung MB herumbiegen, längs der als absolut glatt gedachten Fläche MB hingleiten und mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' bei B nach der Richtung BG austreten, so dass also $u = V'$ wird.

Setzt man, wie in Nr. **240**, den Winkel der positiven Geschwindigkeiten u und $V' = \delta$, so wie jenen der positiven Geschwindigkeit V' mit der Richtung des Druckes P gleich φ, so hat man nach den Relationen (4) in Nr. **242** (wegen $u = V'$):

$$P \, Cos \, \varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' (1 - Cos \, \delta) \text{ und } P \, Sin \, \varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' Sin \, \delta \ldots (f)$$

woraus sofort, wenn man beide Gleichungen quadrirt und summirt:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \sqrt{[2(1 - Cos \, \delta)]} \ldots (7)$$

und (durch Division dieser beiden Gleichungen)

$$tang \, \varphi = \frac{Sin \, \delta}{1 - Cos \, \delta} = Cot \tfrac{1}{2} \delta = tang \tfrac{1}{2} (180 - \delta),$$

also

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2} \delta \ldots (8)$$

folgt.

Diese letzte Gleichung zeigt, dass der Winkel GMF, welchen die positive Geschwindigkeit u mit der Richtung der negativen Geschwindigkeit V' einschliesst, durch die Richtung MP des Druckes P halbirt wird.

246. Dieser letztere Fall findet unter Anderm Anwendung auf den Stoss des Wassers gegen die krummen Schaufeln eines horizontalen Wasserrades oder einer Turbine. Bewegen sich diese dabei in der Richtung CM des eintretenden Strahles, so hat man (Nr. **239**) $V' = V - v$, oder, wenn sich die Schaufeln dem Strahle direct entgegen bewegen, $V' = V + v$. Es ergibt sich also für beide Fälle der Druck oder Stoss gegen die Schaufeln nach der vorigen Formel (7):

$$P = \frac{\gamma a}{g}(V \mp v)\sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]} \ldots (9).$$

Für eine ruhende Fläche wäre $v = 0$, also

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]}.$$

247. Zerlegt man in jenen Fällen, in welchen die Stossfläche in der Richtung des eintretenden Strahles ausweicht oder sich dem Strahle direct entgegen bewegt, wobei also $V' = V \mp v$ ist und wegen $\beta = 0$ (Nr. **239**, Relat. *e*) die Richtungen FE und CC' zusammenfallen, den in der Richtung MP entstehenden Druck oder Stoss in zwei Seitenstösse, P_1 und P_2, wovon der erstere parallel mit dem eintretenden Strahl CM und der letztere darauf perpendikulär ist; so hat man wegen W. $EMP =$ W. $C'MP = \varphi$ (Fig. 136) sofort:

$$P_1 = P\,Cos\,\varphi \text{ und } P_2 = P\,Sin\,\varphi,$$

oder wenn man für $P\,Cos\,\varphi$ und $P\,Sin\,\varphi$ die Werthe aus (f) (Nr. **245**) und zugleich $V' = V \mp v$ setzt, auch:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \\ P_2 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\,Sin\,\delta \end{aligned}\right\} (10).$$

Man nennt hier P_1 den Parallelstoss und P_2 den Seitenstoss des Wasserstrahles.

Gerader Stoss eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche.

248. Es sei BMB' (Fig. 137) eine durch Umdrehung der Curve MB um die Achse MC erzeugte Fläche und V die absolute Geschwindigkeit des in der Richtung AMC eintretenden Wasserstrahles, zugleich bewege sich die Rotationsfläche in derselben

Richtung der Achse oder auch in direct entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit v, so, dass in diesen beiden Fällen die relative Geschwindigkeit des Strahles respective $V - v$ und $V + v$ ist. Setzt man ferner den Winkel der am Endpuncte B an die Erzeugungscurve gezogenen Tangente BT mit der Achse MC gleich δ und nimmt an, dass die Fläche vollkommen glatt sei, folglich keine Reibung beim Hingleiten des Wassers Statt finde; so trifft der Strahl die Oberfläche mit der relativen Geschwindigkeit $V \mp v$, breitet sich hierauf über dieselbe nach allen Seiten um die Achse gleichförmig aus und verlässt diese bei BB' in Richtungen, welche sämmtlich gegen die Achse MC die Neigung δ haben, mit derselben relativen Geschwindigkeit $u = V \mp v$.

Denkt man sich den Wasserstrahl in einzelne Wasserfäden aufgelöst, wovon jeder den Querschnitt a' haben soll, und nimmt an, dass sich diese gleichförmig um die Fläche nach den Richtungen MB und MB', d. i. nach den Durchschnittslinien legen, welche aus einer durch die Achse MC gelegten Ebene mit der Fläche entstehen, wenn sich diese Ebene um die Achse allmählich umdreht oder Positionen annimmt, für welche die aufeinander folgenden Neigungswinkel unendlich klein sind.

Bezeichnet man nun den Parallelstoss eines jeden solchen elementaren Strahles oder Wasserfadens durch p_1 und dessen Seitenstoss durch p_2; so folgt nach den vorigen Relationen (10):

$$p_1 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \text{ und } p_2 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v)\, Sin\,\delta.$$

Da sich aber von den Seitenstössen p_2 je zwei, welche in ein und derselben von den um die Achse gedachten Ebenen liegen, da sie gleich und entgegengesetzt sind, aufheben, so bildet die Summe aus allen Parallelstössen p_1 die Resultirende, d. i. den Parallelstoss P_1 des ganzen Wasserstrahles, und es ist daher, wenn n solcher Wasserfäden vorhanden sind, wegen $np_1 = P_1$ und $na' = a$ sofort:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta), \quad (11)$$

während der Seitenstoss $P_2 = 0$ ist. (Vergl. Nr. **240**, Relat. (i)).

249. Ist die Stossfläche eine Ebene BB' (Fig. 138), gegen welche der Strahl AM perpendikulär anstösst und nach allen Seiten um einen rechten Winkel abgelenkt wird; so ist wegen $\delta = 90^0$ aus der vorigen Relation:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v), \quad (12)$$

und wenn die Tafel oder Fläche unbeweglich ist, $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2\gamma a h$. (Vergl. Nr. **244**.)

250. Ist endlich die obige Rotationsfläche gegen den Strahl zu concav und wird dieser bei seinem Austritte bei BB' parallel zur Achse, aber nach entgegengesetzter Richtung des einfallenden Strahles abgelenkt; so folgt wegen $\delta = 180^0$ aus der vorigen Relation (11):

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v), \quad (13)$$

und wenn die Fläche BMB' unbeweglich ist,

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V^2 = 4\gamma a \frac{V^2}{2g} = 4\gamma a h$$

also doppelt so gross als bei der Ebene.

Anmerkung 1. Aus diesem Grunde wird auch der Stoss gegen eine Ebene, deren Umfang, wie in Fig. 140, mit Leisten besetzt ist, grösser als wenn diese Ränder fehlen. Weisbach erwähnt eines Versuches, bei welchem der Strahl 1 Zoll Dicke und die cylinderische Einfassung der Stossebene 3 Zoll Durchmesser und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte; der Strahl trat beinahe gänzlich in der umgekehrten Richtung aus und gab eine Stosskraft von $3{\cdot}93\,\gamma a \frac{V^2}{2g}$. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass wegen der Reibung des Wassers an der Fläche der obige theoretische Maximalwerth von $4\gamma a \frac{V^2}{2g}$ niemals vollständig erreicht werden kann.

Anmerkung 2. Weicht die Fläche BMB' (Fig. 137) in der Richtung der Achse MC dem gerade anstossenden Strahle mit der Geschwindigkeit v aus, so ist die Arbeits- oder Wirkungsgrösse dieses Stosses (Relat. 11)

$$W = P_1 v = \frac{\gamma a}{g} Vv(V - v)(1 - Cos\,\delta),$$

folglich für ein Maximum:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{\gamma a}{g} V(1 - Cos\,\delta)(V - 2v) = 0$$

und daraus $v = \frac{1}{2}V$. (Vergleiche §. 386.)

Der mit diesem Werthe von v entstehende Maximalwerth der Wirkungsgrösse des Stosses ist daher, wenn man das Gewicht der per Secunde zum Stoss gelangenden Wassermenge $\gamma a V = M$ setzt:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g}(1 - Cos\,\delta).$$

Dieser Werth geht für eine ebene Stossfläche (Nr. **249**) wegen $\delta = 90^0$ über in:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} M h,$$

dagegen für die concave Fläche in Nr. **250** (Fig. 139), wegen $\delta = 180°$ in

$$W = M\frac{V^2}{2g} = Mh$$

über, so, dass dieser Werth genau mit der theoretischen Wirkungsgrösse, oder, wie man sich ausdrückt, dynamischen Kraft übereinstimmt, welche in der von der Höhe h herabsinkenden Wassermasse M enthalten ist.

251. Zur Bestimmung des schiefen Stosses gegen eine ebene Fläche muss man unterscheiden, ob das Wasser nach dem Stoss nur nach einer, oder nach zwei direct entgegengesetzten, oder endlich nach allen Richtungen abfliessen kann.

Im erstern Falle gilt, wenn der isolirte Strahl, oder (§. 385) das begrenzte Wasser gegen die Ebene BB' (Fig. 141) unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit V anstösst und diese in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v ausweicht, die obige Formel (11) in Nr. **248**, oder es ist wegen $\delta = \alpha$:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V - v)(1 - Cos\,\alpha). \quad (14)$$

252. Trifft im zweiten Falle der Strahl AM (Fig. 142) die ebene Fläche BB' unter dem Winkel $AMB' = \alpha$ und ist diese Fläche nach der Richtung BB' mit Randleisten versehen, so theilt sich der Strahl in zwei Theile MB und MB', welche nach gerade entgegengesetzten Richtungen abfliessen.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Querschnitte a' und a'' dieser beiden Theile ungleich sein werden; auch wird der Stoss oder hydraulische Druck P', welchen der Theil AMB gegen die Fläche BB' ausübt, in einer auf derselben normalen Ebene liegen; dasselbe gilt von dem Drucke P'' des Theiles AMB', folglich wird auch die Resultirende aus P' und P'', d. i. der Gesammtdruck P in dieser normalen Ebene ABB' liegen und zugleich, da die Fläche BB' als absolut glatt gedacht wird, auf dieser Fläche normal sein müssen. Sind daher N', R' die Seitenkräfte von P', und N'', R'' jene von P'', und zwar respective normal und parallel zur Ebene BB'; so müssen, wenn die Resultante P aus P' und P'' auf der Ebene BB' normal sein soll, sofort die beiden Seitenkräfte R' und R'' einander gleich und direct entgegengesetzt, und dann $P = N' + N''$ sein.

Nun war aber (Nr. **247**) als man den Druck $Mc = P$ (Fig. 143 und Fig. 136) in zwei Seitenkräfte $Ma = P_1$ und $Mb = P_2$ darauf perpendikulär zerlegte (Relat. 10) $Ma = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta)$ und $Mb = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\delta$, folglich ist auch, wenn man denselben Druck $P = Mc$ in zwei Seitenkräfte Ma' und Mb' parallel und normal zur Ebene BB' zerlegt, wegen W. $BMc =$ W. aMc (Relat. 8) sofort $Ma' = Ma$ und $Mb' = Mb$.

Geht man also auf die beiden Theildrücke P' und P'' über, so hat man nach demselben Verfahren für den Theil AMB (Fig. 142) des Strahles, wofür $\delta = \alpha$ ist, sofort $R' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\alpha)$ und $N' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha$; ferner für den Theil AMB', wofür $\delta = 180^\circ - \alpha$ ist: $R'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)(1 + Cos\,\alpha)$ und $N'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha$.

Setzt man daher der vorigen Bemerkung gemäss $R' = R''$ und $P = N' + N''$, so erhält man aus der erstern dieser beiden Gleichungen, wenn man für R' und R'' die eben gefundenen Werthe substituirt und noch berücksichtiget, dass $a' + a'' = a$ ist, sofort $a' = \frac{1}{2} a (1 + Cos\,\alpha)$ und $a'' = \frac{1}{2} a (1 - Cos\,\alpha)$.

Die zweite der genannten Gleichungen gibt jetzt mit diesen Werthen, welche man in N' und N'' zu substituiren hat:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha. \quad (15).$$

Um endlich noch aus diesem Normalstoss P gegen die Ebene BB' den Parallelstoss P_1 in der Richtung AM und den darauf perpendikulären Seitenstoss P_2 (Nr. **247**) zu bestimmen, hat man durch Zerlegung der Kraft P in diese zwei Seitenkräfte P_1 und P_2, wegen W. $PMP_2 = \alpha$ sofort:

$$P_1 = P\, Sin\,\alpha \text{ und } P_2 = P\, Cos\,\alpha,$$

oder wenn man für P seinen Werth setzt,

$$\left.\begin{aligned} &\text{für den Parallelstoss: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin^2\,\alpha \\ &\text{und für den Seitenstoss: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha \end{aligned}\right\} (16)$$

253. Was endlich den dritten Fall anbelangt, in welchem der Strahl nach dem Stoss nach allen Seiten hin über die ebene Fläche abfliessen kann, so begnügt man sich hier, da eine mathematisch scharfe Theorie ohnehin nicht möglich ist, indem man dabei von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen kann, mit blossen Näherungswerthen.

Scheffler findet, indem er annimmt, dass sich der Strahl auf der ebenen Fläche in vier Theile theilt, welche sich rechtwinkelig schneiden und indem er auf ähnliche Weise, wie dies in der vorigen Nr. geschehen, die Querschnitte der vier abgelenkten Theile bestimmt, für den Normalstoss:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin\, \alpha, \quad (17)$$

und daraus wieder durch Zerlegung in zwei Seitenstösse, für

$$\left.\begin{array}{ll} \text{den Parallelstoss:} & P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin^2 \alpha \\ \text{und den Seitenstoss:} & P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha \end{array}\right\} (18)$$

also dieselben Werthe, wie im vorigen Falle.

Anmerkung. Weisbach findet unter der Annahme einer allerdings willkürlichen Voraussetzung $P = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin\, \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$.

Duchemin dagegen setzt $P = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin^2 \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$ (gleich dem Parallelstoss nach Weisbach).

Navier erhält, obschon die Voraussetzung, dass alle abgelenkten Wasserfäden eine gleiche Stärke besitzen, nicht richtig ist, für den Normalstoss P den obigen Werth (17), dagegen für den Parallelstoss den unrichtigen Werth $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)$.

Schliesslich ist zu bemerken, dass die obigen theoretischen Resultate und Formeln über den Stoss isolirter Strahlen mit der Erfahrung nur dann übereinstimmen, wenn die Ausdehnung der Stossfläche wenigstens so gross ist, dass die Wasserfäden in parallelen Richtungen zu den letzten Elementen der gestossenen Fläche austreten können, ohne jedoch im Gegentheile wieder so gross zu sein, dass das Gewicht und die Adhäsion der auf der Fläche befindlichen Flüssigkeit einen hemmenden Einfluss äussern kann.

Nach den gemachten Erfahrungen muss, namentlich bei dem geraden Stoss, der Durchmesser der Stossfläche wenigstens 4 Mal so gross als jener des anstossenden Strahles sein. Nach den Versuchen von Langsdorf vermindert sich, wenn die Fläche nur eben so gross als der Querschnitt des Strahles ist, der Stoss gegen diese Fläche beiläufig um die Hälfte des durch die obige Formel (12) angegebenen Werthes.

Von den Wasserrädern.

(§. 387.)

254. Obschon wir dem Verdienste jener Autoren, welche, wie namentlich Herr Professor Fr. Redtenbacher, bemüht waren, eine vollständige Theorie der Wasserräder zu entwickeln, volle Gerechtigkeit widerfahren lassen; so ziehen wir es dennoch vor, nach dem Vorgange der französischen Schule, bei dieser Entwicklung nur jene Widerstände in Rechnung zu bringen, welche sich mit einiger Verlässlichkeit bestimmen lassen und alle übrigen, welche entweder an und für sich unbedeutend oder deren Bestimmung nur annäherungsweise möglich ist und für den praktischen Gebrauch zu äusserst unbequemen, complicirten Formeln führen, auszulassen und summarisch durch einen so weit wie möglich richtig ermittelten Erfahrungscoefficienten, welcher selbst auch im erstern Falle nicht ganz entbehrt werden kann, zu ersetzen.

Von diesem Gesichtspuncte ausgehend sei allgemein für was immer für ein Wasserrad oder einen sonstigen hydraulischen Motor, Q das per Secunde zufliessende Wasser in Kubikfuss, $M = 56{\cdot}5\,Q$ die Masse desselben in Pfunden ausgedrückt, H die Gefällshöhe, d. i. der Verticalabstand des Wasserspiegels im Zufluss-, über dem Wasserspiegel im Abflusscanal (oder des Ober- vom Unterwasserspiegel), V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt oder den Umfang desselben erreicht, w die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Rade austritt und v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, alle diese Masse in Fussen ausgedrückt, ferner P der auf den Umfang des Rades reducirte Nutzwiderstand, welchen das Rad wirklich überwindet, $E_a = MH = 56{\cdot}5\,QH$ der absolute Effect des verwendeten Wassers oder (wie man sich auch ausdrückt) dessen dynamische Kraft, $E_n = Pv$ der Nutzeffect des Rades, diese beiden Grössen in Fusspfund ausgedrückt, so wie endlich $N_a = \frac{E_a}{430}$ und $N_n = \frac{E_n}{430}$ der absolute Effect und der Nutzeffect in Pferdekräften ausgedrückt.

Theilt man die Gefällshöhe H in zwei Theile und setzt $H = h_1 + h'$, wobei h_1 die verticale Höhe vom Oberwasserspiegel bis zu dem Eintrittspunct des Wassers in das Rad, und h' die Höhe dieses Punctes über dem Unterwasserspiegel bezeichnet, setzt ferner die Geschwindigkeitshöhe $\frac{V^2}{2g} = h$; so ist fürs erste (§. 389) immer $h < h_1$, so, dass das eigentlich disponible oder wirksame Gefälle $h + h' < h_1 + h'$, d. i. immer $< H$ ist, und zwar hängt dieser, schon von vorne herein Statt findende Verlust an lebendiger Kraft oder Wirkungsgrösse von der Anordnung der

Schütze und Zuführung des Wassers in das Rad ab. Die Berücksichtigung aller in den frühern Nrn. oder §§. gemachten, hierauf bezüglichen Bemerkungen, geben die Mittel an die Hand, diesen Verlust so weit als möglich zu vermindern.

Da beim Eintritte des Wassers in das Rad durch den Stoss, oder überhaupt dadurch, dass V von v, sei es der Grösse oder Richtung nach, verschieden ist, ein Verlust an lebendiger Kraft, also auch (§. 243) an Wirkungsgrösse entsteht; so werde dieser letztere allgemein durch $\frac{Mu^2}{2g}$ ausgedrückt, wobei u eine gewisse Function von V, v und dem Winkel, welchen die Richtungen dieser beiden Geschwindigkeiten miteinander bilden, so wie von der Anordnung der Schaufeln oder Zellen sein wird.

Da ferner das austretende Wasser noch die absolute Geschwindigkeit w, welche von der Richtung und Geschwindigkeit des Wassers und des letzten Schaufelelementes abhängt, also die Wirkungsgrösse $\frac{Mw^2}{2g}$ besitzt, so muss auch dieser Theil von der disponiblen Arbeits- oder Wirkungsgrösse des Wassers abgezogen werden, und da diese letztere $= M(h + h')$ ist, so hat man offenbar für den theoretischen Nutzeffect des Wasserrades oder hydraulischen Motors Pv oder

$$E_n = M(h + h') - \frac{M}{2g}(u^2 + w^2) \ldots (1)$$

so wie für den wirklichen Nutzeffect e_n den Werth $e_n = k' E_n$, oder für die Praxis bequemer:

$$e_n = k E_a = k M H \ldots (2)$$

wobei k der betreffende Erfahrungscoefficient und dabei immer kleiner als die Einheit ist.

Anmerkung. Zu den in der Formel (1) nicht berücksichtigten, oben erwähnten Widerständen oder Effectverlusten gehören besonders 1) die Zapfenreibung, 2) die Wasserreibung oder Adhäsion desselben und 3) der Luftwiderstand. Mit Ausnahme jedoch des erstern Widerstandes, welcher sich übrigens immer leicht nach §. 287 bestimmen lässt und dem Effectverlust, welcher durch die eintretenden, von dem besondern Baue und der Anordnung jeder einzelnen Radgattung abhängigen Wasserverluste entsteht, sind alle übrigen Widerstände in der Regel sehr unbedeutend und werden am besten und einfachsten durch den Erfahrungscoefficienten k vertreten oder mit in Rechnung gebracht.

Was namentlich den durch die Zapfenreibung herbeigeführten Effectverlust anbelangt, so ist dieser $= \frac{\pi}{60} n d f G = \frac{1}{19} n d f G^{F.Pf}$, wenn G das gesammte Gewicht des Rades in Pfunden, d den Durchmesser des Zapfens in Fussen, n die Anzahl der Umdrehungen per Minute und f den betreffenden Reibungscoefficienten bezeichnet.

Da aber Redtenbacher aus vielen Berechnungen über die Gewichte der verticalen Wasserräder gefunden hat, dass dasselbe für jede Pferdekraft Nutzeffect von 400 bis 500 Kilogramm beträgt; so kann man in runder Zahl $G = 800 N$ Pfund, ferner den Zapfendurchmesser diesem Gewichte proportional und zwar $d = \cdot 095 \sqrt{N}$ Fuss setzen. Werden diese Werthe für d und G in dem vorigen Ausdrucke substituirt, so erhält man bei allen verticalen Wasserrädern für den Effectverlust durch die Zapfenreibung den Näherungswerth:

$$4 n f N \sqrt{N} \ldots (\alpha).$$

255. Die vorige Gleichung (1) zeigt, dass das absolute Maximum des Nutzeffectes, nämlich der Werth

$$E_n = M(h + h') \ldots (3)$$

nur erreicht wird, wenn $u^2 + w^2 = 0$, d. h. wenn sowohl $u = 0$ als auch $w = 0$ ist, wenn nämlich das Wasser ohne Stoss in das Rad gelangt und ohne alle Geschwindigkeit aus demselben austritt (§. 390). Zugleich wird dabei angenommen, dass das Wasser so tief als möglich, nämlich im Unterwasserspiegel austrete.

Da sich übrigens diese beiden Bedingungen nur sehr selten realisiren lassen, ja sogar oft mit einander im Widerspruche stehen, so muss man in diesen Fällen wenigstens das relative Maximum, welches auf die bekannte Weise (indem man den betreffenden Differenzialquotienten $= 0$ setzt) gefunden wird, zu erreichen trachten.

Anmerkung. Es ist übrigens leicht zu erkennen, welche Vorzüge die Wasserräder durch ihre gleichförmige rotirende Bewegung gegen oscillirende Motoren (wie z. B. der hydraulischen Schaukel) haben, bei welchen, da v und w niemals constant werden, immer ein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, welcher nur dadurch vermindert oder fast auf Null gebracht werden kann, dass man V und v sehr klein macht.

256. Untersucht man die obige Bedingung von $u = 0$ genauer und nimmt an, die Schaufel AMB (Fig. 144) werde in der Richtung CM von dem Wasserstrahle mit der Geschwindigkeit V getroffen und sie selbst weiche in der Richtung MN mit der Geschwindigkeit v aus; setzt, wenn ST eine Tangente im Puncte M bildet, W. $CMT = \alpha$, W. $TMN = \beta$ und zerlegt jede der beiden Geschwindigkeiten V und v in zwei V', V'' und v', v'', wovon V''

und v'' in die Richtung ST der Tangente oder der Schaufelfläche fallen und die beiden andern V' und v' auf derselben perpendikulär stehen; so hat man $V' = V\,Sin\,\alpha$, $v' = v\,Sin\,\beta$, $V'' = V\,Cos\,\alpha$ und $v'' = v\,Cos\,\beta$.

Ist nun $V\,Sin\,\alpha > v\,Sin\,\beta$, so entsteht beim Eintritt des Wassers in die Schaufel ein Stoss und für die während der Zeit dt zum Stoss gelangende Wassermasse dM ein Verlust an Wirkungsgrösse (§. 378) von $\frac{dM}{2g}(V\,Sin\,\alpha - v\,Sin\,\beta)^2$, welcher Verlust bei der continuirlichen Wiederholung gegen die nämliche oder eine ähnliche Schaufel in der Zeiteinheit (wenn nämlich M die in dieser Zeit anstossende Wassermasse bezeichnet), d. i. während einer Secunde den Werth $\int \frac{dM}{2g}(V\,Sin\,\alpha - v\,Sin\,\beta)^2 = \frac{M}{2g}(V\,Sin\,\alpha - v\,Sin\,\beta)^2$ erhält.

Die erwähnte Bedingung von $u = 0$ wird also erfüllt und daher der Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritt in das Rad vermieden, wenn $V\,Sin\,\alpha = v\,Sin\,\beta$ ist. Dies findet aber Statt:

1) wenn man über $Ma = V$ und $Mb = Mc = v$ das Viereck $Macb$ construirt und es sich zeigt, dass ac mit ST parallel läuft, weil dann $V\,Sin\,\alpha = Ma\,Sin\,\alpha = am$, $v\,Sin\,\beta = Mb\,Sin\,\beta = bn$ und $am = bn$ ist (oder da dann W. $Mcb = \alpha$ ist, sofort $bn = Mb\,Sin\,\beta$ und zugleich auch $bn = bc\,Sin\,\alpha$ also $v\,Sin\,\beta = V\,Sin\,\alpha$);

2) wenn $V = v$ und gleichzeitig $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 180^0 - \beta$ ist, und

3) wenn $\alpha = 0$ oder 180^0 und $\beta = 0$ und 180^0 ist, nämlich das Wasser in der Richtung der Schaufel eintritt und die Geschwindigkeit der letztern mit jener des Wassers in eine gerade Linie fällt.

Anmerkung. Im Falle sich die Schaufeln dem eintretenden Wasserstrahle entgegen bewegen, müsste man entweder v oder β mit dem entgegengesetzten Zeichen einführen und dann wäre der obige Verlust an Wirkungsgrösse in der Zeiteinheit $= \frac{M}{2g}(V\,Sin\,\alpha + v\,Sin\,\beta)^2$.

257. Die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser nach dem Stosse über die Fläche der Schaufel fliesst, ist $V'' - v''$, oder wenn man für V'' und v'' die Werthe aus der vorigen Nr. setzt, wird diese relative Geschwindigkeit, je nach dem Sinne von v:

$$V\,Cos\,\alpha \mp v\,Cos\,\beta.$$

Tritt der vorhin erwähnte günstige Fall von $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ (welcher nur bei krummen Schaufeln möglich ist) ein und sind

V und v im gleichen Sinne gerichtet; so ist $Cos\,\alpha = Cos\,\beta = 1$ und daher die genannte relative Geschwindigkeit $= V - v$. (Vergleiche auch Nr. **239**, Anmerk.)

258. Tritt der Strahl in ein Gefäss oder eine Zelle (Kübel) wie in Fig. 145 ein, so verliert er durch die Reibung, entstehenden Wirbeln und wiederholte Stösse (die man jetzt nicht mehr wie vorhin nach normaler Richtung auf die Schaufel ab zu untersuchen braucht) seine ganze relative Geschwindigkeit u. Diese ist, wenn wieder V und v die Geschwindigkeiten des eintretenden Wasserstrahls und der ausweichenden Zelle bezeichnen und ihre positiven Richtungen den Winkel φ einschliessen (Nr. **239**, Gleich. 1): $u = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,Vv\,Cos\,\varphi)}$,
folglich ist der in der Zeiteinheit oder einer Secunde Statt findende Verlust an Wirkungsgrösse:

$$\frac{Mu^2}{2g} = \frac{M}{2g}(V^2 + v^2 - 2\,Vv\,Cos\,\varphi)\ldots\ (m)$$

eine Grösse, welche im Allgemeinen nur verschwinden oder Null werden kann, wenn zugleich $\varphi = 0$ und $V = v$ ist, d. h. wenn die beiden Geschwindigkeiten V und v sowohl ihrer Richtung als Grösse nach einander gleich sind.

259. Untersucht man nun auch die zweite der obigen, dem absoluten Maximum entsprechenden Bedingungsgleichungen, nämlich jene $w = 0$, so fliesst das Wasser nach der Bemerkung in Nr. **257** nach dem Stoss mit der relativen Anfangsgeschwindigkeit $V\,Cos\,\alpha \mp v\,Cos\,\beta$ über die Schaufelfläche, tritt jedoch im Allgemeinen durch die Einwirkung von beschleunigenden oder verzögernden Kräften von der Schaufel nach der Verlängerung BG (Fig. 133) des letzten Elementes mit einer davon verschiedenen relativen Geschwindigkeit $BG = u'$ aus, wofür, wenn v' die Geschwindigkeit des letzten Elementes der Schaufelfläche und γ der Winkel zwischen u' und v' ist, für die absolute Geschwindigkeit BJ oder Nr. **239**, Gleich. 3):

$$w = \sqrt{(v'^2 + u'^2 + 2v'u'\,Cos\,\gamma)}$$

Statt findet.

Diese Grösse kann aber im Allgemeinen nur Null werden, wenn man gleichzeitig $v' = u'$ und $\gamma = 180^0$ hat, d. h. wenn das Wasser mit einer Geschwinigkeit und nach einer Richtung die

Schaufel verlässt, welche jener des letzten Elementes derselben gleich und direct entgegengesetzt ist. Da diese Bedingung jedoch in der Wirklichkeit fast niemals vollständig zu erreichen ist, indem erstlich wegen der Schwierigkeit beim Austreten des Wassers der Supplementswinkel $180^0 - \gamma$ niemals (wie es eben verlangt wurde) $= 0$, sondern öfter sogar bis 30^0 genommen werden muss und zweitens auch nicht immer v' genau gleich u' sein kann, indem v' von v abhängt und v gegen V, wenn die erste der genannten Bedingungen, d. i. $u = 0$ erfüllt werden soll (Nr. **256**), in einer bestimmten Relation stehen müssen, so folgt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, den genannten beiden Bedingungsgleichungen $u = 0$ und $w = 0$ vollständig zu entsprechen und den absolut grössten Nutzeffect (3) in Nr. **255** zu erreichen, und dass man daher darauf angewiesen ist, für jedes einzelne Wasserrad das relative Maximum des Nutzeffectes (Nr. **255**) oder das Minimum von $\frac{M}{2g}(u^2 + w^2)$ zu bestimmen.

260. Für das unterschlächtige Wasserrad (§. 392) folgt nun mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, wenn sich dabei P und v auf den mittlern Umfang des Rades (in welchem nämlich die Stossmittelpuncte der Schaufeln liegen) beziehen, wegen $u = V - v$, $w = v$, $h' = 0$ und $h = \frac{V^2}{2g}$ für den theoretischen Nutzeffect aus der allgemeinen Formel (1) in Nr. **254**:

$$E_n = \frac{MV^2}{2g} - \frac{M}{2g}(V - v)^2 - \frac{Mv^2}{2g}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$E_n = \frac{Mv}{g}(V - v) \ldots (4)$$

(§. 398 und Nr. **244**, wo $\gamma a V = M$ ist.)

Dabei tritt (da hier das absolute Maximum unmöglich) das relative Maximum, wie bereits in Nr. **250**, Anmerk. 2 gezeigt ist, bei der Geschwindigkeit von $v = \frac{1}{2} V$ ein und es ist dafür:

$$(E_n)_{max.} = \frac{1}{4}\frac{MV^2}{g} = \frac{1}{2} Mh.$$

Was endlich den zur Bestimmung des wirklichen Nutzeffectes betreffenden Erfahrungscoefficienten k' oder k (in Nr. **254**) betrifft, so ist im Durchschnitt $k = \frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{5}$, also für diesen letztern Werth:

$$e_n = {\cdot}3\,Mh = 16\,Qh \ldots (5)$$

(wegen $M = 56{\cdot}5\,Q$), wobei $h = H - {\cdot}6$ Fuss gesetzt werden kann.

Anmerkung 1. Für Fälle, in welchen der Spielraum zwischen den Schaufeln sn (Fig. 146) und dem Gerinne ad unverhältnissmässig gross ist, kann man die vorige Formel (5) der Wirklichkeit dadurch etwas nähern, dass man statt der Fläche $abcd = A$ jene $mnop = A'$ in die Rechnung bringt.

Es lässt sich nämlich der mittelbare Wasserstand ac unterm Rade im Beharrungsstande entweder durch directe Messung oder dadurch finden, dass man $Q = AV = ab \,.\, ac \,.\, V$ setzt, woraus diese Höhe $ac = \frac{Q}{ab\,.\,V}$ folgt. Dadurch ist aber mo, folglich auch die Fläche $A' = mn \,.\, mo$ bekannt, welche man statt A in dem vorigen Ausdrucke $e_n = 16\,AVh$ setzen wird, obschon auch selbst dadurch noch der Effect zu gross gefunden wird, indem das Wasser auf die durch das Gerinne gehörig begrenzte Schaufel, wie diese Formel (5) voraussetzt, eine grössere Wirkung als im vorliegenden Falle ausübt, wo das Wasser nach allen Seiten mehr oder weniger ausweichen kann.

Anmerkung 2. Redtenbacher berechnet zuerst (S. dessen Theorie und Bau der Wasserräder S. 44) das zwischen den Schaufeln durchgehende Wasser, welches keine Geschwindigkeitsänderung erleidet, also auch keine Wirkung ausübt, und findet, dass dieses für gewöhnlich ausgeführte unterschlächtige Räder (von 12 Fuss Durchmesser, 19 Zoll Schaufeltheilung, $v = \frac{1}{2}V$ und Dicke der zufliessenden oder anstossenden Wasserschichte $= 4$ bis 5 Zoll) 18 bis (wenn nämlich das Rad schneller geht und $v = \frac{3}{5}V$ ist) 27 Procent des zufliessenden Wassers beträgt, und dass dieser Verlust nur dadurch vermieden werden kann, dass man dem Gerinne am tiefsten Puncte des Rades auf die Länge von zwei Schaufeln (die eine vor und die andere nach dem tiefsten Puncte) eine mit dem Radumfange concentrische Krümmung gibt und das Rad in diese einsenkt.

Was den Wasserverlust betrifft, welcher durch das Entweichen des Wassers durch den Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Gerinne entsteht, so ist dieser (wenn man den Spielraum an den Seitenwänden des Gerinnes unberücksichtigt lässt) nur bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne, oder wenn der Boden des Abflusscanales tiefer liegt als jener des Zuflusscanals, von einigem Belange, dagegen dort, wo der Boden des Zufluss- in den Boden des Abfluss-Canals durch einen Bogen übergeht, beinahe Null.

Redtenbacher berechnet ein unterschlächtiges Wasserrad, für welches der äussere Durchmesser 15·8 Fuss, die per Secunde zufliessende Wassermenge 31·66 Kubikfuss, Tiefe des Rades (Differenz zwischen dem äussern und innern Halbmesser) 19 Zoll, Breite desselben $6\frac{1}{3}$ Fuss, die Schaufeltheilung am äussern Umfang des Rades gemessen 19 Zoll, der Spielraum zwischen den Radschaufeln und Gerinnsboden, bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne $\frac{3}{4}$ Zoll und die Geschwindigkeit des zufliessenden Wassers 14 Fuss beträgt, und er findet, dass die vortheilhafteste Geschwindigkeit v zwischen $\cdot 3V$ und $\cdot 4V$ liege, das dabei zwischen den Schaufeln durchgehende Wasser, ohne zum Stoss zu gelangen oder seine Geschwindigkeit zu verändern, per Secunde ein Kubikfuss, also 10 Procent; ferner jenes, welches zwischen den Schaufeln und dem Gerinnsboden durchgeht, 2·3 Kubikfuss oder 23 Procent des zufliessenden Wassers und der wirkliche Nutzeffect 23·7 Procent von dem absoluten, d. i. nahe 5650 F. Pf. betrage. Man kann also nach dieser Annahme von einem unterschlächtigen Wasserrade mit geradlinigem Gerinne nur einen Nutzeffect von ungefähr 25 Procent erwarten, während bei einem Gerinne, wobei der Gerinnsboden des Zuflusscanals durch einen Bogen oder gekrümmten Theil (in welchem das Rad eingesenkt) mit dem Boden des Abflusscanals verbunden ist, also die Wasserverluste beinahe gänzlich verschwinden, dieser Nutzeffect, welcher dann bei einer Geschwindigkeit von $v = \cdot 45 V$ eintritt, bei sehr günstiger Construction des Rades bis 37 Procent steigen kann.

Nach dieser Regel ist in Fig. 147 C, der Mittelpunct und D der tiefste Punct des Rades, EDF der bogenförmige und AE der gerade Gerinnsboden, welcher gegen den Horizont um $\frac{1}{20}$ geneigt ist. Die nahe am Rade angebrachte Schütze LB ist gegen den Horizont um 60° geneigt. Die Dicke des Wasserstrahles vor dem Rade ist annähernd $= \frac{Q}{b\sqrt{2gH}}$, wobei b die Breite des Rades (parallel zur Achse) und H die Höhe des Wasserstandes JG im Zuflusscanal über dem Punct G ist. BG ist parallel mit AE, die Höhe des Wasserstandes im Abflusscanal correspondirt mit der Höhe des Punctes G. Endlich sind die Schaufeln so gestellt, dass sie im Puncte F vertical stehen. Die Umfangsgeschwindigkeit ist $v = \cdot 4 \sqrt{2gH}$, der Halbmesser R beträgt von 6 bis 12 Fuss. Die Anzahl der Schaufeln wird durch diejenige ganze Zahl n bestimmt, welche dem Werthe $\frac{2R\pi}{\cdot 6 + \cdot 7a}$ (wobei, Alles in Fussen ausgedrückt, $a = R - r$ die Tiefe des Rades ist) am nächsten liegt und ausserdem durch die Anzahl der Radarme (gleich jener dem Werthe $\cdot 6\,(3\cdot 2 + R)$ am nächsten liegenden ganzen Zahl) theilbar ist. Ist b die Breite des Rades (parallel zur Achse gemessen) und a die Tiefe desselben, d. h. die Differenz zwischen dem äussern und innern Radhalbmesser, so soll abv wenigstens $= 2Q$ sein; setzt man $abv = 2Q$, so ist die Grösse einer Schaufelfläche $ab = \frac{2Q}{v}$.

Ist endlich e die Entfernung von einer Schaufel zur andern, am äussern Umfang gemessen (die Schaufeltheilung), so ist $e = \frac{2R\pi}{n}$.

Uebrigens wendet man das unterschlächtige Rad mit Vortheil nur bis zu einem Gefälle von 3 Fuss an, was man als die Grenze für dessen Kraftgebiet ansehen kann.

261. Für das Poncelet'sche Rad (§. 403) wird man nach den im §. 404 gegebenen Erläuterungen in der obigen Formel (1)

$u=0$, $h'=0$ und $w=V-2v$ setzen; dadurch erhält man für dieses Rad nach einer einfachen Reduction:

$$E_n = 2\,\frac{Mv}{g}\,(V-v)\ldots(5),$$

welche Formel mit jener (4) verglichen, sofort zeigt, dass der theoretische Nutzeffect bei dem Poncelet'schen Rade doppelt so gross als bei dem gewöhnlichen unterschlächtigen Rade mit ebenen Schaufeln ist. Da ferner für den grössten Effect $w=0$, also $v=\frac{1}{2}V$ sein muss, so hat man dafür:

$$(E_n)_{max.} = \tfrac{1}{2}\,\frac{MV^2}{g} = Mh,$$

wodurch in der That, wenn auch noch durch eine zweckmässige Anlage der Schütze $h=H$ würde, der Nutzeffect dem absoluten Effect des Wassers gleich, und so das Ideal eines guten hydraulischen Motors erreicht sein würde.

Indess ist für den wirklichen Nutzeffect der Erfahrungscoeffizient (§. 405) $k'=\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$, nämlich $e_n=\frac{2}{3}Mh$ bis $\frac{3}{4}Mh$, und wenn man die ganze Gefällshöhe H berücksichtiget, $k=\cdot60$ bis $\cdot65$, d. i. $e_n=\cdot60\,MH$ bis $\cdot65\,MH$, also immer noch mehr als doppelt so gross als bei dem unterschlächtigen Rade mit ebenen Schaufeln.

262. Um bei diesem Rade den Einfluss der Centrifugalkraft kennen zu lernen, indem mit Rücksicht darauf die Kranzbreite oder Tiefe des Rades zu bestimmen ist, sei w die Winkelgeschwindigkeit des Rades und dm ein Element der Wassermasse, welches von der Achse des Rades den Abstand ϱ hat und an der krummen Schaufelfläche hinaufsteigt; so ist ϱw die Geschwindigkeit dieses Wassertheilchens, und daher die, nahe mit der Richtung der Schwere zusammenfallende Centrifugalkraft (welche dem Aufsteigen des Elementes entgegenwirkt) nach Nr. **131**, Formel (i)

$$F = \mathrm{d}m\,\varrho\,w^2,$$

oder wenn dM das Gewicht der Masse dm ist:

$$F = \frac{\mathrm{d}M}{g}\,\varrho\,w^2.$$

Durchläuft das Element dM während der unendlich kleinen Zeit dt den Raum dϱ im Sinne des Radhalbmessers, so ist die während dieser Zeit von der Centrifugalkraft ausgeübte Wirkungs- oder Arbeitsgrösse $=\frac{\mathrm{d}M}{g}\,.\,w^2\varrho\,\mathrm{d}\varrho$. Sind daher R und r der äussere und innere Radhalbmesser, und nimmt man auf die geringe Veränderung in der Lage der Schaufel, welche durch die Umdrehung des Rades während der kurzen Zeit, als das Wasserelement mit derselben Schaufel in Berührung bleibt, keine Rücksicht; so hat man für diese Arbeitsgrösse vom Augenblicke des Eintrittes des Wasserelementes in die Schaufel bis es zum innern Umfange des Rades gestiegen ist:

$$\int_r^R \frac{dM}{g} \cdot w^2 \varrho \, d\varrho = \frac{dM}{g} \cdot w^2 \frac{(R^2 - r^2)}{2}.$$

Was ferner die Arbeitsgrösse der in demselben Sinne wirkenden Schwerkraft betrifft, so ist diese, wenn das Wasser im tiefsten Puncte des Rades eintritt und sich auf die Höhe $R - r$ erhebt, $= dM \cdot (R - r)$.

Da nun das Wasserelement dM mit der relativen Geschwindigkeit $V - v$ in das Rad tritt, so ist dessen Wirkungsgrösse $= dM \cdot \frac{(V - v)^2}{2g}$ und da diese, während die Masse dM über die Schaufel hinaufsteigt und zuletzt alle Geschwindigkeit verliert, durch die Gegenwirkung der Centrifugal- und Schwerkraft erschöpft wird, so hat man

$$dM \cdot \frac{(V - v)^2}{2g} = dM \cdot \frac{w^2}{2g}(R^2 - r^2) + dM \cdot (R - r),$$

oder, wenn man abkürzt, $(V - v)^2 = w^2(R^2 - r^2) + 2g(R - r)$, aus welcher Gleichung sich ganz einfach, da die Grössen V, $v = Rw$, R und w gegeben sind, r also auch die Radtiefe $R - r$ bestimmen lässt.

Lässt man den Einfluss der Centrifugalkraft, welche verursacht, dass das Wasser an der Schaufel nicht so hoch als ohne dieselbe hinaufsteigen kann, ausser Acht, so hat man ganz einfach $R - r = \frac{(V - v)^2}{2g}$ oder für den grössten Effect, d. i. für $v = \frac{1}{2} V$ auch $R - r = \frac{1}{4} \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{4} h$ als Radkranzbreite, welcher Werth sofort etwas zu gross ist, so, dass wenn man diese dem 4ten Theile des disponiblen Gefälles gleich macht, man sicher sein kann, dass das Wasser nicht darüber hinaussteigt.

Anmerkung 1. Da sich indess das Rad oft etwas langsamer als mit $v = \frac{1}{2} V$ bewegt und das, was von einer unendlich dünnen Wasserschichte gilt, nicht auch von dem wirklichen Strahle angenommen werden kann, indem die zuerst eintretenden Wassertheilchen durch die nachfolgenden etwas weiter hinaufgestossen werden, so nimmt man in der Praxis diese Kranzbreite bei Gefällen von 1·9 bis 2·5 Fuss von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$, und bei grösseren Gefällen von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ des Gefälles H.

Anmerkung 2. Nach Redtenbacher's Angabe gelten für das Poncelet-Rad folgende Regeln:

Ist (Fig. 148) $ba = H$ das Gefäll, so ist der Halbmesser des Rades $R = 2H$, der Spielraum zwischen Rad und Gerinne $= \cdot 02 H$, Neigung der schiefen Ebene AB gegen den Horizont $= 3^0$, die Winkel, welche dem bogenförmigen Theile des Gerinnes entsprechen $BCF = FCD = 15^0$, Dicke der Wasserschichte unmittelbar vor dem Rade $= \cdot 19 H$, fa parallel mit AB, am Horizontallinie, welche den Wasserstand im Abflusscanal bestimmt, dc der mittlere Wasserfaden, co senkrecht darauf, oc Krümmungshalbmesser der Radschaufeln, Höhe der Radkrone $st = \cdot 509 h$, Breite des Rades $b = 5{\cdot}26 \frac{Q}{HV(2gH)}$, wobei Q die obige Bedeutung (Nr. **254**) hat, Tiefe des Wassers im Abflusscanal, unmittelbar hinter dem Rade $mn = \cdot 6 H$, Umfangsgeschwindigkeit $v = \cdot 55 \sqrt{2gH}$. Der Nutzeffect wird dabei durchschnittlich von 60 bis 65 Procent, und die Grenze, bis zu welcher das Poncelet'sche Rad noch mit Vortheil angewendet werden kann, mit $R = 9\frac{1}{2}$ und $b = 12\frac{1}{2}$ Fuss, also die Gefällshöhe H unter 3 bis $5\frac{1}{2}$ Fuss (weil man für grössere Gefälle $R = 1{\cdot}75 h$ setzt) angenommen.

263. Für das oberschlächtige Rad (§. 407) hat man in der allgemeinen Formel (1) (Nr. **254**), wenn die Richtungen von V und v zusammenfallen, $u = V - v$ und $w = v$ zu setzen; dadurch erhält man für den theoretischen Nutzeffect dieses Rades:

$$E_n = M(h + h') - \frac{M}{2g}[(V - v)^2 + v^2] \ldots (a)$$

oder wenn man für h seinen Werth $\frac{V^2}{2g}$ setzt und gehörig reducirt:

$$E_n = Mh' + \frac{Mv}{g}(V - v) \ldots (b),$$

wobei augenfällig das 1ste Glied im zweiten Theil dieser Gleichung die Wirkung oder Arbeit des Wassers während des Herabsinkens durch die Höhe h' und das 2te Glied die Wirkung durch den Stoss beim Eintritt in die Zellen (Nr. **260**, Gleich. 4) bezeichnet.

Anmerkung. Bildet die Richtung der Geschwindigkeit V mit jener der Geschwindigkeit v den nicht ganz zu vernachlässigenden Winkel φ, so darf man nicht mehr $\frac{M}{2g} u^2 = \frac{M}{2g}(V - v)^2$, sondern man muss in der Gleich. (a), um diesen durch den Stoss entstehenden Verlust an Wirkungsgrösse zu erhalten, nach Nr. 258, $\frac{Mu^2}{2g} = \frac{M}{2g}(V^2 + v^2 - 2Vv\,Cos\,\varphi)$ setzen.

264. Die Gleichung (a) zeigt, dass beim oberschlächtigen Rade das absolute Maximum nicht zu erreichen ist, weil dafür $(V - v)^2 + v^2$, d. i. $(V - v)^2 = 0$ und $v^2 = 0$, nämlich $V = v$ und $v = 0$ Statt finden müsste.

Um dagegen das relative Maximum zu erhalten, hat man, wenn V durch die Anlage der Zuleitung des Wassers auf das Rad bestimmt, und nur v veränderlich ist, aus der Gleichung (b):

$$\frac{dE_n}{dv} = \frac{M}{g}(V - 2v) = 0, \text{ folglich } v = \tfrac{1}{2}V \text{ und damit}$$

$$(E_n)_{max.} = Mh' + \tfrac{1}{2}Mh = M(h' + \tfrac{1}{2}h) \ldots (6).$$

Ist dagegen für gewisse Zwecke die Geschwindigkeit des Rades v im Voraus festgesetzt worden und soll dafür die Geschwindigkeit V des in das Bad tretenden Wassers so bestimmt werden, dass der Effect E_n ein Maximum wird, so hat man aus der Gleichung (a), in welcher $h + h'$ als constant anzusehen ist:

$$\frac{dE_n}{dV} = 2(V - v) = 0, \text{ also } V = v \text{ und mit diesem Werthe:}$$

$$(E_n)_{max.} = M(h + h') - \frac{Mv^2}{2g} \ldots (7)$$

so, dass beim Eintritt des Wassers gar kein, sondern überhaupt nur jener Verlust an Wirkungsgrösse entsteht, welche das Wasser bei seinem Austritt aus dem Rade noch besitzt, woraus sofort folgt, dass man dem Rade die möglich kleinste Geschwindigkeit geben soll. Uebrigens werden, wenn man die Geschwindigkeitshöhe des austretenden Wassers $\frac{v^2}{2g} = h''$ setzt, diese beiden Maximalwerthe (6) und (7) für $h'' = \frac{1}{2}h$ einander gleich.

Anmerkung. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass auch hier in diesem theoretischen Nutzeffect die Zapfenreibung mit inbegriffen ist, und dass man zur Erlangung des disponiblen Nutzeffectes von E_n den durch die Formel (α) in Nr. 254 (Anmerk.) näherungsweise angegebenen Effectverlust abziehen muss.

Die noch übrigen Effectverluste betreffend, so entsteht durch das „Freihängen" des Rades, wenn der tiefste Punct des Rades noch um die Höhe h'' über dem Spiegel des Unterwassers liegt, zuerst der Verlust Mh''. Ferner tritt ein nicht unbedeutender Verlust auch dadurch ein, dass die Zellen das Wasser nicht bis zu dem tiefsten Puncte des Rades führen, sondern dasselbe schon früher fallen oder ausfliessen lassen. Redtenbacher findet durch eine genauere Rechnung, wobei jedoch die bei guten Anordnungen ohnehin ohne bedeutenden Einfluss bleibende Centrifugalkraft vernachlässigt wird, für den betreffenden Effectverlust, je nachdem der Füllungscoefficient $\frac{Q}{abv}$ (wo a die Tiefe des Rades oder Radkranzbreite, b die Radbreite parallel zur Achse und v die Umfangsgeschwindigkeit ist *), d. i. das Verhältniss zwischen dem Volumen der Wassermenge Q, welche per Secunde dem Rade zufliesst, und dem Volumen der Zellenräume, welche diese Wassermenge aufzunehmen haben, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ist, beziehungsweise ·198, ·179, ·144, ·109; es beträgt nämlich dieser Verlust bei Rädern mit gewöhnlichem Zellenbau von 10 (wenn die Füllung $\frac{1}{4}$) bis 20 Procent (wenn die Füllung $\frac{2}{3}$ ist) von dem absoluten Effecte des Motors.

Dieser Verlust kann jedoch durch eine enge Theilung, einen zweckmässigen Zellenbau und namentlich bei schnell gehenden und stark gefüllten Rädern durch einen genau anschliessenden Mantel (Mantelräder) grösstentheils vermieden werden.

Mit Rücksicht auf alle diese Verluste kann man den wirklichen Nutzeffect der oberschlächtigen Wasserräder bei kleineren Gefällen (von 9 bis 15 Fuss) von 50 bis 60, dagegen bei grösseren Gefällen über 15 Fuss von 60 bis 75 Procent rechnen. (§. 412.)

265. Da es nicht uninteressant ist, den Einfluss der Centrifugalkraft bei diesem Rade genauer kennen zu lernen, sei C (Fig. 149) der Mittelpunct des Rades, aMb die Oberfläche des Wassers in einer Zelle, $MB = m$ das Gewicht eines in M befindlichen Wassertheilchens, $CM = x$ die Entfernung desselben vom Mittelpuncte des Rades, $MA = \frac{mv^2}{gx}$ (§. 196) die nach radialer Richtung auf das Theilchen m wirkende Centrifugalkraft und MD die Resultante aus diesen beiden Kräften MA und MB. Verlängert man diese Gerade DM, welche sofort (Nr. **169**) auf der Wasseroberfläche aMb normal sein muss, bis zum Durchschnitt O mit dem verlängerten verticalen Durchmesser, so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken MDB und MOC:

---

*) Ist e die Entfernung von einer Zelle zur andern auf dem äussern Umfang gemessen, d. i. die Zellen- oder Schaufeltheilung, so ist $Q\frac{e}{v}$ die Wassermenge, welche ein Schaufel- oder Zellenraum aufzunehmen hat, und das Volumen eines solchen Raumes $= abe$; es muss also $abe > Q\frac{e}{v}$ oder $abv > Q$, d. i. $abv = mQ$ oder $\frac{1}{m} = \frac{Q}{abv}$ sein. Für Schaufelräder ist gewöhnlich $m = 2$, für Zellenräder $m = 3$, 4 und selbst $= 5$.

$$OC : CM = MB : BD, \text{ d. i. } OC : x = m : \frac{mv^2}{gx},$$

woraus also $OC = g\left(\frac{x}{v}\right)^2$, oder wenn man, was hier erlaubt ist, $x = R$ setzt, $OC = g\left(\frac{R}{v}\right)^2$ folgt; da also OC für alle Puncte der Oberfläche aMb sehr nahe constant bleibt, so schneiden sich die sämmtlichen Normallinien sehr nahe in einem Puncte O, und es bilden daher die Wasserflächen in den einzelnen Zellen concentrische Cylinderflächen, deren gemeinschaftliche horizontale Achse durch den Punct O geht.

Macht das Rad per Minute n Umdrehungen, so ist $v = \frac{n.2R\pi}{60}$ oder $\frac{R}{v} = \frac{9{\cdot}55}{n}$; setzt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck, so wird auch, wegen $g = 31$ nahe

$$OC = \frac{2830}{n^2} \text{ Fuss.}$$

Da nun für die grösseren oberschlächtigen Wasserräder n immer so klein ist, dass OC sehr gross ausfällt, so kann man in solchen Fällen die Wasseroberflächen in den Zellen nahezu als horizontale Ebenen ansehen, gerade so, als ob die Centrifugalkraft gar nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Redtenbacher empfiehlt für das oberschlächtige Wasserrad folgende Verzeichnung (Fig. 150):

Der äussere Umfang des Rades wird von dem höchsten Wasserstande im untern Canal berührt. Die Tiefe des Punctes a unter dem niedrigsten Wasserstande im obern Canal ist $ah = 4\frac{v^2}{2g}$. Ist n die Anzahl der Zellen, so wird diese durch diejenige ganze Zahl bestimmt, welche dem Werthe $\frac{2R\pi}{{\cdot}6 + {\cdot}7a}$ (wo a die Tiefe des Rades $= R - r$, Alles in Fussen ausgedrückt) am nächsten liegt und die durch die Anzahl der Radarme theilbar ist. Ist e die Entfernung zweier Zellen, so ist die Zellentheilung $e = \frac{2R\pi}{n}$. Ist $aa' = e$ und $a'l = \frac{1}{4}e$, so ist lfg eine gerade radiale Linie und $lf = fg = \frac{1}{2}a$. Erscheinen die äussern Zellenwände zu convergirend, so muss fa schwach gekrümmt werden. Werden die Zellenwände aus Blech hergestellt, so nimmt man für diese eine durch die Puncte afg gehende stetige krumme Linie an. Ist ad der Richtung nach eine Tangente an den äussern Radumfang und der Grösse nach $= v$, ferner ac eine Tangente an den Punct a der äussern Zellenwand; so muss die Diagonale ab des Parallelogramms cd der Grösse nach $V = 2v$ sein und das Wasser nach der Richtung ba bei a ankommen, um ohne Stoss gegen die Zellenwände in das Rad zu gelangen. Dazu ist ae ein parabolischer Einlauf, dessen Scheitel in e liegt und in a von ba berührt wird. Der Horizontalabstand der Puncte a und e ist $= ah\,.\,Sin\,2bad$ und deren Verticalabstand $= ah\,.\,Sin^2 bad$. Die Wassermenge, welche eine Zelle aufzunehmen hat, ist $= Q\frac{e}{v}$. Das Verhältniss zwischen der Breite b und Tiefe a kann durch $u = \frac{b}{a} = 2{\cdot}25\sqrt[3]{N_a}$ (wo N_a die absolute Arbeit des zufliessenden Wassers in Pferdekräften ist) ausgedrückt und dann $b = \sqrt{\frac{uQ}{mv}}$ (wo $m = \frac{Q}{abv}$ der Füllungscoeffizient ist) und $a = \frac{b}{u}$ gesetzt werden. Der Halbmesser ist $R = \frac{1}{2}\left(h - \frac{V^2}{2g}\right)$ oder für $V = v$ auch $R = \frac{1}{2}\left(h - 4\,.\,\frac{v^2}{2g}\right)$. Die Umfangsgeschwindigkeit ist für kleinere Gefälle $v = 4$ bis $4{\cdot}8$, für grössere Gefälle 5 Fuss. Das Kraftgebiet dieses Rades erstreckt sich von 8 bis 40 Fuss Gefällshöhe und von 9 bis 25 Kubikfuss Wassermenge, welche per Secunde auf das Rad fällt.

266. Für das Kropfrad (§. 415) gelten dieselben Bemerkungen, welche in Nr. **263** für das oberschlächtige Rad gemacht wurden, daher auch die beiden Gleichungen (a) und (b), so wie für den grössten Effect die Formeln (6) und (7) in Nr. **264**. Was dabei den Erfahrungscoeffizienten k (Nr. **254**) anbelangt, so wäre nach den in Frankreich mit solchen Rädern angestellten Messungen für Geschwindigkeiten von v, welche zwischen 2 und 7 Fuss liegen, $k = {\cdot}74$, also der wirkliche Nutzeffect $e_n = {\cdot}74\,E_a$; dabei kann diesen Versuchen zufolge v ohne merklichen Nachtheil zwischen ·33 und ·66 V liegen.

Anmerkung 1. Der Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Kreis- oder Kropfgerinne betrug dabei nicht mehr als $4\frac{1}{2}$ Linie, so wie auch die Wasserhöhe über dem Eintrittspunct des Wassers in das Rad nur einen sehr kleinen Bruch der ganzen Gefällshöhe ausmachte. Bei einer weniger genauen und sorgfältigen Ausführung geht daher der genannte Coeffizient k bis ·65 und zuweilen auch noch weiter herab.

Da für kleine Umfangsgeschwindigkeiten v, auch $V = 2v$ und daher auch die Geschwindigkeitshöhe h nur gering ausfällt, so wendet man für solche Fälle gerne eine Ueberfallsschütze an, gibt aber der darüber stehenden Wasserschichte höchstens eine Dicke oder Höhe von 7 bis 10 Zoll und lieber, wenn eine bedeutende Wassermasse verwendet werden muss, dem Rade eine grössere Breite parallel zur Achse.

Anmerkung 2. Nach Redtenbacher wird das Kropfrad auf folgende Weise construirt:

Ist C (Fig. 151) der Mittelpunct und D der tiefste Punct des Rades, mn der niedrigste Wasserstand im obern, pq der mittlere Wasserstand im untern Canale, dabei $Dm = \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} a$ und $CD = R$, so liegt der Punct B um $2\frac{1}{2}$ Fuss unterm Wasserspiegel mn. AB bildet einen parabolischen Einlauf, wobei die an den Punct B gezogene Tangente gegen den Horizont um $\alpha = 35$ bis 45 Grad geneigt ist. Die Coordinaten des Scheitels A sind $BE = 2{\cdot}5\, Sin\, 2\alpha$, $EA = 2{\cdot}5\, Sin^2 \alpha$ (da nämlich die Parabel BAF mit jener übereinstimmen soll, welche ein mit der Geschwindigkeit V vom Puncte B aus in der Richtung BT unter dem Winkel $EBT = \alpha$ mit dem Horizonte geworfener Körper beschreibt, deren Scheitel A also Nr. **126**, Gleich. (w) die Coordinaten $x = \frac{V^2}{2g} Sin\, 2\alpha$ und $y = \frac{V^2}{2g} Sin^2 \alpha$ hat). Die Schütze ist gegen den Horizont um beiläufig 60 Grad geneigt. Um die Schaufelstellung zu erhalten, macht man $Dn = \frac{1}{4} a$, beschreibt aus C den Bogen ns, zieht su vertical und st radial (diese Regel gilt zugleich für die Schaufelung aller Schaufelräder). Den Zwischenraum zwischen dem äussern Umfang des Rades und der innern Krümmung des Gerinnes macht man für eiserne Räder von ·57 bis $\frac{3}{4}$ Zoll oder gegen 7 Linien, für hölzerne von $\frac{3}{4}$ bis 1·1 Zoll.

Da bei dieser Anordnung des Einlaufes das Wasser den Punct B mit einer Geschwindigkeit von nahe $12\frac{1}{2}$ Fuss erreicht, so ist die Umfangsgeschwindigkeit des Rades $v = 6\frac{1}{4}$ Fuss. Darf diese Geschwindigkeit kleiner sein, so erhält man einen bessern Effect, wenn man den Punct B nur um $1\frac{1}{2}$ Fuss $\left(\text{oder überhaupt um } 4\frac{v^2}{2g}\right)$ unter den Wasserspiegel legt. Auch kann man die Tangente an den Punct B so ziehen, dass sie zugleich auch den Radumfang an dieser Stelle berührt.

Den Halbmesser des Rades betreffend, so nimmt man $R = 1{\cdot}5 H$ bis $2{\cdot}5 H$, und den Füllungscoeffizienten $\frac{Q}{abv}$ (Nr. **264**) $= \frac{1}{2}$. Die Schaufelzahl wird wie beim unterschlächtigen Rade (Nr. **260**, Anmerkung) und die Breite b wie beim oberschlächtigen Rade (Nr. **265**) bestimmt. Der Nutzeffect wird dabei blos mit 40 bis 50 Procent angenommen.

Das Kropfrad wird am zweckmässigsten bei einem ziemlich constanten Wasserstande im obern Canal und einem Gefäll unter 5 Fuss, so wie einer zufliessenden Wassermenge, welche mehr als 60 Kubikfuss per Secunde beträgt, angewendet.

267. Legt man bei diesem Rade eine Ueberfallsschütze an, so erhält man das sogenannte Schaufelrad mit Ueberfall-Einlauf, für welches sofort dieselben Bemerkungen wie für das Kropfrad gelten.

Da man die obere Kante der Schütze sehr zweckmässig mit einer parabolischen Leitfläche AB (Fig. 152) versieht, so kann man dabei die Parabel auf folgende Weise bestimmen:

Ist b die Breite des Einlaufes (in der Regel um 3 bis 4 Zoll schmäler als die lichte Breite des Rades), s die Dicke oder Höhe der Wasserschichte über dem Scheitel des Ueberfalles und wieder Q die per Secunde abfliessende Wassermenge (in Kubikfuss), so hat man (§. 356):

$$Q = \cdot 44\, bs\sqrt{2gs} \text{ und daraus } s = \left(\frac{Q}{\cdot 44\, b\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist B der Punct, in welchem die Parabel AB den äussern Radumfang berührt, d. h. in welchem beide Curven (Kreis und Parabel) eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, so nimmt man die Tiefe dieses Punctes B um $1{\cdot}5\,s$ unterm Wasserspiegel mn und bestimmt den Scheitel A der Parabel mittelst der rechtwinkeligen Coordinaten $BC = 1{\cdot}4\,s$ und $CA = {\cdot}5\,s$; dabei ist die Umfangsgeschwindigkeit v zu $4\frac{1}{2}$ Fuss angenommen.

Anmerkung. Nach Redtenbacher soll für das Ueberfallrad $H > 4{\cdot}75$ Fuss und $Q < 65$ Kubikfuss sein. Der Halbmesser R wird dabei von $1\frac{1}{4}H$ bis $1\frac{1}{2}H$ und der Nutzeffect von 60 bis 65 Procent angenommen. Das Kraftgebiet dieses Rades soll sich bis $7\frac{1}{2}$ Fuss Gefällshöhe und 77 Kubikfuss Wasser per Secunde und nicht darüber hinaus erstrecken.

268. Für das Schaufelrad mit Coulissen-Einlauf bleibt wieder, bis auf den Einlauf, Alles dasselbe wie beim vorhergehenden Rade, nur kann die Umfangsgeschwindigkeit v bis auf 5 Fuss und die Gefällshöhe H von $7\frac{1}{2}$ bis 14 Fuss steigen, dagegen die Wassermenge Q von 75 bis 10 Kubikfuss abnehmen, ohne dass der Nutzeffect weniger als 65 bis 70 Procent beträgt; was den Halbmesser R betrifft, so nimmt man $R = H$.

Anmerkung. Was den Coulissen-Einlauf anbelangt, so muss das Wasser auf eine solche Weise in das Rad treten, dass weder das Stossgefäll zu gross ausfällt, noch die Schaufeln gegen den eintretenden Strahl schlagen können. Nach Redtenbacher's Berechnung soll bei einer Umfangsgeschwindigkeit von $4\frac{3}{4}$ bis $5\frac{3}{4}$ Fuss der Winkel, unter welchem die Coulissen dem Umfange des Rades begegnen sollen, im Mittel 36 Grad betragen. Ist daher C (Fig. 153) der Mittelpunct des Rades und mn der obere Wasserspiegel (welcher um die Gefällshöhe H über dem untern Spiegel, und dieser selbst um $\frac{1}{2}a$ über dem tiefsten Punct des Rades gezeichnet wird), so nimmt man den Punct 1 in einer Tiefe von 1 Fuss unter mn an, macht $1{,}2 = 2{,}3 = .. = \frac{1}{3}a$ (für gewöhnlich nahe 4 Zoll), zieht die Gerade $A1$ unter einem Winkel $A1C = 36^{0}$, verlängert diese bis I so, dass $1I = {\cdot}8a$

wird und beschreibt aus C mit dem Halbmesser $C1$ den Kreisbogen ab, so liegen in diesem Bogen die Mittelpuncte der Coulissen-Krümmungen 1,1′, 2,2′, 3,3′... als Kreisbögen vom Halbmesser $I1 = II2 = III3 = .\,. = \cdot 8a$.

Ist t die äussere normale Entfernung von zwei auf einander folgenden Coulissen und h' die Tiefe des Mittelpunctes der betreffenden Ausflussöffnung unterm Spiegel mn, so kann man die aus dieser Oeffnung per Secunde ausfliessende Wassermenge $= \cdot 4\, b\, t \sqrt{2gh'}$ setzen. Theilt man nun die Wassermenge Q durch diesen Werth, so erhält man die nöthige Anzahl solcher Coulissenöffnungen, welche man jedoch noch um so viele Canäle vermehren muss, als der Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Wasserstande im Obercanal entspricht.

269. Schliesslich erwähnen wir noch des rückenschlächtigen Zellenrades mit Coulissen-Einlauf, welches sich für Gefälle von 8 bis 25 Fuss und Wassermengen von 12 bis 40 Kubikfuss per Secunde eignet (also ein bedeutendes Kraftgebiet besitzt) und bei richtiger Ausführung einen Nutzeffect von 60 bis 70 Procent gewährt. Man nimmt dabei $R = \frac{2}{3} H$, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 4\frac{3}{4}$ bis 5 Fuss, die Breite b und Tiefe a, so wie die Anzahl der Zellen genau so wie beim oberschlächtigen Rad in Nr. **265** (Anmerk.) und den Füllungscoefficienten $\frac{Q}{abv} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und selbst $\frac{1}{5}$. Das Wasser tritt dabei etwas oberhalb der Achse des Rades ein, und die Zellen erhalten, damit die eingeschlossene Luft entweichen kann, der ganzen Breite des Rades nach $\frac{3}{4}$ bis 1 Zoll hohe Luftspalten, d. h. das Rad wird ventilirt.

Anmerkung. Die Verzeichnung des Coulissen-Einlaufes betreffend, so dienen nach Redtenbacher folgende Angaben:

Der tiefste Punct des äussern Radumfanges wird vom höchsten Wasserstande im untern Canal berührt. Nachdem man den innern und äussern Umfang des Rades, und mit diesem concentrisch in einem Abstand von $\frac{3}{5}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll die Krümmung des Gerinnes gezeichnet, nehme man (Fig. 154) auf der letztern den Punct 1 in einer Tiefe von 1 Fuss unterm Wasserspiegel mn, mache $1{,}2 = 2{,}3\,.\,. = \cdot 4a$ (gewöhnlich von 4 bis 5·7 Zoll), verzeichne die Zelle $1de$ in einer solchen Lage, dass sie durch den Punct 1 geht, so liegen die Puncte 5, d, e in einem Radius und es ist $5{,}d = de = \frac{1}{2} a$ (bei e werden die Luftspalten gelassen). Wird $d1$ nach b verlängert, $1{,}a$ tangirend an den Umfang des Gerinnes gezogen, $1{,}a = v$ abgeschnitten, durch a eine Parallele ac mit $1{,}b$ gezogen und der Punct c von 1 aus so abgeschnitten, dass $1{,}c$ gleich der Geschwindigkeit V, hier also

$= -\sqrt{2g} \times 1 = 7\cdot874$ Fuss ist, so stellt $c\,1$ (als Diagonale des Parallelogramms ab) die Richtung vor, in welcher das Wasser in die Zelle eintreten muss, um weder die Schaufel $1,d$ zu stossen, noch von ihr gestossen zu werden. Endlich ist $1I = a$ senkrecht auf $1,c$ und wenn man aus dem Mittelpuncte C des Rades mit dem Halbmesser CI einen Kreisbogen beschreibt, so liegen in demselben die sämmtlichen Mittelpuncte II, $III\ldots$ der Coulissen, als Kreisbögen vom Halbmesser $1,I = 2,II = 3,III = \ldots = a$.

Die Anzahl der Coulissen wird eben so wie beim Ueberfallsrad der vorigen Nr. bestimmt, nur dass man anstatt des dortigen Coeffizienten ·4 hier ·75 nimmt.

270. Nimmt man für den Nutzeffect der verticalen Wasserräder die oben bei den einzelnen Rädern angegebenen Mittelwerthe, nämlich für das unterschlächtige Rad 25 bis 35, für das Poncelet-Rad 60 bis 65, für das Kropfrad 40 bis 50, für das Schaufelrad mit Ueberfalleinlauf 60 bis 65, für das Schaufelrad mit Coulissen-Einlauf 65 bis 70, für das rückenschlächtige Zellenrad mit Coulissen-Einlauf 60 bis 70, für das oberschlächtige Rad für kleinere Gefälle (von $9\frac{1}{2}$ bis 16 Fuss) 50 bis 60 und für grössere (über 16 Fuss betragende) Gefälle von 60 bis 75 Procent an; so kann man die nöthige Wassermenge, welche per Secunde auf das Rad fliessen muss, näherungsweise, jedoch in vielen Fällen und namentlich bei der ersten oder vorläufigen Berechnung der Anlage eines Wassertriebwerkes genau genug aus dem Nutzeffecte, welchen das Rad entwickeln soll, und dem disponiblen Gefälle berechnen. Man hat nämlich für die in Kubikfuss ausgedrückte Wassermenge Q, welche dem Rade per Secunde zugeführt werden muss, wenn man Kürze halber den Quotienten aus der in Fussen ausgedrückten Gefällshöhe H in den in Pferdekräften (zu $430^{F.\,Pf}$) ausgedrückten Nutzeffect N_n, welchen das Rad liefern soll, d. i. $\frac{N_n}{H} = K$ setzt, sofort für das

unterschlächtige Rad:	$Q = 21\cdot8K$ bis $30\cdot5K$
Poncelet-Rad:	$Q = 11\cdot7K$ — $12\cdot7K$
Kropfrad:	$Q = 15K$ — $19K$
Schaufelrad mit Ueberfall-Einlauf:	$Q = 11\cdot7K$ — $12\cdot7K$
„ „ Coulissen-Einlauf:	$Q = 10\cdot9K$ — $11\cdot7K$
rückenschlächtige Zellenrad mit Coulissen-Einlauf:	$Q = 10\cdot9K$ — $12\cdot7K$

oberschlächtige Rad für kleinere
Gefälle .... $Q = 12{\cdot}7K - 15{\cdot}2K$
oberschlächtige Rad für grössere
Gefälle .... $Q = 10{\cdot}2K - 12{\cdot}7K$

Anmerkung. In jenen, nur selten vorkommenden Fällen, in welchen Wasserkräfte von mehr als 80 Pferdekraft benutzt werden müssen, wendet man lieber zwei oder mehrere Räder an, weil Wasserräder über 80 Pferdekraft schon zu colossale Dimensionen erhalten. Auch muss man dort, wo ein System von Arbeitsmaschinen zu betreiben ist, welche nicht wohl mit einander arbeiten können, wie z. B. bei Eisenwerken, statt einem Rade ebenfalls mehrere Räder anlegen.

Die Jonval'sche Turbine.

(§. 435.)

271. Da die von Jonval angegebene Turbine in neuester Zeit, und zwar mit dem besten Erfolge, vielfältig zur Anwendung kommt, so soll hier in Kürze das Wichtigste hierüber bemerkt und entwickelt werden.

Diese Turbine, welche in Fig. 155 im Durchschnitte, in Fig. 155, *a* in einer äussern Ansicht dargestellt ist, und wobei noch Fig. 155, *b* den Grundriss der Turbinenstube (in etwas kleinerem Massstabe), Fig. 155, *c* den vierten Theil der obern Ansicht des Leit-Curvenapparates und Fig. 155, *d* einen solchen Quadranten der obern Ansicht des Turbinenrades vorstellt, unterscheidet sich von der Fourneyron'schen (§. 430), deren Princip auch dabei zum Grunde liegt, wesentlich dadurch, dass das Leitcurvenrad nicht innerhalb, sondern über, in besonderen Fällen auch unter dem Turbinenrade angebracht und ausserdem so aufgestellt wird (wodurch sich diese Turbine auch von der Fontaine'schen unterscheidet), dass das Turbinenrad *ab* (Fig. 155) mehrere (selbst nahe bis 30) Fuss über den Wasserspiegel *CD* des Abflusscanales zu liegen kommt. Da das Wasser aus dem Zuleitungscanal *K* in den etwas conisch zulaufenden Leitcurvenapparat (das Leitcurvenrad) *bf*, und von da in das Turbinenrad *ab* eintritt, von wo es, nachdem es gewirkt, in dem cylinderischen Rohre *ag*, in welchem der ganze Apparat sammt dem um die verticale Achse *cd* umlaufenden Rade eingeschlossen ist herabfällt, so wirkt das Wasser von oben durch den Druck und von unten durch den Zug (durch Saugen), wesshalb solche Turbinen auch doppelt wirkend genannt werden. Die unten angebrachte Schütze EE (Fig. 155 und Fig. 155, *a*), welche das Wasser aus dem Cylinder-Mantel entweder nur von einer Seite, oder wie bei den neuern Turbinen, ringsherum ausströmen lässt, dient bis zu einer gewissen Grenze zur Regulirung der auf das Rad wirkenden Wassermenge, indem das unten abfliessende Wasser zugleich auch jenes ist, welches von oben her in das Rad eintritt. Auch die obere Schütze muss zur Regulirung des Ganges der Turbine eine angemessene Stellung (den gehörigen Schützenzug) erhalten.

272. Es sei nun zur Berechnung der Hauptabmessungen dieser Turbine in Fig. 156, R' der äussere, R'' der innere und $R = \frac{1}{2}(R' + R'')$ der mittlere Halbmesser des Turbinenrades; ferner stelle Fig. 157 einen Theil der Abwicklung des mittleren Schnittes in eine Ebene vor, welcher Schnitt dadurch entsteht, dass man das Leit- und Turbinenrad durch einen Cylinder vom Halbmesser R schneidet, dessen Achse mit jener cd (Fig. 155) zusammenfällt. In dieser Abwicklung seien ab, $a'b'$, zwei Leit-, und cd, $c'd'$ zwei Radschaufeln (welche windschiefe oder schraubenförmige Flächen bilden); α sei der mittlere Winkel, welchen die Leitschaufeln mit der untern Ebene des Leitrades, β der Winkel, welchen die Radschaufeln mit der obern Ebene des Turbinenrades bilden, so wie γ der Winkel, unter welchem das Wasser gegen die untere Ebene dieses Rades aus demselben austritt. Ferner sei (Fig. 155) h' die Tiefe der untern Fläche des Leitschaufelrades unter dem Oberwasserspiegel AB, h die Höhe des Turbinenrades, h'' der verticale Abstand der untern Fläche dieses Rades über dem Unterwasserspiegel CD, und H die ganze Gefällshöhe; ferner bezeichne n und n' beziehungsweise die Anzahl der Leit- und Radschaufeln, $s = bi$ (Fig. 157) und $s' = md'$ die mittlere normale untere Weite der Leit- und Radcanäle, F und F' die Summe der Ausflussöffnungen sämmtlicher Canäle im Leitcurven- und im Turbinenrad, so wie $s'' = cn$ die obere Weite und F'' die Summe der obern Querschnitte der Canäle des Turbinenrades; ferner seien k und k' die Contractionscoefficienten für den Ausfluss des Wassers aus dem Leitcurven- und Turbinenrade; v die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Punctes im Umfange des Kreises vom Halbmesser R, V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Leitcurvenrad austritt, u, u' die relativen Geschwindigkeiten des Wassers gegen die Radschaufeln beim Ein- und Austritt, und U die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verlässt. Endlich sei $\mathfrak{H}$ die Höhe einer Wassersäule, welche dem Drucke der Atmosphäre entspricht, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ zwei Wassersäulenhöhen, welche beziehungsweise dem Drucke entsprechen, der zwischen den beiden Rädern und unter dem Turbinenrade Statt findet, f der Querschnitt der untern Ausflussöffnung am cylinderischen Mantel, k'' der betreffende Contractionscoeffizient, A der Querschnitt des cylinderischen Rohres, in welchem das aus dem Turbinenrade austretende Wasser herabsinkt, Q die per Secunde auf das Rad wirkende Wassermenge in Kubikfuss, E_n der Nutzeffect der Turbine in Fusspfund und N_n dieser Effect in Pferdekräften zu $430^{F.\,Pf.}$ ausgedrückt. Diess vorausgesetzt, hat man zuerst für die theoretische Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus dem Leitschaufelrade:

$$V = \sqrt{[2g(\mathfrak{H} + h' - \mathfrak{H}')]} \ldots (1).$$

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, dass diese Ausflussgeschwindigkeit sowohl von der Grösse der Ausströmungsöffnungen im Turbinenrad, als auch von der Umdrehungsgeschwindigkeit dieses Rades abhängt. Zugleich sieht man aus dieser Formel (1), dass $V = > < \sqrt{2gh'}$ wird, je nachdem $\mathfrak{H}' = < > \mathfrak{H}$ ist.

273. Was ferner den Uebertritt des Wassers aus dem Leitschaufel- in das Turbinenrad betrifft, so müssen die Leit- und Radschaufeln wieder so construirt werden, dass dieser Uebertritt ohne Stoss Statt findet. Ist demnach AB (Fig. 158) die Richtung und Grösse der Geschwindigkeit V, mit der das Wasser in das Rad tritt, welches selbst nach der Richtung CA die Geschwindigkeit v besitzt, so nehme man in entgegengesetzter Richtung $AC = v$ und construire aus diesen beiden Geschwindigkeiten AB und AC das Parallelogramm BC, um durch die Diagonale AD die Grösse und Richtung der relativen Eintrittsgeschwindigkeit u zu erhalten; es muss daher, damit die genannte Bedingung erreicht werde, diese Gerade AD die Curve der Radschaufel im Eintrittspuncte A berühren. Aus dem Dreieck ABD folgt aber:

$$v = V\frac{Sin(\alpha+\beta)}{Sin\,\beta}\ldots(2) \text{ und } u = V\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\ldots(3).$$

Ferner ist auch, wenn $ab = u'$ die relative Austrittsgeschwindigkeit des Wassers und $ac = v$ die Geschwindigkeit des Rades bezeichnet, sofort die Diagonale $ad = U$ die absolute Geschwindigkeit des aus dem Rade austretenden Wassers und daher

$$U^2 = u'^2 + v^2 - 2u'v\,Cos\,\gamma\ldots(4).$$

Soll nun das Wasser seine ganze lebendige Kraft im Rade verlieren, so muss $U = 0$ sein, was nur möglich ist, wenn die beiden Bedingungsgleichungen

$$u' = v \text{ und } \gamma = 0\ldots(5)$$

Statt finden.

Es ist ferner, wie leicht zu sehen,

$$\frac{u'^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + (\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'')\ldots(6)$$

und

$$\mathfrak{H}'' + h'' = \mathfrak{H}\ldots(7)$$

oder mit Rücksicht auf die erste der Bedingungsgleichungen (5):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + \mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}''\ldots(8).$$

Aus der Gleichung (1) folgt $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{V^2}{2g}$ und aus jener (7): $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H} - h''$, mithin ist $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'' = h' + h'' - \frac{V^2}{2g}$ und $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'' + h = H - \frac{V^2}{2g}$. Dieser Werth in (8) substituirt gibt:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + H - \frac{V^2}{2g}\ldots(9).$$

Setzt man in diese Gleichung für v und u die Werthe aus (2) und (3), so erhält man:

$$H = \frac{V^2}{2g}\left(1 + \frac{Sin^2(\alpha+\beta)}{Sin^2\beta} - \frac{Sin^2\alpha}{Sin^2\beta}\right)\ldots(10)$$

oder da der eingeklammerte Theil auch (Formelsammlung, S. 5, Formeln 16 und 13)

$$= \frac{2\,Cos\,\alpha\,Sin(\alpha+\beta)}{Sin\,\beta} \text{ ist,}$$

und wenn man dann V bestimmt, sofort

$$V = \sqrt{\left[\frac{g\,H\,Sin\,\beta}{Cos\,\alpha\,Sin(\alpha+\beta)}\right]}\ldots(11).$$

Wird dieser Werth von V in der Formel (2) substituirt, so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$v = \sqrt{\left[\frac{g\,H\,Sin(\alpha+\beta)}{Cos\,\alpha\,Sin\,\beta}\right]}\ldots(12).$$

Aus (1) folgt $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{V^2}{2g}$ oder mit Rücksicht auf (11):

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{H \, Sin \, \beta}{2 \, Cos \, \alpha \, Sin \, (\alpha + \beta)} \ldots (13).$$

Ferner ist noch im Beharrungsstande, und da alle Canäle ausgefüllt sein sollen

$$Q = k V F = u F'' = k' u' F' \ldots (14),$$

folglich
$$F = \frac{Q}{k V} \ldots (15)$$

und wenn man in $k V F = u F''$ für u den Werth aus (3) setzt:

$$\frac{F''}{F'} = k \frac{Sin \, \beta}{Sin \, \alpha} \ldots (16);$$

setzt man dagegen in $k V F = k' u' F'$ (Gleichung 5 und 2) $u' = v = V \frac{Sin \, (\alpha + \beta)}{Sin \, \beta}$, so wird

$$\frac{F'}{F} = \frac{k}{k'} \frac{Sin \, \beta}{Sin \, (\alpha + \beta)} \ldots (17).$$

Anmerkung 1. Wie aus der Relation (13) hervorgeht, so wird der Druck des Wassers zwischen beiden Rädern jenem der Atmosphäre, d. i. $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ gleich, wenn $h' = \frac{H \, Sin \, \beta}{2 \, Cos \, \alpha \, Sin \, (\alpha + \beta)}$ ist.

Damit das Wasser im Zusammenhange zufliesse (Continuitätsbedingung), so darf $\mathfrak{H}'$ niemals Null sein, woraus also folgt, dass immer

$$\mathfrak{H}' + h' > \frac{H \, Sin \, \beta}{2 \, Cos \, \alpha \, Sin \, (\alpha + \beta)} \text{ sein müsse.}$$

Damit sich ferner das Wasser nicht von der Grundfläche des Turbinenrades losreisse, muss auch $\mathfrak{H}'' > 0$ sein, was aus der Relation (7) die Bedingung von
$$h'' < \mathfrak{H} \text{ gibt,}$$
oder, da streng genommen, die Höhe h'' durch die Geschwindigkeit des aus der untern Schützen- oder Mantelöffnung f ausfliessenden Wassers herabgezogen oder um h_1 vermindert wird, wenn $h_1 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{k'' f} \right)^2$ die Geschwindigkeitshöhe für das unten ausfliessende Wasser bezeichnet, so ist statt der Relation (7) jene

$$\mathfrak{H}'' + h'' - h_1 = \mathfrak{H}$$

zu setzen, so dass also für die zuletzt erwähnte Bedingung

$$h'' < \mathfrak{H} + h_1$$

sein muss; dabei kann jedoch in allen Fällen, in welchen die Oeffnung f gross, also die Ausflussgeschwindigkeit sehr klein ist, $h_1 = 0$ gesetzt werden.

Anmerkung 2. Wegen $\frac{Sin \, \beta}{Cos \, \alpha \, Sin \, (\alpha + \beta)} = \frac{2 \, Sin \, \beta}{Sin \, (2\alpha + \beta) + Sin \, \beta}$ ist für $2\alpha + \beta = 180^0$ aus Relation (11), $V = \sqrt{2gH}$ und aus (13)

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - H.$$

Für $2\alpha + \beta < 180^0$ wird $V < \sqrt{2gH}$ und $\mathfrak{H}' > \mathfrak{H} + h' - H$
und für $2\alpha + \beta > 180$ wird $V > \sqrt{2gH}$ und $\mathfrak{H}' < \mathfrak{H} + h' - H$.

Während nun bei der Schottischen und Cadiat'schen Turbine $2\alpha + \beta > 180^0$ ist, hat man bei der Jonval'schen immer $2\alpha + \beta < 180^0$ und zwar empfiehlt Redtenbacher für die meisten vorkommenden Fälle die Werthe $\alpha = 24^0$ und $\beta = 66^0$. Nur für grosse Gefälle und geringe Wassermengen ist es besser, den Winkel α etwas kleiner, etwa von 15 bis 18 Grad zu nehmen, damit das Rad grösser ausfalle. Den Winkel γ endlich kann man im Mittel zu 16 Grad annehmen, indem es, um dem Wasser den gehörigen Abfluss zu verschaffen, nicht möglich ist, wie es die Theorie verlangt (Relat. 5) $\gamma = 0$ zu setzen.

274. Zur Bestimmung des Radhalbmessers sei $cd = \delta$ (Fig. 159) die Dicke einer Leit-, so wie δ' die Dicke einer Radschaufel, so ist, da man die Leitschaufeln nach unten zu gerade macht, $ad = ab \, Sin \, \alpha = \frac{2R\pi}{n} Sin \, \alpha$, folglich $ac = ad - cd$, d. i.

$$s = \frac{2R\pi}{n} Sin \, \alpha - \delta \ldots (18).$$

Der Querschnitt eines Canales des Leitcurvenrades ist daher

$$s(R' - R'') = (R' - R'') \left(\frac{2R\pi}{n} Sin \, \alpha - \delta\right),$$

folglich aller n Canäle n Mal so gross; diese Summe der Querschnitte

$$(R' - R'')(2R\pi \, Sin \, \alpha - n\delta)$$

wird jedoch verengt durch die Dicken der Radschaufeln. Es ist nämlich $\delta' = mo = mn \, Sin \, \beta$ und $mi = mn \, Sin \, \alpha = \frac{\delta'}{Sin \, \beta} Sin \, \alpha$, folglich $n'(R' - R'') mi = n'(R' - R'') \frac{Sin \, \alpha}{Sin \, \beta} \delta'$ und daher die Summe der wirklichen Ausflussöffnungen:

$$F = (R' - R'')(2R\pi \, Sin \, \alpha - n\delta) - n'(R' - R'') \frac{Sin \, \alpha}{Sin \, \beta} \delta'$$

oder reducirt:

$$F = 2R(R' - R'') \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n\delta}{2R\pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n'\delta'}{2R\pi \, Sin \, \beta}\right) \quad (a)$$

und wegen $2R = R' + R''$ auch:

$$F = R'^2 \left[1 - \left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right] \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n\delta}{2R\pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n'\delta'}{2R\pi \, Sin \, \beta}\right) = \frac{Q}{kV}$$

(wegen Relat. 15); aus dieser Gleichung folgt endlich:

$$R' = \sqrt{\left[\frac{Q}{kV\left[1 - \left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right] \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n\delta}{2R\pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n'\delta'}{2R\pi \, Sin \, \beta}\right)}\right]} \quad (19)$$

Substituirt man, um zugleich auch s' zu finden, in der obigen Relation (17) für F' und F die Werthe, d. i.

$$F' = n's'(R' - R'') \ldots (b)$$

und für F den Werth aus der Relation (a) und bestimmt dann s', so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$s' = \frac{k}{n'k'} \frac{Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha + \beta)} \left(2R\pi\, Sin\,\alpha - n\delta - n'\delta' \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\right) \ldots (20).$$

Durch eine etwas complicirte Entwicklung findet man für den Druck P, welchen das Wasser nach verticaler Richtung auf das Rad, d. i. auf die Flächeneinheit der Radbreite $(R'^2 - R''^2)\,\pi$ ausübt, sofort:

$$P = \frac{\gamma Q^2}{g} \left(\frac{Sin\,\beta}{F''} - \frac{Sin\,\gamma}{F'}\right) \ldots (21).$$

Endlich erhält man ganz einfach und analog mit der Bestimmung von s, sofort:

$$s'' = \frac{2R\pi}{n'} Sin\,\beta - \delta' \ldots (22)$$

und analog mit F in Relation (a):

$$F'' = \left(2R\pi\, Sin\,\beta - n'\alpha' - n\delta \frac{Sin\,\beta}{Sin\,\alpha}\right)(R' - R'') \ldots (c).$$

Anmerkung. Was die übrigen Grössen und Verhältnisszahlen betrifft, so nimmt man für hohe Gefälle, um dem nachtheiligen Einfluss der Fliehkraft möglichst zu begegnen, die Differenz $R' - R''$ kleiner als für niedrigere Gefälle. In der Regel kann man (m. s. Redtenbacher über Turbinen) $R'' = \frac{2}{3}R'$ und $R = \frac{5}{6}R'$, so wie für hohe Gefälle $R'' = \frac{3}{4}R'$ nehmen.

Ferner ist in der Regel $n = 16$, $n' = 24$, $\delta = \delta' = \frac{1}{40}R$, $k = 1$ und $k' = {\cdot}9$ zu nehmen. Versuche haben gezeigt, dass man die vortheilhafteste Geschwindigkeit v erhält, wenn man die oben in (12) angegebene theoretische mit dem Factor ·774 multiplicirt, also

$$v = {\cdot}774 \sqrt{\left[\frac{gH\, Sin\,(\alpha + \beta)}{Cos\,\alpha\, Sin\,\beta}\right]} \ldots (d)$$

setzt.

Ferner ist $n\,.\,2R\pi = 60v$, daher $n = \frac{60}{2\pi}\frac{v}{R} = 9{\cdot}548\frac{v}{R}$.

Redtenbacher setzt die Höhe des Turbinenrades $= {\cdot}5R$, jene des Leitrades $= {\cdot}6R$, Abstand der untern Ebene des Leitrades von der obern Ebene des Turbinenrades $= \frac{1}{50}R$, Halbmesser des cylinderischen Mantels, welcher das Turbinenrad umgibt $= 1{\cdot}225R$, Höhe der Ausflussöffnung in dem untern Theile dieses Mantels $a)$ wenn die Ausströmung ringsherum Statt hat $= \frac{1}{2}R'$, $b)$ wenn die Ausströmung einseitig, auf eine Breite von $2R'$ Statt findet $= \frac{\pi}{2}R'$, Breite des Abflusscanales an der Stelle, wo die Turbine aufgestellt ist $= 4R'$. Endlich kann man noch in den meisten

Fällen $V = \cdot 707 \sqrt{2gH}$, $R' = 1\cdot 380 \sqrt{\frac{Q}{V}}$, $s = 1\cdot 372 R$, $s' = 0\cdot 811 R$ und $v = \cdot 6 \sqrt{2gH}$ nehmen.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass den Versuchen zufolge die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Turbine die Hälfte von jener ist, welche sie beim Umlaufen im unbelasteten Zustande annimmt.

275. Um endlich auch noch den Nutzeffect dieser Turbine zu bestimmen, kann man wieder, um complicirtere Entwicklungen zu vermeiden, von der Coefficienten-Methode Gebrauch machen und dabei auf folgende Weise verfahren.

Man kann unter der Voraussetzung einer richtigen Construction der Leit- und Radschaufeln, so wie der Erfüllung der Bedingungsgleichung (2) in **273**, annehmen, dass das Wasser aus dem Leitcurvenrade in das Turbinenrad ohne Stoss, also ohne Verlust an lebendiger Kraft, und zwar, wenn man von der Reibung in den Leitcurven-Canälen abstrahirt (oder diese in den folgenden Widerstandscoeffizienten mit einbezieht), mit der Geschwindigkeit V, wie sie in (1) oder (11) ausgedrückt ist, eintritt. Nimmt man ferner an, dass das Wasser beim Durchgange durch das Turbinenrad, der entstehenden Reibungen und Störungen wegen, die Geschwindigkeitshöhe $\varepsilon \frac{u'^2}{2g}$ verliert, so ist die relative Austrittsgeschwindigkeit nicht mehr u', sondern nur $u' \sqrt{1 - \varepsilon}$, wobei ε einen aus der Erfahrung zu bestimmenden Widerstandscoeffizienten bezeichnet. Dies vorausgesetzt, ist der dadurch entstehende Effectverlust $= \gamma Q \varepsilon \frac{u'^2}{2g}$, wenn nämlich γ wieder das Gewicht von 1 Kubikfuss Wasser bezeichnet.

Wie bereits (Nr. **272**, Anmerk. 2) bemerkt wurde, ist es in der Praxis unmöglich, den Ausflusswinkel $\gamma = 0$ zu machen, folglich lässt sich auch die, durch die beiden Relationen (5) ausgedrückte Bedingung, dass die absolute Ausflussgeschwindigkeit $U = 0$ sein soll, niemals vollständig realisiren, und es ist, wenn man wenigstens die eine Bedingung erfüllt und $u' = v$ setzt, sofort:

$$U^2 = 2v^2 (1 - Cos\, \gamma) = 4 v^2 Sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die in dem, mit dieser Geschwindigkeit U aus dem Rade tretenden Wasser, noch enthaltene, für den Nutzeffect also verlorne Wirkungsgrösse ist daher $= \frac{\gamma Q}{2g} \cdot 4 v^2 Sin^2 \frac{1}{2}\gamma$.

Endlich (da wir von der Zapfenreibung wieder abstrahiren) geht für den Nutzeffect auch noch jene Wirkungsgrösse verloren, welche erforderlich ist, um das Wasser aus der untern Schützenöffnung f mit der gehörigen Geschwindigkeit austreten zu machen. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit v', so ist der genannte Effectverlust $= \gamma Q \frac{v'^2}{2g}$, oder wegen $Q = k''fv'$, woraus $v' = \frac{Q}{k''f}$ folgt, auch $= \frac{\gamma Q}{2g}\left(\frac{Q}{k''f}\right)^2$.

Zieht man diese hier aufgezählten Effectverluste von der absoluten Wirkung des Wassers, nämlich von γQH ab, so erhält man den gesuchten, relativ grössten Nutzeffect (wegen $u' = v$):

$$E_n = \gamma QH - \left[\varepsilon v^2 + 4v^2 \, Sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma + \left(\frac{Q}{k''f}\right)^2\right]\frac{\gamma Q}{2g} \ldots (1).$$

Anmerkung. Die Bedingung, unter welcher das Wasser aus dem Leitcurvenapparate in das Turbinenrad ohne Stoss eintreten kann, lässt sich auch noch auf folgende Weise ableiten.

Zerlegt man die Geschwindigkeit V, mit welcher das Wasser nach der Tangente des letzten Elementes der Leitschaufel aus dem Leitcurvenrad ausströmt, in zwei auf einander senkrechte Seitengeschwindigkeiten T und N, nach den Richtungen der Tangente AT (Fig. 160), welche an das erste Element der Radschaufel gezogen wird, und der Normale AN, so ist, wegen W. $n = 90^0 - \beta$, sofort $T = V \, Sin\,(\alpha + \beta - 90)$ und $N = V \, Cos\,(\alpha + \beta - 90) = V \, Sin\,(\alpha + \beta)$. Zerlegt man ferner die Geschwindigkeit v, mit welcher das erste Element der Radschaufel nach Av ausweicht, ebenfalls in zwei auf einander senkrechte Seitengeschwindigkeiten T' und N' nach denselben Geraden, so ist $T' = v \, Cos\,\beta$ und $N' = v \, Sin\,\beta$. Nun findet aber offenbar nur dann kein Stoss des Wassers gegen die Radschaufel oder umgekehrt der Schaufel gegen das Wasser Statt, wenn $N = N'$, d. i. wenn $V \, Sin\,(\alpha + \beta) = v \, Sin\,\beta$ ist, was sofort auch durch die obige Bedingungsgleichung (2) bereits ausgesprochen wird.

276. Durch die Einführung des Widerstandscoefficienten ε erhält man nun auch für die Geschwindigkeit v einen von dem obigen, in (12) angegebenen, etwas verschiedenen Werth, und zwar muss man jetzt statt der obigen Gleichung (6) setzen:

$$\frac{u'^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + (\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'') - \varepsilon\frac{u'^2}{2g},$$

es ist nämlich $(1 + \varepsilon)\,u'^2 = u^2 + 2g(\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'')$, oder wegen $u^2 = V^2 + v^2 - 2Vv \, Cos\,\alpha$ (Dreieck ABD in Fig. 158), ferner $u' = v$ (Relat. 5), $V^2 = 2g(\mathfrak{H} + h' - \mathfrak{H}')$ (Relat. 1) und $V = \frac{v \, Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha + \beta)}$ (Relat. 2), auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$\left[\varepsilon + \frac{2\, Sin\,\beta\; Cos\,\alpha}{Sin\,(\alpha+\beta)}\right] v^2 = 2g\,(\mathfrak{H} + h + h' - \mathfrak{H}'')$$

oder wegen $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H} - h''$ (Relat. 7) und $h + h' + h'' = H$, endlich, wenn man gleich v bestimmt:

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH\, Sin\,(\alpha+\beta)}{\varepsilon\, Sin\,(\alpha+\beta) + 2\, Sin\,\beta\; Cos\,\alpha}\right]} \ldots (23).$$

Anmerkung. Ist $Z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{k''f}\right)^2$ die Geschwindigkeitshöhe für das aus der untern Schütze ausfliessende Wasser, so sollte man, streng genommen, in diesem Ausdrucke von v anstatt H setzen $H - Z$; allein da bei einer hinreichend grossen Schützenöffnung f, der Werth von Z sehr klein wird, so kann man immerhin ohne beachtenswerthen Fehler H statt $H - Z$ setzen.

277. Um den oben angenommenen Widerstandscoefficienten ε zu bestimmen, wollen wir von dem Erfahrungssatze Gebrauch machen, dass, wenn man die Turbine bei aufgezogener Schütze (so, dass sie dabei die normale Wassermenge consumirt) leer laufen lässt, diese eine Geschwindigkeit annimmt, welche nahe der doppelten Gefällshöhe H entspricht, so zwar, dass wenn die Turbine dabei das absolute Maximum des Effectes erreichen könnte, sofort $v = \sqrt{(2g \,.\, 2H)} = 2\sqrt{gH}$ sein würde. Da sich ferner aus den zahlreichen Versuchen, welche mit solchen gut ausgeführten Jonval'schen Turbinen gemacht wurden, herausgestellt hat, dass die vortheilhafteste, dem grössten Nutzeffecte entsprechende Geschwindigkeit v halb so gross, als die eben erwähnte, d. i. sehr nahe $v = \sqrt{gH}$ ist, so hat man zur Bestimmung von ε die Gleichung, wenn man diesen Werth in der Relat. (23) substituirt und die Gleichung quadrirt:

$$gH = \frac{2gH\, Sin\,(\alpha+\beta)}{\varepsilon\, Sin\,(\alpha+\beta) + 2\, Sin\,\beta\; Cos\,\alpha}$$

woraus sofort:

$$\varepsilon = 2\left[1 - \frac{Sin\,\beta\; Cos\,\alpha}{Sin\,(\alpha+\beta)}\right] = \frac{2\, Sin\,\alpha\; Cos\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} \ldots (24) \text{ folgt.}$$

Für die oben angenommenen Werthe von $\alpha = 24^0$ und $\beta = 66^0$ wird insbesondere $\varepsilon = 2\, Sin^2\, 24^0 = {\cdot}33$.

Anmerkung. Um die mögliche Uebereinstimmung des oben erwähnten und zur Bestimmung von ε benützten Erfahrungssatzes, dass eine gut construirte Jonval'sche Turbine, wenn sie leer läuft und dabei die normale Wassermenge Q consumirt, eine Geschwindigkeit annimmt, welche nahe der doppelten Gefällshöhe H entspricht, mit der Theorie nachzuweisen, müssen wir fürs Erste auf die bereits in Nr. **272** (Anmerk.) erwähnte Eigenschaft zurückkommen, nach welcher die Ausflussgeschwindigkeit V des

Wassers aus dem Leitcurvenrade nicht blos von dem Gefälle, sondern zugleich auch von der Weite der Radcanäle und der Geschwindigkeit des Turbinenrades abhängt, indem diese Ausflussgeschwindigkeit nach Umständen gleich, kleiner oder grösser sein kann, als wenn das Rad nicht vorhanden wäre. Bei der gewöhnlichen Construction der Radcanäle und der bedeutenden Geschwindigkeit, mit welcher das Rad im leeren Zustande umläuft, kann daher die Geschwindigkeit V sehr wohl $1{\cdot}1\sqrt{2gH}$ betragen, und da ihre Richtung gegen eine Horizontale einen mittlern Winkel von 20 bis 25 Grad bildet, dessen Cosinus z. B. für $\alpha = 24^0$, wie wir bisher angenommen $= {\cdot}9135$ ist, so wird die nach der Richtung der Radgeschwindigkeit v genommene Seitengeschwindigkeit $V\,Cos\,\alpha = 1{\cdot}1 \times {\cdot}9135\sqrt{2gH}$ nahe genug $= \sqrt{2gH}$.

Um nun aber das per Secunde mit dieser Geschwindigkeit nach dieser Richtung fliessende Wasser γQ auf jene des Rades $\sqrt{(2g\,.\,2H)} = 2\sqrt{gH}$ (im leeren Zustande) zu bringen, ist eine Arbeit von

$$\frac{\gamma Q}{2g}(4gH - 2gH) = \gamma QH^{F.\ Pf.}$$

erforderlich, was sofort die absolute dynamische Grösse der Betriebskraft ist, so, dass also eine Turbine wenigstens bei dieser Geschwindigkeit, das absolute Maximum erreichen würde, welche unbelastet, bei Consumirung der ganzen normalen Wassermenge eine Geschwindigkeit von $v = \sqrt{(2g \times 2H)} = 2\sqrt{gH}$ annähme.

Vergleicht man den zweiten Erfahrungssatz, dass nämlich die Turbine im belasteten Zustande am vortheilhaftesten arbeitet, wenn ihre Geschwindigkeit die Hälfte der eben genannten des Leerlaufens beträgt, d. i. wenn $v = \sqrt{gH}$ ist, mit dem oben (Nr. **274**, Anmerk.) angeführten Werth von ${\cdot}6\sqrt{2gH} = {\cdot}6 \times 1{\cdot}414\sqrt{gH} = {\cdot}85\sqrt{gH}$; so ist dieser letztere Werth um beiläufig 15 Procent kleiner als der erstere, wobei jedoch zu bemerken ist, dass sich die Geschwindigkeit des Rades überhaupt von jener, welche dem grössten Nutzeffect entspricht, bedeutend entfernen kann, ohne dass dadurch ein merklicher Nachtheil entsteht.

(Eine strenge theoretische Deduction des hier erwähnten Satzes, dass die vortheilhafteste Anzahl der Umdrehungen der Turbine halb so gross ist, als die Anzahl der Umdrehungen, welche sie, leer laufend, unter sonst gleichen Umständen macht, findet man in dem mehr erwähnten Werke: „Theorie und Bau der Turbinen" von F. Redtenbacher, 1844, auf S. 192 u. f.).

278. Wir haben endlich bei dieser Jonval'schen Turbine noch auf einen Punct, nämlich auf die untere Schütze EE aufmerksam zu machen und zu bemerken, dass sie keineswegs die Eigenschaft der übrigen Schützenvorrichtungen bei Wasserrädern und anderer Turbinen besitzt, nach welcher es möglich ist, mehr oder weniger Wasser auf das Rad wirken zu lassen, wornach dann auch der Nutzeffect sehr nahe dieser Wassermenge proportional ist. Mittelst dieser Schütze (die ursprünglich nur aus einem einfachen ebenen Schieber bestand) lässt sich zwar bei einem Ueberfluss an Aufschlagwasser die Geschwindigkeit des Rades bis zu einer gewissen Grenze reguliren, indem man dieselbe nicht ganz aufzieht; sie kann aber durchaus nicht als Regulirungsschütze bei Wassermangel dienen, indem, wenn z. B. nur halb so viel Wasser durch die Turbine geht, nicht auch, wie es bei den übrigen Wasserrädern nahe der Fall, der Nutzeffect blos halb so gross wird, sondern vielmehr bis auf den 8ten Theil herabsinkt. Ist nämlich im erstern Falle Q die durch das Rad gehende Wassermenge und H die wirksame Gefällshöhe, so ist der Effect $E = \gamma Q H$. Nimmt dagegen die Wassermenge um die Hälfte ab und strömt in derselben Zeit nur die Menge $\frac{1}{2}Q$ durch das Rad, so muss, da die Querschnittsöffnungen des Leitschaufelrades dieselben bleiben und nicht auch auf die Hälfte reducirt werden können, die Geschwindigkeit halb, also die entsprechende Geschwindigkeitshöhe nur den vierten Theil so gross werden als im ersten Falle, so, dass wenn Q in $\frac{1}{2}Q$ übergeht, sofort H in $\frac{1}{4}H$ übergehen muss und sonach der Effect im letztern Falle $E' = \frac{1}{2}Q \times \frac{1}{4}H = \frac{1}{8}QH = \frac{1}{8}E$ wird, woraus $E : E' = 1^3 : (\frac{1}{2})^3$ folgt. Man sieht leicht, dass bei dieser Sachlage überhaupt und unter allen Umständen der Effect der Turbine dem Kubus der wirksamen Wassermenge proportional ist.

Um also auch kleinere Wassermengen, als wofür die Turbine berechnet ist, eben so vortheilhaft benützen zu können, bleibt vor der Hand nichts Anderes übrig, als durch Beilagstücke, wodurch R'' vergrössert, also die Breite $R' - R''$ vermindert wird, die Oeffnungen F und F' gehörig zu verengen.

Anmerkung. Was endlich die Bestimmung der zweckmässigsten Form der Radflächen betrifft, so verweisen wir ebenfalls wieder auf die mehr genannten Redtenbacher'schen Schriften und bemerken hier nur noch, dass sich die Relation, welche zwischen den drei Winkeln α, β, γ wenigstens annäherungsweise Statt finden sollen, einfach auf folgende Weise ableiten lässt. Es ist nämlich, wie leicht zu sehen, wenn man auf die Schaufeldicke keine Rücksicht nimmt:

$$F = 2R\pi \, Sin\, \alpha, \quad F' = 2R\pi \, Sin\, \gamma, \quad F'' = 2R\pi \, Sin\, \beta,$$

folglich auch $\frac{F'}{F} = \frac{Sin\, \gamma}{Sin\, \alpha}$, und wenn man diesen Werth jenem in Relation (17) gleich setzt: $\frac{Sin\, \gamma}{Sin\, \alpha} = \frac{Sin\, \beta}{Sin\, (\alpha + \beta)}$, woraus sofort folgt:

$$Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta = \frac{1}{Sin\,\gamma} \ldots (y).$$

Mit dieser Relation erhält man nun auch für den Widerstandscoefficienten ε aus der Relation (24) den Ausdruck:

$$\varepsilon = 2\,(1 - Sin\,\gamma\; Cot\,\alpha) \ldots (z).$$

279. Beispiele. 1. Unter den vielen Jonval'schen Turbinen, welche in Oesterreich in der neuesten Zeit durch den besonders in diesem Zweige geschickten (bereits verstorbenen) Ingenieur Herrn Wetterneck construirt und in der (damals noch) Specker'schen Maschinenfabrik ausgeführt oder gebaut wurden, gehört jene, welche in der Girandoni'schen Baumwoll-Spinnfabrik zu Günseldorf aufgestellt und Ende April 1847 von einer Kommission des n. ö. Gewerbvereins probirt und untersucht wurde, mit zu den vorzüglichsten; wir wählen daher diese Turbine als Beispiel und berechnen ihren Nutzeffect nach der vorstehenden Theorie.

Diese Turbine ist für einen Nutzeffect von 45 Pferdekraft gebaut, welche bei dem disponiblen Gefälle von 16 Fuss eine Wassermenge von beiläufig 30 Kubikfuss per Secunde zu consumiren hat. Um jedoch die Frein-Versuche zu erleichtern, wurden die Radöffnungen durch 2 Zoll breite oder dicke Beilagen (in der Richtung des Radius gemessen) so weit verengt, dass die Turbine während des Versuches nur 17 Kubikfuss Wasser verbrauchte und dabei, nachdem sich das Gefälle, durch den Rückstau im Unterwasser, welcher durch den Einbau eines Ueberfalles (zum Behufe der Bestimmung der consumirten Wassermenge) bewirkt wurde, constant auf 13 Fuss gestellt hatte, einen Nutzeffect von nahe 25 Pferdekraft entwickelte.

Die hier zur Berechnung dienenden Dimensionen und Daten sind nun folgende: $R' = 20''$, $R'' = 16''$ folglich $R = 18'' = 1{\cdot}5'$, $H = 13'$, $Q = 17^{c.'}$, $n = 12$, $n' = 20$, $\alpha = 20^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 18^0$, $F = 1$, $F' = {\cdot}914\square'$ (ohne die eingelegten Beilagen ist $F = 1{\cdot}53$, $F' = 1{\cdot}35$). Die Turbine machte im belasteten Zustande 124 und im unbelasteten 249 Umläufe per Minute. Die Höhe des Leitcurvenrades beträgt 10 und die des Turbinenrades 6 Zoll. Die kreisförmige Schütze, welche selbst im gänzlich aufgezogenen Stande noch ins Unterwasser taucht, kann 2 Fuss hoch aufgezogen werden.

Aus diesen Angaben folgt für's Erste $v = \frac{124}{60} \times 2R\pi = 19{\cdot}48'$ und aus der vorigen Relation (z) der Widerstandscoefficient $\varepsilon = {\cdot}3$. Mit diesen Werthen erhält man aus der Formel (I), wobei man das der Abflussgeschwindigkeit, die dabei nur ungefähr 2 Fuss beträgt, entsprechende Glied $\left(\frac{Q}{k''f}\right)^2$ ohne Weiteres auslassen kann, für den Nutzeffect $E_n = 10148^{F.\,Pf.}$ und da der absolute Effect $E_a = 56{\cdot}5 \times 17 \times 13 = 12486{\cdot}5^{F.\,Pf.}$ ausmacht, folglich $E_n = {\cdot}814 E_a$ ist, so beträgt dieser Nutzeffect nahe $81\frac{1}{2}$ Procent; die erwähnte Freinprobe gab dafür 85 Procent.

Es muss bemerkt werden, dass der zur Bestimmung der verbrauchten Wassermenge angebrachte Ueberfall von $B = 15$ Fuss Breite mit 18 Zoll breiten Flügelwänden versehen war, wodurch $b = 12$ Fuss und $\frac{b}{B} = {\cdot}8$

wurde, wozu nach §. 357 der Reductionscoefficient $m = {\cdot}431$ gewählt, und womit eben die hier in Rechnung gebrachte Wassermenge von 17 Kubikfuss gefunden wurde.

Die Geschwindigkeit eines Punctes im mittlern Umfange des Rades vom Halbmesser R ist 39 Fuss, dagegen die der doppelten Gefällshöhe entsprechende Geschwindigkeit $= 7{\cdot}874 \sqrt{26} = 40$ Fuss, also bestätigt sich auch hier der oben angeführte Erfahrungssatz von der Radgeschwindigkeit im unbelasteten Zustande, so wie jener, dass die Turbine bei ihrem grössten Effect im belasteten Zustande nur halb so viele Umläufe, als im unbelasteten Zustande macht.

Da endlich der Durchmesser des Zapfens $3\frac{1}{2}$ Zoll und das Gewicht des Turbinenrades sammt der Welle 700 Pfund (wogegen der verticale nach Relation (21) zu bestimmende Druck des Wassers vernachlässigt werden kann) beträgt, so absorbirt die Zapfenreibung, wenn man den Reibungscoefficienten $= \frac{1}{10}$ setzt, nahe $90^{F.\ Pf.}$ oder etwas über $\frac{1}{5}$ Pferdekraft.

2. Bei der Turbine, welche in der Spinnerei des Herrn Mohr zu Neunkirchen aufgestellt, und durch dieselbe Kommission untersucht wurde, finden folgende Verhältnisse Statt.

Während der Probe waren im Turbinenrade wieder Segmente und zwar von 5 Zoll Breite beigelegt, dadurch war $R' = 36$, $R'' = 32$, folglich $R = 34$ Zoll $= 2{\cdot}833'$; ferner war $H = 11{\cdot}65'$ und wenn man wieder mit dem Coefficienten $m = {\cdot}431$ rechnet; $Q = 33{\cdot}5^{c.'}$, die Turbine machte per Minute im (am vortheilhaftesten) belasteten Zustande 56, und im leeren Zustande 122 Umläufe. Ferner war $F = 1{\cdot}87$, $F' = 1{\cdot}86$ Quadratfuss (ohne die Beilagen ist $F = 4{\cdot}33$ und $F' = 4{\cdot}06$); ferner ist $n = 16$, $n' = 26$, Höhe des Leitcurvenrades 12 und des Turbinenrades 9 Zoll. Der Durchmesser des Zapfens ist 5 Zoll und das Gewicht des Turbinenrades sammt dem Wellbaum $= 2500$ Pfund.

Mit diesen Daten findet man $v = 16{\cdot}61$ und wenn man wieder $\gamma = 18^0$ und $\varepsilon = {\cdot}3$ setzt, $E_n = 22050 - 3351 = 18699$; da nun $E_a = 22050$ ist, so wird $E_n = {\cdot}848\, E_a$, was sofort einen Nutzeffect von nicht ganz 85 Procent gibt, während durch die Freinprobe (bei der Annahme von $33\frac{1}{2}$ Kubikfuss verbrauchte Wassermenge, dafür 83 Procent gefunden wurde, wobei jedoch der durch die Zapfenreibung entstehende Effectverlust nicht abgeschlagen ist, so, dass sich, da dieser Verlust $203^{F.\ Pf.}$ beträgt, der Nutzeffect eigentlich um 1 Procent höher, nämlich auf 84 Procent stellt, was mit der obigen Theorie und Formel (*1*) auf die befriedigendste Weise übereinstimmt.

Anmerkung. Stellt man die aus der Theorie und den Versuchen sich ergebenden Resultate übersichtlich zusammen, so erhält man im Wesentlichen folgende Sätze:

1) Bei ungeänderter Grösse der unteren Ausflussöffnungen des Turbinenrades ist die consumirte Wassermenge von der Anzahl der Umdrehungen des Rades unabhängig.

2) Die Anzahl der Umdrehungen der Turbine kann sich bedeutend von der vortheilhaftesten Umdrehungszahl entfernen, ohne dass dadurch eine

merkliche Aenderung im Nutzeffecte entsteht. So fand eine im *Aspach-le-pont* zur Prüfung einer von André Köchlin & Comp. verfertigten Jonval'schen Turbine zusammengesetzte Kommission, dass der von 72 bis 83 Procent betragende Nutzeffect derselbe blieb, obgleich die Geschwindigkeit des Rades von 90 bis auf 168 Umdrehungen per Minute stieg, während der Wasserverbrauch nur um circa $\frac{1}{10}$ Procent zunahm. (*Bulletin de la Soc. industr. de Mulhouse*, 1844, Nr. 58.)

3) Mit dem unten angebrachten Schieber oder der Schütze ist es nicht möglich, grössere oder kleinere Wasserquantitäten gleich gut nutzbringend zu machen.

4) Die Anzahl der Umdrehungen der leer laufenden Turbine ist bei ganz aufgezogener Schütze doppelt so gross, als die vortheilhafteste Anzahl der Umdrehungen im belasteten Zustande.

5) Die Turbine erreicht ihren grössten Nutzeffect nur dann, wenn ihr die Wassermenge, wofür sie construirt ist, auf eine ruhige und constante Weise zugeführt wird.

Ausser dem grossen Vortheile, dass bei der Jonval'schen Turbine der Wasserbau, und da die Trockenlegung sehr leicht, die Ueberwachung und Instandhaltung derselben weit einfacher und weniger kostspielig als bei der Fourneyron'schen Turbine ist, bietet sie gegen diese letztere noch folgende wesentliche Vortheile dar.

Erstlich wird bei dieser das zuströmende Wasser aus seiner Richtung nur ein Mal, und zwar blos um beiläufig 60 Grad abgelenkt, während diess bei der Fourneyron'schen Turbine zwei Mal, und jedes Mal um nahe 90 Grad geschieht. Ferner kann der Halbmesser und die Umdrehungszahl bei dieser Turbine innerhalb viel weiterer Grenzen variiren als bei der Fourneyron'schen.

Dagegen steht die Jonval'sche Turbine der Fourneyron'schen darin nach, dass nicht alle Puncte der obern horizontalen Radschaufelkanten (wie es im Gegentheil mit den Puncten der innern verticalen Schaufelkanten bei der Fourneyron'schen Turbine der Fall ist) einerlei Geschwindigkeit, sondern die von der Achse entfernteren eine grössere, die näher liegenden eine kleinere Geschwindigkeit besitzen, was zur Folge hat, dass das Wasser nicht nach der ganzen Breite der Schaufeln völlig ohne Stoss in das Rad eintreten kann. Ferner, dass aus demselben Grunde die äussern Wassertheilchen eine grössere, die mehr gegen die Achse zu liegenden aber eine kleinere Fliehkraft besitzen, wodurch in denselben ein gewisses Drängen und eine Art Störung entsteht; beide diese Nachtheile lassen sich jedoch dadurch fast ganz unschädlich machen, dass man die Kranzbreite $R' - R''$ so klein als möglich nimmt.

Wassersäulenmaschine.

(§. 439.)

280. Wir wählen hier als ein weiteres Beispiel dieser sehr nützlichen Kraftmaschine zur Hebung der Grubenwasser in Bergwerken, die von dem *Ingénieur des mines* Herrn Juncker in den Bergwerken von Huelgoat in der Bretagne, nach Reichenbach's Princip sehr schön und vollkommen ausgeführte, einfach wirkende Wassersäulenmaschine, welche in ihren wesentlichsten Bestandtheilen in den Figuren 161, 161.*a* und 161.*b* dargestellt ist.

Der oben offene Treibcylinder *Y* (Fig. 161), in welchem sich der Treibkolben *P* auf und ab bewegt, communicirt mit dem nebenstehenden Steuercylinder *HH'* durch das Rohr *T*, so wie dieser letztere Cylinder durch das Rohr *O* mit dem Einfalls- und durch jenes *S* mit dem Abflussrohr. Der nach der Zeichnung eben im Niedergehen begriffene und genau auf halbem Wege befindliche Steuerkolben *R* ist durch seine Stange *E* mit einem etwas grösseren Gegenkolben *J* verbunden, so, dass also beide Kolben zusammen durch das Kraftwasser immer aufwärts getrieben werden, so lange nicht eine neue nach abwärts wirkende Hilfskraft hinzutritt. Diese neue Kraft wird aber dadurch erzeugt, dass man das Kraftwasser durch das Rohr $a_3 a$ (welches in Fig. 161.*a* in einem grösseren Massstabe gezeichnet ist), den Cylinder *ie* und die Oeffnung *o* über den Kolben *J*, und zwar nur über einen schmalen, ringförmigen Theil *w* desselben, welcher durch das Aufsetzen des hohlen Cylinders *K* entsteht, treten lässt, welches, nachdem es gewirkt, wieder durch den schmalen Canal *o*, den kleinen Cylinder *ie* und die Röhre $e\,e_2\,e_3$ abfliessen und in das Abzugsrohr *S* gelangen kann.

Das abwechselnde Zulassen und Absperren des Kraftwassers in und von dem ringförmigen Raume *w*, wird durch eine Hilfssteuerung bewirkt, welche der Hauptsteuerung vollkommen ähnlich ist; auch diese besteht aus einer gleichen Kolbenverbindung, nämlich dem eigentlichen Steuerkolben *r*, dem Gegenkolben *i* und dem durch eine Stopfbüchse *nn* gehenden cylinderischen Kolben *k*, welcher über dem Kolben *i* einen sehr schmalen, ringförmigen Raum lässt, in welchem das Kraftwasser durch das enge Rohr *u* treten und dadurch den nöthigen geringen (kaum 50 Pfund betragenden) Gegendruck bilden kann, welcher zur Ausgleichung jenes Druckes nothwendig ist, den der untere Kolben *r* nach aufwärts durch die bis zum (um 14 Meter höher liegenden) Abflusscanal reichende Wassersäule erleidet.

Um endlich dieses letztere Kolbensystem, dessen Bewegung nur eine äusserst geringe Kraft erfordert, rechtzeitig zu steuern, indem diese Steuerung gleichsam die Seele der Maschine bildet, so ist dieses System an den um v' drehbaren Hebel $v't$ aufgehängt, und dieser durch das bewegliche Verbindungsglied t' mit dem um s' drehbaren Hebel ss', der in ein Cirkelstück 1,2 ausläuft, verbunden. (Diese Art der Verbindung wurde durch den engen disponiblen Raum zwischen dem Treib- und Steuercylinder bedingt.) Ausserdem ist in dem Treibkolben P bei f eine runde Stange dd vertical befestigt, welche oben bei g durch eine Führung geht und gegen den Steuercylinder zu eine flache Leiste $e'e'$ trägt, die gerade so dick als das genannte Cirkelstück ist, und während der ganzen Bewegung des Kolbens P diesen in derselben verticalen Ebene liegenden Kreisbogen 1,2 tangirt. An den zwei entgegengesetzten flachen Seiten dieser Leiste sind zwei Kämme oder Hebköpfe 3 und 4 mittelst Schrauben befestigt, deren Entfernung 3,4 man leicht verändern kann, indem die Leiste $e'e'$ zu diesem Ende der Länge nach mit einer Reihe von passenden Löchern versehen ist. Da endlich auch an den beiden entgegengesetzten flachen Seiten des genannten Sectors 1,2 zwei Ansätze oder Däumlinge 1 und 2 befestigt sind, welche mit den erwähnten Ansätzen 3 und 4 correspondiren, so ergreift beim Aufwärtsgehen des Treibkolbens der Ansatz 3 seinen correspondirenden 1 und hebt die kleinen Kolben r, i, k so lange, bis der Hebkopf 3 den Ansatz 1 (durch die Bewegung des Sectors 1,2) auslässt, worauf der Sector, also auch das genannte Kolbensystem, ruhig stehen bleibt, während der Treibkolben seinen Lauf aufwärts vollendet. Bei dem darauf folgenden Niedergehen des Treibkolbens geht der Hebkopf 3 vor seinem correspondirenden Ansatz 1 ruhig vorbei, während bald darauf der Kamm 4 seinen correspondirenden Ansatz 2 ergreift und den Sector sammt dem kleinen Kolbensysteme wieder in die vorige, hier gezeichnete Lage herabführt.

Das Spiel der Maschine ist nun leicht einzusehen. In der gegenwärtigen, in der Zeichnung dargestellten Stellung der einzelnen Theile, in welcher der Steuerkolben R (nebst seiner Verbindung) noch im Hinabgehen in dem Raume $b'c'$ begriffen ist, fängt das Kraftwasser von O her (durch die eigenthümliche conische Form des Kolbens, welcher auch noch mit passenden Einkerbungen versehen ist (Fig. 161.b) bereits zu wirken und den Treibkolben P zu heben an. Sobald der Kolben so hoch gestiegen ist, dass durch den eben erwähnten Mechanismus das kleine Kolbensystem

r, i, k der Hilfssteuerung gehoben wird, so fängt auch, weil dadurch die Communication zwischen dem ringförmigen Raume w und dem Abflussrohr S (durch den schmalen Canal o und das Rohr $e e_1 e_2 e_3$) frei geworden ist und das Druckwasser aus diesem Raume w abfliessen kann, das Kolbensystem R, J, K der Hauptsteuerung zu steigen an, und zwar ist in dem Augenblicke, als der Treibkolben bei verzögerter Geschwindigkeit seinen höchsten Stand erreicht hat, der Steuerungskolben R bereits auf jene Höhe gekommen, bei welcher die bei x_1 auslaufenden Einkerbungen des Kolbens über b' hinaufgekommen sind und dadurch schon eine beginnende Communication zwischen dem untern Theile des Treibcylinders und dem Ausflussrohre S durch die Röhre T entsteht, die sich allmälig immer mehr vergrössert und endlich wenn x_2 nach b, der Kolben R nämlich in den Raum bc gekommen ist, vollkommen herstellt; dadurch fängt nun auch, durch das Gewicht des mit der Treibkolbenstange X verbundenen Pumpen-Gestänges, der Treibkolben zu sinken an, wobei das unter demselben befindliche, bereits gewirkte oder sogenannte todte Wasser, durch die offene Communication YT in das Abflussrohr S fliesst. Hat bei diesem Herabgehen des Treibkolbens der vorhin erwähnte Kamm 4, das Kolbensystem r, i, k der Hilfssteuerung wieder (in die durch die Zeichnung dargestellte Lage) herabgezogen, so tritt das Kraftwasser aus dem Steuerungscylinder durch das Rohr $a_3 a_2 a$ und den schmalen Canal o über den Gegenkolben J in den ringförmigen Raum w und treibt den Steuerkolben R nach abwärts, welcher in dem Augenblicke als der Treibkolben (ebenfalls nachdem seine Geschwindigkeit nur allmälig bis Null abgenommen) seinen niedrigsten Stand erreicht, die in der Zeichnung angedeutete Stellung angenommen hat, so, dass auch schon in dieser Stellung durch die conische Form des Steuerungskolbens und dessen von x'' bis x' reichenden Einkerbungen bewirkt, das Kraftwasser allmälig, und wie der Kolben R weiter herabgeht, immer mehr zu wirken anfängt und den Kolben P mit wachsender Kraft wieder in die Höhe treibt.

Anmerkung. Durch die bereits erwähnte conische Form, in welcher der Steuerkolben R (welcher in Fig. 161.b in einem etwas grösseren Massstabe dargestellt ist) an den beiden Grundflächen ausläuft, so wie den daselbst angebrachten 8 Einkerbungen, gelang es dem Genie eines Reichenbach, eine der grössten Schwierigkeiten, welche sich bei der Bewegung einer gänzlich unelastischen Flüssigkeit ergibt und sowohl in höchst nachtheiligen Stössen und Erschütterungen, als in Verlusten an lebendiger Kraft, durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen der steigenden und fallenden Wassersäulen besteht, vollkommen zu besiegen, indem dadurch der Treibkolben, folglich auch die Wassersäulen im Fall- und Steigrohr von der Ruhe aus nur allmälig auf die normale Geschwindigkeit (welche übrigens niemals mehr als 6 Fuss betragen soll) und gegen Ende des Laufes eben so wieder allmälig zur Ruhe gebracht werden.

Ausser den bereits ersichtlich gemachten Vorzügen der Kolbensteuerung (gegen eine Hahnsteuerung, welche immer mit einer bedeutenden Reibung und Abnützung verbunden), ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass der Maschinenwärter die letzte Regulirung der Treibkolben-Geschwindigkeit ganz einfach durch die Handhabuug der beiden Hähne a_{1} und e, welche den, in und von dem ringförmigen Raume w zu- und abfliessenden Wasserstrahl regulirt, bewirken, ja selbst den Gang der Maschine in jedem Augenblicke sistiren und wieder herstellen kann. Denn ist z. B. der Steuerungskolben R bei seinem Aufsteigen in die gezeichnete Stellung gekommen, so braucht man nur den Hahn e zu schliessen, um die Maschine augenblicklich zum Stillstande zu bringen; sie wird dagegen sogleich wieder durch das Oeffnen dieses Hahnes in Bewegung gesetzt. Ein ähnliches Resultat erhält man während des Herabgehens dieses Kolbens R, wobei man jedoch den Hahn a_{1} schliessen und im zweiten Falle öffnen muss.

281. Bei dem Umstande, dass das projectirte, mit der Kolbenstange X verbundene, 230 Meter lange Gestänge der Pumpe, welches in einer doppelten Kette (ähnlich jenen bei den Kettenbrücken) besteht, ein Gewicht von 16,000 Kilogramm besitzt, musste zur Herbeiführung eines regelmässigen Ganges dieses bedeutende Gewicht auf irgend eine Weise balancirt werden. Anstatt der sonst üblichen Mittel wurde hier ein sogenannter hydraulischer Balancier in Anwendung gebracht, welcher ganz einfach in einer zweiten Röhrentour, d. i. in einer verticalen Wassersäule besteht, welche mit dem Abflussrohre S communicirt, so, dass also das unter dem Treibkolben befindliche todte Wasser beim Herabgehen desselben nicht frei abfliessen kann, sondern diese dem Gewichte des Gestänges entsprechende Wassersäule, welche sonach als Moderator wirkt, heben muss.

Damit jedoch die eben genannte, als Hemmung oder zur Ausgleichung dienende Wassersäule keinen Effectverlust herbeiführe, und wie es bei sonstigen Gegengewichten der Fall, beim Aufsteigen des Treibkolbens durch ihr Gewicht wieder ersetzen und die Druckhöhe des Kraftwassers vermehren könne, wurde die Wassersäulenmaschine nicht auf die Höhe des Abflusscanals, sondern um die Höhe der genannten, den hydraulischen Balancier bildenden Wassersäule tiefer gestellt, wodurch also auch das Gefälle um dieselbe Höhe vermehrt wurde.

Anmerkung. Ohne hier in die letzten Details dieser Maschine, welcher noch eine ganz gleiche Schwester- oder Zwillingsmaschine zur Seite steht, einzugehen, die man in der grössten Ausführlichkeit im 8. Band (J. 1835) der *Annales des mines* findet, wollen wir hier nur Folgendes bemerken.

Obschon man den Kolbengang durch Veränderung der Distanz der beiden erwähnten Hebköpfe 3 und 4 auf der Leiste $e'e'$ reguliren kann, so geschieht diese Regulirung, besonders in Beziehung auf die Geschwindigkeit des Kolbenlaufes, doch noch zweckmässiger durch zwei Drosselklappen V und V', wovon die eine im Zuleitungsrohr O, die andere im Ausflussrohr S angebracht und jede so eingerichtet ist, dass sie sich von Aussen durch einen einfachen Mechanismus beliebig um ihre verticale Achse drehen lässt, um das betreffende Rohr mehr oder weniger zu schliessen; geschieht diess mit der Klappe V, so wird die Geschwindigkeit des Tıeibkolbens P beim Aufwärtsgehen, dagegen mittelst der Klappe V' beim Abwärtsgehen vermindert. Man bediente sich in der That dieses Mittels und verringerte durch die Klappe V die Zuleitung des Kraftwassers bedeutend, weil die Maschine für den Fall berechnet ist, dass die Pumpe in eine Tiefe von 230 Meter unter den Abflusscanal zu stehen kommt, während bis dahin, als diese Maschine beschrieben worden, die Pumpe erst in einer Tiefe von 170 Meter aufgestellt werden konnte.

Die zweite Bemerkung betrifft die bei dieser Maschine angebrachten Vorrichtungen, um zu verhindern, dass das Steuerkolbensystem R, J, K am Ende seines Laufes keinen nachtheiligen Stoss erzeugt. Zu diesem Ende stösst der durch die Stopfbüchse N,N gehende hohle Kolben K mit seiner obern Grundfläche gegen eine aus zwei Theilen bestehende blecherne Büchse u, u', wovon sich der untere mit Pantoffelholz u'' ausgefüllte Theil u' in den obern an einer eisernen Querstange befestigten Theil u hineinschiebt und dadurch einen elastischen Polster bildet. Bei der Abwärtsbewegung dagegen tritt der an der verlängerten Kolbenstange angebrachte Knopf oder Wulst α in das mit Wasser gefüllte Gefäss β und indem dieses daraus nur schwer entweichen kann, bildet es ein solches Hinderniss, dass die Abwärtsbewegung des Kolbens ohne Stoss vernichtet wird.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die den hydraulischen Balancier bildende Wassersäule von 14 M. Höhe auf den Treibkolben von $\cdot 8177 \square^{m\cdot}$ Fläche statt $16000^{k\cdot}$ (als Gewicht des Gestänges) nur einen Druck von $11400^{k\cdot}$ hervorbringt, dass man jedoch wegen der schlechten Beschaffenheit des Gesteins im Schachte, die Maschine nicht tiefer als um diese 14 Meter herabsetzen und gehörig befestigen konnte, und dass dieses Gewicht für den Anfang, als nämlich die Pumpe nur in einer Tiefe von $170^{m\cdot}$ arbeitete, also das Gestänge noch nicht ganz $12000^{k\cdot}$ wog, eine ganz gute Ausgleichung oder Verzögerung in dem herabgehenden Gestänge bewirkte.

Was endlich die Hauptdimensionen dieser Maschine anbelangt, so hat der Treibkolben einen Durchmesser von $1\cdot0287^{m.}$, und bei einem Lauf von $2\cdot3^{m.}$ eine Geschwindigkeit beim Aufwärtsgehen (im belasteten Zustande) von $\cdot3$ und beim Abwärtsgehen (im leeren Zustande) von $\cdot7^{m.}$, so dass eine Pulsation, d. i. ein Auf- und Abgang, binnen 10·9 Secunden vollendet ist, oder per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ solche Pulsationen Statt finden. Die Durchmesser der drei Steuerkolben R, J, K sind der Reihe nach ·369, ·404, ·322 Meter und wiegen zusammen $390^{k.}$

Der kleine Cylinder ei hat im lichten Durchmesser $\cdot05^{m.}$ Die Fallröhren haben (da man schon vorhandene Röhren benützen wollte) eine innere Weite von nur $\cdot38^{m.}$ Der Kolben der Pumpe hat einen Durchmesser von $\cdot45^{m.}$ und denselben Hub wie der Treibkolben. Die Saug- und unteren Steigröhren haben eine lichte Weite von $\cdot275^{m.}$, die obere Tour dieser Steigröhren hat dieselbe Weite wie die Fallröhren. In Bezug auf die Wanddicke bilden sie 5 Reihen und zwar von unten nach oben, nach der abnehmenden Progression der Zahlen 56, 48, 40, 32, 24. Die Fallröhren haben eine Wanddicke von $\cdot027^{m.}$

Das wirksame Gefälle beträgt, da dieses vom obern Reservoir bis zum Abflusscanal zu rechnen ist, 60 Meter. Endlich erfordert jeder Hub des Treibkolbens, deren per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ Statt finden, 1·88 Cubikmeter Kraftwasser, was per Secunde $\cdot173^{c.m.}$ ausmacht, so wie noch ausserdem jeder Kolbenhub $\cdot33^{c.m.}$ Einspritzwasser für den ringförmigen Raum w ober dem Kolben J erfordert, was per Secunde nahe $\cdot03^{c.m.}$ beträgt.

Die Maschine, so wie die Pumpe wurde dafür berechnet und construirt, um per Minute ein Wasserquantum von 1·792 Cubikmeter 230 Meter hoch zu heben.

282. Um nun auch, ohne in eine unnütze weitläufige Theorie einzugehen, diese Wassersäulenmaschine zu berechnen, sei H die Gefällshöhe vom Wasserspiegel des Reservoirs bis zum mittlern Stand des Treibkolbens gemessen, $\mathfrak{H}$ die Höhe, auf welche das Grubenwasser gehoben werden soll, h' die Höhe des Wasserspiegels im Reservoir über dem Abzugscanal und h die Höhe dieses Canals über dem Steuerungskolben R bei seinem mittlern Stande. Ferner sei D der Durchmesser und F die Querschnittsfläche des Treibkolbens, D' und F' der Durchmesser und die Fläche des Pumpenkolbens, d, d', d'' und f, f', f'' seien der Reihe nach die Durchmesser und Querschnittsflächen der Steuerungskolben R, J, K; Q das per Secunde nöthige Kraft- oder Aufschlagwasser, q das per Secunde zu hebende Grubenwasser, v die mittlere Geschwindigkeit des Treib- und Pumpenkolbens beim Aufwärtsgehen, v' jene beim Niedergehen, p das Gewicht eines laufenden Fusses des Gestänges, so wie endlich γ das Gewicht eines Kubikfuss Wassers, wenn nämlich alle Dimensionen in Fussen und die Gewichte in Pfunden ausgedrückt werden, so finden sofort folgende Relationen Statt.

Beim Aufgange des Treibkolbens, wenn man die in der Pumpe, so wie in den Fall- und Steigröhren Statt findenden hydraulischen Widerstände zu $\frac{1}{5}$ oder 20 Procent des statischen Druckes annimmt (§. 446):

$$\gamma F H (1 - \tfrac{1}{5}) = \gamma F' \mathfrak{H} (1 + \tfrac{1}{5}) + (\mathfrak{H} - h) p \ldots (a);$$

beim Niedergange dieses Kolbens, wobei das todte unterm Kolben befindliche Wasser wieder auf die Höhe h gehoben wird:

$$\gamma F h (1 + \tfrac{1}{5}) = (\mathfrak{H} - h) p \ldots (b).$$

Aus dieser Relation (b) folgt:

$$F = \tfrac{5}{6} \frac{p}{\gamma} \frac{(\mathfrak{H} - h)}{h} \ldots (1)$$

und wenn man diesen Werth für F in die Relation (a) substituirt und reducirt:

$$\tfrac{2}{3} p H \frac{\mathfrak{H} - h}{h} = \tfrac{6}{5} \gamma F' \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} - h) p \ldots (2).$$

Dabei ist noch, wie leicht zu sehen:

$$h + h' = H \ldots (3) \quad \text{und} \quad D = 1{\cdot}128 \sqrt{F} \ldots (4).$$

Bezeichnet man ferner noch den Reibungswiderstand der drei Steuerungskolben R, J, K mit R und ihr Gewicht mit G, so ist, beim Hinaufgehen dieser Kolben:

$$\gamma f h + \gamma f' H = \gamma f H + \gamma (f' - f'') h + R + G \ldots (c)$$

und beim Niedergange derselben:

$$\gamma (f' - f'') H + \gamma f H + G = \gamma f' H + \gamma f h + R \ldots (d).$$

Aus dieser letztern Relation erhält man:

$$f'' = \frac{G - R}{\gamma H} + f\left(1 - \frac{h}{H}\right) \ldots (5)$$

und wenn man diesen Werth in (c) substituirt und dann f' bestimmt:

$$f' = \frac{G + R}{\gamma (H - h)} - \frac{(G - R) h}{\gamma (H - h) H} + f\left(1 - \frac{h}{H}\right) \ldots (6);$$

dabei wird f, d. i. der Querschnitt des Steuerungskolbens R, willkürlich angenommen.

Die Durchmesser dieser Kolben sind:

$$d = 1{\cdot}128 \sqrt{f}, \; d' = 1{\cdot}128 \sqrt{f'}, \; d'' = 1{\cdot}128 \sqrt{f''} \ldots (7).$$

Endlich ist, auf die Pumpe übergehend, wie man leicht findet:

$$F' = \frac{v + v'}{v v'} q \quad \text{und} \quad D' = 1{\cdot}128 \sqrt{F'},$$

oder wenn man substituirt:

$$D' = 1{\cdot}128 \sqrt{\left(\frac{v+v'}{vv'}\, q\right)} \ldots (8).$$

Beispiel. Es sei, um uns wenigstens annähernd an die bei der Huelgoatschen Maschine vorkommenden Zahlen zu halten, die per Secunde auf die Höhe von 730 Fuss zu hebende Wassermenge = 1 Kubikfuss, die Höhe des Wasser-Reservoirs über dem Ausflusscanal (als wirksame Gefällshöhe) = 190 Fuss, die mittlere Geschwindigkeit des Treib- und Pumpenkolbens beim Aufwärtssteigen 1 und beim leeren Niedergehen 2 Fuss, ferner das Gewicht der drei Steuerungskolben R, J, K 600, so wie ihr Reibungswiderstand, schätzungsweise angenommen, 400 Pfund, und endlich wiege der laufende Fuss des Pumpengestänges 40 Pfund; so ist $q = 1$, $\mathfrak{H} = 730$, $h' = 190$, $v = 1$, $v' = 2$, $G = 600$, $R = 400$, $p = 40$ und $\gamma = 56{\cdot}5$ zu setzen.

Aus den Relationen (2) und (3) folgt $h = 42$ und damit aus (1) und (4) $D = 3\frac{1}{3}$ und $F = 8{\cdot}7$, so wie aus (3) $H = 232$.

Nimmt man $f = \frac{1}{7} F = 1{\cdot}243$, so wird $d = 1{\cdot}25$ und aus den Relationen (6) und (5) $f' = 1{\cdot}1078$ und $f'' = 1{\cdot}0196$, folglich nach (7) $d' = 1{\cdot}19$ und $d'' = 1{\cdot}14$.

Ferner erhält man aus (8) $D' = 1{\cdot}4$, so, dass also $F' = 1{\cdot}54$ wird.

Da der Kolbenhub auf 7·28 Fuss regulirt ist, so braucht derselbe zum Aufsteigen 7·28 und zum Niedergehen 3·64, folglich zu einem Auf- und Abgang 10·92 Secunden, so, dass also per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ Kolbenhübe Statt finden. Mit diesen Werthen ist die per Minute gehobene theoretische Wassermenge $= 1{\cdot}54 \times 7{\cdot}28 \times 5{\cdot}5 = 61{\cdot}7$ Kubikfuss, folglich, da nach den von Juncker an der dortigen Pumpe vorgenommenen Versuchen, die wirkliche Wassermenge nur um $\frac{1}{30}$ oder $3\frac{1}{3}$ Procent geringer als die theoretische ist, die wirkliche Wassermenge $= 61{\cdot}7 - 2{\cdot}05 = 59{\cdot}65$ Kubikfuss, so, dass der Abgang auf die verlangte Zahl 60 leicht durch die oben erwähnte Regulirung in der Kolbengeschwindigkeit ersetzt werden kann.

Die per Secunde consumirte Wassermenge beträgt für den Treibkolben nahe 5·8 und für den ringförmigen Raum w über dem Gegenkolben J, ·6, also zusammen 6·4 Kubikfuss. Die absolute Wirkungsgrösse des Kraftwassers ist daher $E_a = 6{\cdot}4 \times 190 \times 56{\cdot}5 = 68704^{F.\ Pf.}$, während der Nutzeffect $E_n = 1 \times 730 \times 56{\cdot}5 = 41245^{F.\ Pf.}$, nämlich 60 Procent von dieser dynamischen Kraft beträgt.

Anmerkung. In der Wirklichkeit ist, wie bereits oben angeführt, $D = 3{\cdot}254$, $D' = 1{\cdot}423$, $d = 1{\cdot}167$, $d' = 1{\cdot}277$ und $d'' = 1{\cdot}018$, so, dass also dabei in der That der Gegenkolben J so, als ob die 42 Fuss hohe Wassersäule (die dort 44 Fuss beträgt), welche den hydraulischen Balancier bildet, nicht vorhanden wäre, etwas grösser als der Steuerungskolben R ist, während hier in diesem Beispiele das Gegentheil Statt findet.

Schliesslich ersieht man aus den obigen Relationen (5) und (6) leicht, dass eine Aenderung in der Annahme der Reibung R, selbst von 400 auf 200 oder 600 fast gar keinen merkbaren Einfluss auf die Bestimmung der

Kolbendurchmesser d', d'' hat, so, dass man also in dieser Annahme nichts weniger als sehr rigoros sein darf.

Pumpen.

(§. 442.)

283. Nachdem wir die detaillirten Entwickelungen über die verschiedenen Pumpensysteme bereits im Compendium von §. 445 bis 456 im Wesentlichen gegeben haben, so sollen hier nur ganz kurz die Resultate derselben, wie sie sich für den practischen Gebrauch am besten eignen, angeführt und übersichtlich zusammengestellt werden.

Bezeichnet h die Höhe, auf welche das Wasser durch das Pumpwerk gehoben, M die Wassermenge in Kubikfuss, welche per Secunde gefördert werden soll, D den Durchmesser des Kolbens, v dessen mittlere Geschwindigkeit, l die gesammte Länge der Röhren, welche das Wasser durchläuft, d den Durchmesser derselben, u die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren, m einen Erfahrungskoefficienten, welcher von der mehr oder weniger vollkommenen Ausführung der Pumpe abhängt, und endlich E_n den Nutzeffect, welchen die Pumpe entwickeln oder besitzen muss; so ist für einen doppelt wirkenden, oder zwei einfach wirkende Pumpencylinder $M = m\frac{D^2\pi}{4}v$ und daraus:

$$D = 2\sqrt{\frac{M}{m\pi v}} \ldots (1).$$

Eben so folgt für einen bloss einfach wirkenden Cylinder aus $2M = m\frac{D^2\pi}{4}v$ sofort:

$$D = 2{\cdot}828\sqrt{\frac{M}{m\pi v}} \ldots (2).$$

Was dabei den Erfahrungscoefficienten m betrifft, so ist dieser für sehr vollkommen ausgeführte Pumpen, wie z. B. bei den Reichenbach'schen in Baiern und der Juncker'schen in dem Bergwerk von Huelgoat (siehe das vorige Beispiel), beinahe gleich 1, nämlich $m = {\cdot}97$; für etwas weniger vollkommene Pumpen ist $m = {\cdot}9$ und für gewöhnliche $m = {\cdot}8$ zu setzen.

Als mittlere Kolbengeschwindigkeit nimmt man für sorgfältig ausgeführte Pumpen $v = {\cdot}6$ bis ${\cdot}9$ und bei unvollkommener Ausführung $v = {\cdot}8$ bis $1{\cdot}1$ Fuss.

20*

Anmerkung. Eine wesentliche Bedingung einer guten Pumpe liegt schon deshalb in einem langsamen Kolbengange, weil es dadurch leichter möglich wird, die Bewegung von der Ruhe aus nur allmälig beginnen und eben so wieder aufhören zu lassen, und da an dieser Bewegung sowohl die zu hebende Wassersäule, als auch die Ventile Theil nehmen, so geht weder lebendige Kraft, noch auch durch die Ventile Wasser verloren, weil sich diese, bevor der Kolben vollständig zur Ruhe kommt und seine Bewegung (eine sogenannte Sinusversus-Bewegung) wechselt, schon ganz nahe an ihren Sitzen befinden und dann augenblicklich schliessen, wie dies z. B. bei der oben erwähnten Juncker'schen Pumpe (welche unter einem Drucke von nahe 23 Atmosphären arbeitet) wirklich der Fall ist. Dazu ist jedoch eine besonders gute Liederung des Kolbens erforderlich, weil dieser sonst um so mehr Wasser durchlässt oder verliert, je langsamer er sich bewegt. Aus diesem Grunde gibt man dem Kolben bei einer unvollkommenen Herstellung der Pumpe eine grössere Geschwindigkeit als bei einer vollkommenen Ausführung.

Aus demselben Grunde ist auch (damit das Kolbenspiel nicht zu oft wechseln darf) ein langer Kolbenschub vortheilhafter als ein kurzer. Dort, wo die Anlagskosten, wie z. B. bei den Bergwerkspumpen, weniger in Anschlag kommen, um den zu einem langen Hub kostspieligeren Bewegungs-Mechanismus herzustellen, nimmt man den Kolbenhub $\lambda = 3$, 4, ja selbst bis $5D$, während man für gewöhnliche Pumpen $\lambda = 2D$ und für sehr compendiöse wohl auch nur $\lambda = D$ setzt.

284. Bezeichnet man die Höhe der Wassersäule, welche dem Reibungswiderstande des Wassers in den Röhren entspricht, wieder durch z, so ist (Nr. **215**, Relat. 2):

$$z = \frac{4l}{d}(\alpha u + \beta u^2) \ldots (3)$$

und dabei $\alpha = \cdot 0000188$, $\beta = \cdot 0001083$.

Um nun den zum Betriebe eines Pumpwerkes nöthigen Effect einfach auszudrücken, kann man drei Kategorien annehmen und setzen:

für sehr vollkommene Pumpwerke $E_n = 1{\cdot}1 \gamma M(h + z) \ldots (4)$,

für gute Pumpwerke . . . . . . $E_n = 1{\cdot}2 \gamma M(h + z) \ldots (5)$,

für gewöhnliche Pumpwerke . . . $E_n = 1{\cdot}25 \gamma M(h + z) \ldots (6)$.

Es bezeichnet nämlich E_n den Nutzeffect in Fusspfund, welchen der Motor entwickeln oder besitzen muss, um das Pumpwerk zu betreiben; dabei muss natürlich auch h und z in Fussen und M in Kubikfuss ausgedrückt und $\gamma = 56{\cdot}5$ gesetzt werden.

Anmerkung. Für gewöhnliche Pumpen ist die Röhrenlänge l, folglich auch der Röhrenwiderstand so gering, dass man die Widerstandshöhe z vernachlässigen oder als Null ansehen kann.

Den lichten Durchmesser der Ventile, so wie der Saug- und Steigröhre nimmt man in der Regel $= \frac{1}{2} D$, dadurch wird die Geschwindigkeit des Wassers in diesen Röhren 4 Mal so gross als im Kolbenrohr oder $u = 4v$, folglich (nach der obigen Annahme für v) von $2\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Fuss.

Beispiel. Es soll für eine Fabrik ein Pumpwerk angeordnet werden, welches per Secunde eine Wassermenge von 1 (0·034) Kubikfuss auf eine Höhe von 30 Fuss fördert; dabei soll dasselbe durch ein Wasserrad betrieben werden, wofür ein Gefäll von 16 Fuss disponibel ist. 9·4

5·05

Wählt man hierzu ein Pumpwerk von zwei einfach wirkenden Cylindern und setzt, um ganz sicher zu gehen, die Wassermenge, welche die Pumpe liefert, um $\frac{1}{5}$ kleiner als das vom Kolben zurückgelegte Volumen, so ist $\frac{D^2 \pi}{4} v = (1 + \frac{1}{5}) M$ und daraus wegen $M = 1$ und wenn man auch $v = 1$ nimmt, sofort $D = 1{\cdot}24$ Fuss. Für den Durchmesser der Saug- und Steigröhren nehmen wir $d = \frac{1}{2} D = {\cdot}62$ Fuss, und eben so weit machen wir auch die Ventile im lichten Durchmesser. Der Nutzeffect E_n, welchen das Wasserrad für den Betrieb dieser Pumpe besitzen muss, kann nach der obigen Formel (5) ausgedrückt werden, so, dass man hat:

$$E_n = 1{\cdot}2 \gamma M (h + z).$$

Nun ist wegen $u = 4v = 4$ nach der Relation (3) die Widerstandshöhe $z = 193{\cdot}5 \times {\cdot}00181 = {\cdot}34$. Mit diesem und den übrigen Werthen ist nun, wenn man substituirt:

$$E_n = 1{\cdot}2 \times 56{\cdot}5 \times 1 \times 30{\cdot}34 = 2057^{F.\ Pf.} = \frac{2057}{430} = 4{\cdot}8,$$

d. i. sehr nahe 5 Pferdekräfte.

Wählen wir nun zum Betriebe dieser Pumpe bei dem vorhandenen Gefälle von 16 Fuss ein oberschlächtiges Wasserrad, und suchen nach dem Grundsatze, dass, wenn der Receptor oder aufnehmende Theil (§. 303) seine vortheilhafteste Geschwindigkeit besitzt, auch das Werkzeug oder der arbeitende Theil die zweckmässigste Geschwindigkeit annehmen soll, den geometrischen Zusammenhang oder Bewegungs-Mechanismus am einfachsten herzustellen, indem wir vorläufig nur versuchsweise die Umfangsgeschwindigkeit des Wasserrades nach Nr. **265** (Anmerk.) $v = 4{\cdot}8$, folglich die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt, $V = 2v = 9{\cdot}6$ Fuss setzen. Nach derselben Nr. ist dann der Halbmesser des Rades:

$$R = \frac{1}{2}\left(h - \frac{V^2}{2g}\right) = \frac{1}{2} \times (16 - 1{\cdot}487) = 7{\cdot}25 \text{ Fuss.}$$

Die Anzahl der Umdrehungen des Rades per Minute ist:

$$n = \frac{60}{2\pi} \frac{v}{R} = 9{\cdot}548 \times \frac{4{\cdot}8}{7{\cdot}25} = 6{\cdot}32.$$

Ist nun λ der noch zu bestimmende Kolbenschub bei der Pumpe und v die Kolbengeschwindigkeit, so ist

$$2n\lambda = 60v \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{30v}{n},$$

also für $v = 1$ und $n = 6{\cdot}32$ sofort $\lambda = 4{\cdot}75$ Fuss; ein Kolbenschub, welcher uns nicht ganz convenirt, da er zu gross ist.

Nehmen wir daher, um eine grössere Umdrehungszahl n zu erhalten, die Umfangsgeschwindigkeit des Rades $v = 6$, also $V = 12$ Fuss, so wird $R = \frac{1}{2}(16 - 2{\cdot}322) = 6{\cdot}84$ Fuss und $n = 8{\cdot}36$, folglich der Kolbenschub $\lambda = \frac{30}{8{\cdot}36} = 3{\cdot}6$ Fuss.

Da uns aber auch dieser Kolbenschub für die Fabrikspumpe noch zu gross ist, und wir annehmen, dass an Aufschlagwasser kein Mangel sei, so wollen wir lieber, anstatt von der Kolbengeschwindigkeit per 1 Fuss abzugehen, oder den einfachen Bewegungs-Mechanismus einer mit der Radachse verbundenen Kurbel oder excentrischen Scheibe aufzugeben, von der vortheilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit des Rades in etwas absehen und diese zu 7·5 Fuss annehmen. Dadurch wird, wie vorhin gerechnet:

$$R = 6{\cdot}185, \quad n = 11{\cdot}6 \text{ und } \lambda = 2{\cdot}6 \text{ Fuss},$$

was eine ganz angemessene Grösse ist.

Rechnet man den Nutzeffect des Wasserrades hier blos zu 60 Procent, so muss der **absolute** Effect desselben sein:

$$E_a = \frac{E_n}{{\cdot}60} = \frac{2057}{{\cdot}6} = 3428^{F.\ Pf.} = \frac{3428}{430} = 8 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die per Secunde nöthige **Wassermenge** Q findet man aus der Relation $\gamma Q \times 16 = 3428$, und zwar folgt daraus $Q = 3{\cdot}8$ Kubikfuss.

Die **Dimensionen** des Rades sind nach Nr. **265**, Anmerkung, $\frac{b}{a} = 2{\cdot}25 \sqrt[3]{8} = 4{\cdot}5$, und wenn man den Füllungscoefficienten $m = \frac{1}{3}$ setzt, nahe genug $a = {\cdot}6$ und $b = 2{\cdot}6$ Fuss.

Da die Rechnung die Anzahl der Zellen $\frac{2R\pi}{{\cdot}6 + {\cdot}7a} = 38$ gibt, so kann man, je nachdem man ein System von 4, 6 oder 8 Radarmen wählt, dafür die Zahl 36 oder 40 nehmen.