Zerlegt man nun, um den Seitendruck parallel zur Achse zu erhalten, den auf das Flächenelement $OMm$ stattfindenden Normaldruck d$N$ in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte d$P$, d$P'$, wovon die erstere parallel zur Achse $OC$, die andere also darauf senkrecht ist; so hat man, die Projection des Flächenelementes $OMm$ auf die Grundfläche des Kegels, d. i. $MCm = \mathrm{d}F$ gesetzt, nach dem erwähnten Satz in Nr. **176.**:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}F\tfrac{2}{3}h\gamma,\ \text{folglich}\ P = \tfrac{2}{3}Fh\gamma = \tfrac{2}{3}r^2\pi h\gamma$$

(was auch unmittelbar aus der Relat. ($m$) folgt, wenn man $F$ statt $O$ setzt) als Resultirende aller zu $OC$ parallelen Kräfte, während sich die darauf senkrechten, in der verlängerten Kreisebene $aob$ liegenden Kräfte ringsherum aufheben.

Der Druck auf den Boden des Kegels ist gleich $r^2\pi.h\gamma$, und da der vorige Druck $P$ diesem entgegengesetzt ist, so bleibt noch ein Druck nach abwärts (normal auf die horizontale Ebene, worauf das Gefäss steht) $= r^2\pi h\gamma - \frac{2}{3}r^2\pi h\gamma = \frac{1}{3}r^2\pi h\gamma$, also gleich dem Gewichte des im Gefässe enthaltenen Wassers, wie es sein muss.

Würde man die Mantelfläche von dem Boden lostrennen, so würde der Boden mit der Kraft $r^2\pi h\gamma$ abwärts gedrückt und die Mantelfläche mit der Kraft $\frac{2}{3}r^2\pi h\gamma$ vertical aufwärts gehoben.

Anmerkung. Hat der Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine die Trichterform $ABCD$ (Fig. 89), wobei $AB = 2R$ der grössere, und $ab = 2r$ der kleinere Durchmesser ist und bezeichnet $p$ den von der Wassersäule auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck, so ist der Druck auf die Fläche $AB$ aufwärts $= R^2\pi.p$ und der Seitendruck nach abwärts, welcher von dem auf die Mantelfläche $ABab$ ausgeübten Normaldruck herrührt $= (R^2 - r^2)\pi.p$, so dass also noch nach aufwärts der wirksame Druck

$$P = R^2\pi p - (R^2 - r^2)\pi p = r^2\pi.p$$

übrig bleibt, welcher sofort bloss dem Querschnitt des Cylinders $abCD$ entspricht.

## Mittelpunct des Druckes.

(§. 335.)

**182.** Um den Mittelpunct des Druckes $O$ (Fig. 90) für die von der Curve $aMbma$ umschlossene ebene Fläche zu bestimmen, wenn das Gefäss $CDG$ mit einer schweren Flüssigkeit gefüllt ist, nehme man die horizontale Kante $EF$ des Gefässes zur Achse der statischen Momente und setze, wie in Nr. **179.**, $AP = x$

$PM = Pm = y$, $Pp = \mathrm{d}x$, $Aa = x'$ und $Ab = x''$; so ist der Normaldruck der Flüssigkeit auf das Flächenelement $Mn$, welches um die Tiefe $x\,Sin\,\alpha$ unter dem Spiegel $EG$ liegt: $\mathrm{d}p = 2y\,\mathrm{d}x\,.\,x Sin\,\alpha\,.\,\gamma$ und dessen statisches Moment gegen $EF$: $x\mathrm{d}p = 2\gamma\,Sin\,\alpha\,.\,y x^2 \mathrm{d}x$, folglich die Summe der statischen Momente aller Flächenelemente:

$$M = 2\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x''} y\,x^2\,\mathrm{d}x,$$

wobei die Gleichung $y = f(x)$ der Umfangscurve gegeben sein muss. Ist nun $P$ die Resultirende aus allen den (zu einander parallelen) Normalpressungen, d. i. aus dem Gesammt-Normaldruck auf die betreffende Fläche $aMbma$, nämlich $P = 2\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x''} y\,x\,\mathrm{d}x$, und $AO = X$ die Abscisse ihres Angriffspunctes, d. i. der Mittelpunct des Druckes; so ist auch $M = PX$, oder wenn man für $M$ und $P$ die vorigen Werthe substituirt und abkürzt:

$$X = \frac{\int_{x'}^{x''} y\,x^2\,\mathrm{d}x}{\int_{x'}^{x''} y\,x\,\mathrm{d}x} \quad (1)$$

wodurch dieser Punct $O$, da er bei der gemachten Voraussetzung, dass die betreffende Fläche durch die Abscissenachse $AB$ in zwei symmetrische Theile getheilt wird, in der Geraden $AB$ liegt, vollkommen bestimmt ist.

Anmerkung. Lässt sich die Fläche durch die Gerade $AB$ nicht in zwei symmetrische Theile theilen, so muss man noch eine zweite, am einfachsten mit der $AB$ parallele Momentenachse annehmen und auf dieselbe Weise den Abstand $Y$ des Punctes $O$ von dieser Achse bestimmen.

**183.** Ist, als einfachster Fall, die Fläche ein Rechteck, dessen beide horizontal liegende Seiten $= b$ und die beiden anderen (parallel mit $AB$) $= a$ sind und wofür $Aa = d$, folglich $Ab = a + d$ ist; so hat man nach der vorigen Gleichung (1), wegen $y = \frac{1}{2}b$ sofort:

$$X = \frac{\frac{1}{2}b \int_{d}^{a+d} x^2\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}b \int_{d}^{a+d} x\,\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}\,\frac{(a+d)^3 - d^3}{(a+d)^2 - d^2}$$

d. i.

$$X = \frac{2}{3}\,\frac{a^2 + 3ad + 3d^2}{a + 2d} \ldots (m)$$

(vergl. Gleich. 1 in §. 335).

Liegt die obere Kante im Wasserspiegel, so ist wegen $d = 0$ sofort: $X = \frac{2}{3}a$.

**184.** Ist die Fläche ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel und Höhe $h$ in der Geraden $AB$ liegt, so hat man, wenn die Basis des Dreieckes $= 2b$ ist, wegen $x : y = h : b$, also $y = \frac{b}{h}x$ sofort:

$$X = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x}{\frac{b}{h}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x} = \tfrac{3}{4}h.$$

Für die umgekehrte Lage, wenn nämlich die Basis im Wasserspiegel liegt, ist

$$X = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x\,(h - x)}{\frac{b}{h}\int_0^h x\,\mathrm{d}x\,(h - x)} = \tfrac{1}{2}h.$$

Anmerkung. Dieselben Ausdrücke gelten auch für ein rechtwinkeliges Dreieck $CAB$ (Fig. 91 und 91'), dessen Cathete $AC = h$ parallel mit der Geraden $AB$ (Fig. 90) liegt. Es ist nämlich im ersteren Falle, wenn die Spitze $C$ (Fig. 91) im Wasserspiegel liegt, $CP = \frac{3}{4}CA$ und im letzteren (Fig. 91') $CP = \frac{1}{2}AC$.

Da ferner in beiden Fällen der gesuchte Punct $O$ in der Halbirungslinie $CB$ liegen muss, so ist in diesen beiden Fällen beziehungsweise $PO = \frac{3}{8}AB$ und $PO = \frac{1}{4}AB$.

**185.** Ist endlich die betreffende Fläche ein Kreis vom Halbmesser $r$, dessen Mittelpunct von der Achse $EF$ um $a$ absteht, und verwechselt man für dieses Beispiel zur Vereinfachung der Rechnung die beiden Coordinatenachsen, setzt nämlich (Fig. 92) $AP = Cp = x$ und $pM = pm = y$; so ist $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und der Druck auf das Flächenelement $Mn$, da dessen Schwerpunct um die Grösse $a\,Sin\,\alpha$ lothrecht unter dem Wasserspiegel liegt, $\mathrm{d}p = 2y\,\mathrm{d}x \,.\, a\,Sin\,\alpha \,.\, \gamma = 2a\gamma\,Sin\,\alpha\,\mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)}$, folglich der Gesammtdruck auf die Kreisfläche:

$$P = 2\int_0^r \mathrm{d}p = 4a\gamma\,Sin\,\alpha\int_0^r \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

oder wegen $\int \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^2}{2}\,arc\,Sin\frac{x}{r}$,

folglich $\int_0^r \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$ auch $P = r^2\pi\gamma a\,Sin\,\alpha$ (wie diess auch nach dem Satze in Nr. **180** sein muss).

Um ferner das statische Moment $M$ dieses Druckes zu finden, hat man für den Abstand $Po$ des Mittelpunctes des Druckes des unendlich schmalen Rechteckes $Mn$ nach Nr. **183.** Gleichung $(m)$, in welcher $d = a - y$ und $a = 2y$ zu setzen ist, $Po = a + \frac{1}{3a} y^2$, folglich das statische Moment des auf dieses Element ausgeübten Druckes:

$$Po \,.\, \mathrm{d}p = \left(a + \frac{1}{3a} y^2\right) 2\, a \gamma \, Sin\, \alpha \; y \, \mathrm{d}x$$
$$= 2 \gamma a^2 \, Sin\, \alpha \; y \, \mathrm{d}x + \tfrac{2}{3} \gamma \, Sin\, \alpha \; y^3 \, \mathrm{d}x.$$

Das gesuchte Moment ist daher:

$$M = 2 \gamma a^2 Sin\, \alpha \,.\, 2 \int_0^r \mathrm{d}x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{2}{3} \gamma \, Sin\, \alpha \,.\, 2 \int_0^r \mathrm{d}x \,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder wegen $\int_0^r \mathrm{d}x \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^r \mathrm{d}x \,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8} r^4 \frac{\pi}{2}$ *) auch:

$$M = \gamma r^2 \pi \, Sin\, \alpha \,(a^2 + \tfrac{1}{4} r^2).$$

Da nun für's Gleichgewicht $PX = M$, also $X = \frac{M}{P}$ ist, so erhält man, wenn für $M$ und $P$ die Werthe gesetzt werden, sofort:

$$X = \frac{\gamma r^2 \pi \, Sin\, \alpha \,(a^2 + \frac{1}{4} r^2)}{\gamma r^2 \pi \, a \, Sin\, \alpha} = a + \frac{r^2}{4a} = \frac{4a^2 + r^2}{4a}.$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so ist wegen $a = r$ sofort: $X = \frac{5}{4} r$, während der Schwerpunct des Kreises nur um $\frac{4}{4} r$ unter dem Wasserspiegel liegt (vergl. §. 337).

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 817 und §. 819, 2.):

$$\int \mathrm{d}x \,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{4} \left(\tfrac{5}{2} r^2 - x^2\right) \sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{3}{8} r^4 \, arc\, Sin \frac{x}{r}.$$