

$$P = 4\gamma \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^r dx (r^2 - x^2) = \gamma \pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3 \pi \gamma,$$

also der gesuchte Druck, wie es sein soll, gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit.

Bildet diese Kugelschale die Bodenfläche eines senkrechten Cylinders von demselben Halbmesser r und reicht die Flüssigkeit bis auf die Höhe h über der Kreisfläche $ADA'E$, so kommt zu dem vorigen Drucke noch jener $r^2 \pi h \gamma$ hinzu, so dass der Gesamtdruck dann $= (\frac{2}{3} r^3 \pi + r^2 \pi h) \gamma$ gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit ist, wie es sich wohl von selbst versteht.

Seitendruck.

(§. 333.)

179. Es sei auf der schiefen Wand DE (Fig. 87) des bis auf die Höhe AB mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten prismatischen Gefässes die krumme Linie $aMbm$ gezeichnet und der Druck der Flüssigkeit auf die von dieser Curve begrenzte ebene Fläche zu bestimmen.

Legt man durch den Punct A eine verticale Ebene AJ senkrecht auf die Ebene DE , zählt auf der dadurch entstehenden Durchschnittslinie AL von A aus die Abscissen und nimmt darauf senkrecht die rechtwinkligen Ordinaten der geschlossenen Curve, welche also horizontal sein werden, setzt nämlich für einen beliebigen Punct M der Curve, welche wir der grösseren Einfachheit wegen gegen ab als symmetrisch voraussetzen wollen, $AP = x$ und $PM = Pm = y$, zieht ferner in der Entfernung $Pp = dx$ eine zweite Ordinate, so ist die von diesen beiden Ordinaten eingeschlossene unendlich schmale Fläche $df = 2y dx$ und es liegen alle ihre Puncte um die Tiefe $NP = z$ unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so dass der Druck auf diesen schmalen Streifen (Nr. 175.) durch $dP = \gamma z df = 2\gamma z y dx$, oder wenn der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ ist, wegen $z = x \text{ Sin } \alpha$, durch

$$dP = 2\gamma \text{ Sin } \alpha y x dx$$

ausgedrückt wird, wenn wieder γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Grenzen $Aa = x$ und $Ab = x''$ setzt, sofort durch Integration der gesuchte Normaldruck auf die von der Curve $aMbm$ eingeschlossene ebene Fläche:

$$P = 2\gamma \operatorname{Sin} \alpha \int_x^{x''} y x dx \dots (1),$$

wobei die Gleichung der Umfangscurve $y = f(x)$ gegeben sein muss.

180. Ist X die Abscisse des Schwerpunktes der von der angenommenen Curve begrenzten Fläche F , also $X \operatorname{Sin} \alpha = h$ der Abstand dieses Punctes vom Wasserspiegel, so ist (Nr. **25.**):

$$FX \operatorname{Sin} \alpha = 2 \operatorname{Sin} \alpha \int_x^{x''} y x dx,$$

folglich auch: $P = \gamma FX \operatorname{Sin} \alpha = \gamma Fh \dots (2);$

es ist also der auf die Fläche ausgeübte Seitendruck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Anmerkung. Ein Schutzbret oder eine Spundwand hat also, ohne Rücksicht darauf, ob viel oder wenig Wasser anliegt, immer denselben Druck auszuhalten, so lange sich der Abstand des Schwerpunktes dieser Wand vom Wasserspiegel nicht ändert.

181. Um auch eine Anwendung des in Nr. **176.** entwickelten Satzes für den Druck auf krumme Flächen bei dem Seitendruck zu zeigen, wollen wir annehmen, dass der hohle Kegel $ABMO$ (Fig. 88) ganz mit Wasser gefüllt sei und den dadurch entstehenden Druck im Gefässe bestimmen.

Denkt man sich den Umfang der Grundfläche in unendlich viele gleiche Theile wie $Mm = ds$ getheilt und die Theilungspuncte mit der Spitze des Kegels durch gerade Linien verbunden, so hat man die Mantelfläche in unendlich schmale gleichschenkelige Dreiecke zerlegt, wovon jedes die Fläche $\frac{1}{2} l ds$ besitzt, wenn man die Seite oder Kante des Kegels mit l bezeichnet. Ist ferner $OC = h$ die Höhe des Kegels, so liegt der Schwerpunkt o eines solchen Flächenelementes OMm um $\frac{2}{3} h$ unter dem Wasserspiegel, d. i. unter dem Punct O , und es ist daher nach der vorigen Nummer der Druck des Wassers auf dieses Element $dN = \frac{1}{2} l ds \cdot \frac{2}{3} h \gamma = \frac{1}{3} \gamma l h ds$, folglich der Normaldruck auf die gesammte Mantelfläche:

$$N = \frac{1}{3} \gamma l h \int ds = \frac{1}{3} \gamma l h \int_0^{2\pi} r d\alpha = \frac{2}{3} r \pi \gamma l h,$$

oder wenn man die Mantelfläche $= O$ setzt, auch $N = O \cdot \frac{2}{3} h \cdot \gamma \dots (m).$

Zerlegt man nun, um den Seitendruck parallel zur Achse zu erhalten, den auf das Flächenelement OMm stattfindenden Normaldruck dN in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte dP, dP' , wovon die erstere parallel zur Achse OC , die andere also darauf senkrecht ist; so hat man, die Projection des Flächenelementes OMm auf die Grundfläche des Kegels, d. i. $MCm = dF$ gesetzt, nach dem erwähnten Satz in Nr. 176.:

$$dP = dF \frac{2}{3} h \gamma, \text{ folglich } P = \frac{2}{3} F h \gamma = \frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma$$

(was auch unmittelbar aus der Relat. (m) folgt, wenn man F statt O setzt) als Resultirende aller zu OC parallelen Kräfte, während sich die darauf senkrechten, in der verlängerten Kreisebene aob liegenden Kräfte ringsherum aufheben.

Der Druck auf den Boden des Kegels ist gleich $r^2 \pi \cdot h \gamma$, und da der vorige Druck P diesem entgegengesetzt ist, so bleibt noch ein Druck nach abwärts (normal auf die horizontale Ebene, worauf das Gefäss steht) $= r^2 \pi h \gamma - \frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma = \frac{1}{3} r^2 \pi h \gamma$, also gleich dem Gewichte des im Gefässe enthaltenen Wassers, wie es sein muss.

Würde man die Mantelfläche von dem Boden lostrennen, so würde der Boden mit der Kraft $r^2 \pi h \gamma$ abwärts gedrückt und die Mantelfläche mit der Kraft $\frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma$ vertical aufwärts gehoben.

Anmerkung. Hat der Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine die Trichterform $ABCD$ (Fig. 89), wobei $AB = 2R$ der grössere, und $ab = 2r$ der kleinere Durchmesser ist und bezeichnet p den von der Wassersäule auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck, so ist der Druck auf die Fläche AB aufwärts $= R^2 \pi \cdot p$ und der Seitendruck nach abwärts, welcher von dem auf die Mantelfläche $ABab$ ausgeübten Normaldruck herrührt $= (R^2 - r^2) \pi \cdot p$, so dass also noch nach aufwärts der wirksame Druck

$$P = R^2 \pi p - (R^2 - r^2) \pi p = r^2 \pi \cdot p$$

übrig bleibt, welcher sofort bloss dem Querschnitt des Cylinders $abcd$ entspricht.

Mittelpunct des Druckes.

(§. 335.)

182. Um den Mittelpunct des Druckes O (Fig. 90) für die von der Curve $aMbma$ umschlossene ebene Fläche zu bestimmen, wenn das Gefäss CDG mit einer schweren Flüssigkeit gefüllt ist, nehme man die horizontale Kante EF des Gefässes zur Achse der statischen Momente und setze, wie in Nr. 179., $AP = x$