wodurch (Comp. §. 557) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ wird, so folgt $C = r^2$, mithin wird die vorige Integral-Gleichung, wenn man für C diesen Werth substituirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welches sofort (Comp. §. 604) die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser r ist. Die flüssige Masse bildet also in diesem Falle eine Kugel, deren Mittelpunct der genannte feste Anziehungspunct ist; zugleich sind die sämmtlichen Niveauschichten concentrische Kugelflächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefässes.

(§. 332.)

175. Es befinde sich in dem oben offenen Gefässe CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal sein soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB, so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. **170**.), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendikulär auf die Richtung der Schwere sein und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch ausserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegende Schichte mn gleich p und ist ϱ die constante Dichte der Flüssigkeit, sowie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. **168**. (wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$) sofort $dp = \varrho g dz$, und wenn man integrirt:

$$p = \varrho g z + q,$$

wobei die Constante q den äusseren auf die Oberfläche AB stattfindenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefässes, sowie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn der grösseren Einfachheit wegen hier ganz auslassen oder Null setzen, wodurch die vorige Gleichung in $p = \varrho g z$ übergeht.

Ist nun die Bodenfläche $= F$, ihr Abstand von der Oberfläche $AB = h$, sowie der Druck auf den Boden $= P$, so folgt aus dieser Gleichung wegen $z = h$, sofort:

$$P = pF = \varrho g F h \ldots (m),$$

woraus also ersichtlich ist, dass der auf den horizontalen Boden ausgeübte Druck, ohne Rücksicht auf die Form des Gefässes (es mag gleich weit, oder nach aufwärts erweitert oder verengt sein), gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitsprisma oder Cylinders, welcher F zur Grundfläche und h zur Höhe hat, dessen Volumen und Masse also beziehungsweise $V = Fh$ und $M = \varrho F h$ ist. (Da hier g das Gewicht der Masseneinheit bezeichnet, so ist §. 35, Anmerk. $Mg = P$ das Gewicht der Masse M.)

Anmerkung. Befinden sich in einem Gefässe mehrere Flüssigkeiten eine über der anderen, so ist es für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend, dass die Niveau- oder Separationsflächen zwischen zwei aufeinander folgenden Flüssigkeiten (Nr. **173**.) horizontal seien, weil in diesem Falle jede über einer anderen stehende Flüssigkeit auf alle Puncte ihrer Grundfläche einen constanten Druck ausübt, welcher also nach der oben gemachten Bemerkung das Gleichgewicht der unter ihr liegenden Flüssigkeit nicht stören kann.

Giesst man nun in das vorige Gefäss CE (Fig. 85) über die Flüssigkeit $ABCD$ eine neue, von der Dichte ϱ', deren obere Fläche $A'B'$ wieder horizontal ist und über der Schichte AB den Abstand h' hat, so übt diese Flüssigkeit auf die Schichte $AB = F'$, als ihre Basis nach der vorigen Gleichung (m), den Druck $P' = \varrho' g F' h'$ aus, welcher sofort durch die untere Flüssigkeit auf die Bodenfläche F des Gefässes nach §. 330 gleichmässig fortgepflanzt wird und dadurch auf diesen den Druck $\varrho' g F h'$ hervorbringt; der von beiden Flüssigkeiten auf die Bodenfläche ausgeübte Druck ist daher $P + P' = \varrho g F h + \varrho' g F h' = g F (\varrho h + \varrho' h')$.

Auf dieselbe Weise findet man, dass, wenn über diese zweite noch eine dritte Flüssigkeit von der Dichte ϱ'' bis $A''B''$ gegossen wird und diese Schichte $A''B''$, welche von der vorigen $A'B'$ um h'' abstehen mag, wieder horizontal steht, dadurch erstens das Gleichgewicht nicht gestört wird und dann der Gesammtdruck auf den Boden des Gefässes:

$$= (\varrho h + \varrho' h' + \varrho'' h'') g F \text{ ist.}$$

Fährt man so fort, so zeigt sich, dass, wenn beliebig viele übereinander befindliche Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, welche jedoch keine chemische Wirkung aufeinander ausüben dürfen, und wobei sich immer die specifisch leichtere über die schwerere lagern wird, in einem Gefässe im Gleichgewichte stehen, der Druck auf die horizontale Bodenfläche lediglich von der Grösse dieser Fläche, von der Höhe der einzelnen Flüssigkeitsschichten und von ihren Dichtigkeiten abhängt. Da dieser Satz auch noch stattfindet, wenn diese horizontalen Schichten unendlich dünn sind, so gilt er auch für den Fall, dass sich die Dichte der Flüssigkeit nach verticaler Richtung continuirlich und gleichmässig ändert, wie diess bei compressiblen Flüssigkeiten der Fall ist. Auch gilt dieser Satz noch, wenn mit der Dichte die Schwere von Schichte zu Schichte variirt.

176. Wird der Boden des Gefässes durch keine Ebene, sondern durch irgend eine krumme Fläche gebildet, so seien, um den Normaldruck auf denselben zu bestimmen, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes M (Fig. 86), sowie w das demselben Puncte entsprechende Flächenelement dieser krummen Fläche (wobei z wieder in der Richtung der Schwere liegen soll). Bezeichnet ferner p den Druck auf die Flächeneinheit, so ist pw der auf dieses Flächenelement nach der Richtung der Normale NM stattfindende Druck. Bildet diese Normale mit den drei Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ, so sind bekanntlich die Neigungswinkel des Flächenelementes w, d. i. der Tangentialebene im Puncte M mit den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise $= \gamma$, β, α, so dass, wenn das Flächenelement auf die 3 genannten coordinirten Ebenen projicirt und die Projectionen beziehungsweise mit u, u', u'' bezeichnet werden, sofort:

$$u = w \cos\gamma, \quad u' = w \cos\beta, \quad u'' = w \cos\alpha$$

stattfindet.

Multiplicirt man diese Gleichungen mit p, so erhält man:

$$pu = pw \cos\gamma, \quad pu' = pw \cos\beta, \quad pu'' = pw \cos\alpha,$$

woraus hervorgeht, dass die Producte pu, pu', pu'' nichts anderes als die nach den drei Achsen der z, y, x genommenen, also beziehungsweise auf den Ebenen der xy, xz, yz perpendikulären Seitenkräfte des Normaldruckes pw sind, so dass man also überhaupt den aus dem Normaldruck pw abgeleiteten senkrechten Druck auf irgend eine Ebene erhält, wenn man in dem Producte pw das Element der krummen Fläche w mit dessen Projection auf die betreffende Ebene vertauscht.

177. Wird nun auf die Oberfläche der in dem prismatischen oder cylinderischen Gefässe enthaltenen tropfbaren Flüssigkeit ein verticaler Druck P derart ausgeübt, dass davon auf die Flächeneinheit der Druck p (welcher sofort §. 330 auf jedes Flächenelement normal ist) entfällt, und abstrahirt man dabei von dem Gewichte der Flüssigkeit, so ist der Gesammtdruck auf den Boden CDE des Gefässes nach verticaler, d. i. lothrechter Richtung $= pu + pu_1 + pu_2 + \ldots = p(u + u_1 + \ldots) = pF$, wenn nämlich F die Projection der krummen Fläche auf die horizontale Ebene CE ist.

Anmerkung. Stellt dieses Gefäss, welches ein Cylinder vom Halbmesser r sein mag, einen beweglichen Kolben, z. B. einer Wassersäulenmaschine vor, so ist der Wasserdruck auf denselben ganz gleich, er mag durch irgend eine krumme Fläche CDE oder durch die Kreisebene $CE = r^2\pi$ geschlossen sein, indem dieser Druck immer $= pr^2\pi$ ist, wenn p den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet.

178. Rührt der Druck auf die Bodenfläche von dem Gewichte der Flüssigkeit her, so ist p nicht mehr constant, sondern eine Function von z, wenn z die Tiefe des betreffenden Flächenelementes unter dem Spiegel der Flüssigkeit ist, die Ebene der xy also mit diesem Spiegel zusammenfällt. In diesem Falle findet man den lothrechten Druck auf die krumme Fläche, also senkrecht auf die Ebene der xy, sowie auch gegen die beiden übrigen coordinirten Ebenen durch eine doppelte Integration, wie aus dem nachstehenden Beispiele zu ersehen ist.

Beispiel. Es sei z. B. die Kugelschale $AEA'B$ (Fig. 84), welche die Hälfte einer hohlen Kugel vom Halbmesser $CA = CB = r$ bilden, und wobei die grösste Kreisebene $ADA'E$ horizontal liegen und mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Gewicht in der cubischen Einheit $= \gamma$ ist.

Nimmt man AA' zur Achse der x, DE als Achse der y und schneidet die Halbkugel sowohl durch zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen in den Entfernungen $CP = x$ und $x + dx$, als auch durch zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen in den Distanzen $PM = y$ und $y + dy$, so erhält man ein lothrechtes Flüssigkeitsprisma vom Querschnitt $dx\,dy$ und, wenn man $Pp = MM' = z$ setzt, von der Höhe z. Ist P der gesuchte lothrechte Druck auf die Kugelschale, so ist (Nr. **177**.) $d^2P = pu$, und zwar ist hier $p = \gamma z$ und $u = dx\,dy$, daher auch:

$$d^2P = \gamma z\,dx\,dy = \gamma\,dx\,dy\sqrt{\varrho^2 - y^2},$$

wenn man nämlich $PN = PM' = \varrho$ setzt.

Aus dieser Differential-Gleichung erhält man durch eine zweifache Integration:

$$P = 4\gamma \int_0^r dx \int_0^\varrho dy \sqrt{\varrho^2 - y^2}.$$

Nun ist aber $\int_0^\varrho dy\sqrt{\varrho^2 - y^2} = \frac{\pi}{4}\varrho^2 = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$, mithin auch:

$$P = 4\gamma . \frac{\pi}{4}\int_0^r \mathrm{d}x(r^2 - x^2) = \gamma\pi . \tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{2}{3}r^3\pi\gamma,$$

also der gesuchte Druck, wie es sein soll, gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit.

Bildet diese Kugelschale die Bodenfläche eines senkrechten Cylinders von demselben Halbmesser r und reicht die Flüssigkeit bis auf die Höhe h über der Kreisfläche $ADA'E$, so kommt zu dem vorigen Drucke noch jener $r^2\pi h\gamma$ hinzu, so dass der Gesammtdruck dann $= (\frac{2}{3}r^2\pi + r^2\pi h)\gamma$ gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit ist, wie es sich wohl von selbst versteht.

Seitendruck.

(§. 333.)

179. Es sei auf der schiefen Wand DE (Fig. 87) des bis auf die Höhe AB mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten prismatischen Gefässes die krumme Linie $aMbma$ gezeichnet und der Druck der Flüssigkeit auf die von dieser Curve begrenzte ebene Fläche zu bestimmen.

Legt man durch den Punct A eine verticale Ebene AJ senkrecht auf die Ebene DE, zählt auf der dadurch entstehenden Durchschnittslinie AL von A aus die Abscissen und nimmt darauf senkrecht die rechtwinkeligen Ordinaten der geschlossenen Curve, welche also horizontal sein werden, setzt nämlich für einen beliebigen Punct M der Curve, welche wir der grösseren Einfachheit wegen gegen ab als symmetrisch voraussetzen wollen, $AP = x$ und $PM = Pm = y$, zieht ferner in der Entfernung $Pp = \mathrm{d}x$ eine zweite Ordinate, so ist die von diesen beiden Ordinaten eingeschlossene unendlich schmale Fläche $\mathrm{d}f = 2y\,\mathrm{d}x$ und es liegen alle ihre Puncte um die Tiefe $NP = z$ unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so dass der Druck auf diesen schmalen Streifen (Nr. **175.**) durch $\mathrm{d}P = \gamma z \mathrm{d}f = 2\gamma z y\,\mathrm{d}x$, oder wenn der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ ist, wegen $z = x\,Sin\,\alpha$, durch

$$\mathrm{d}P = 2\gamma\,Sin\,\alpha\, yx\,\mathrm{d}x$$

ausgedruckt wird, wenn wieder γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Grenzen $Aa = x$ und $Ab = x''$ setzt, sofort durch Integration der gesuchte Normaldruck auf die von der Curve $aMbm$ eingeschlossene ebene Fläche: