Erster Abschnitt.

Hydrostatik.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten.

(§. 331.)

166. Um die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt zu finden, geht man am einfachsten von der in §. 328 erwähnten Eigenschaft der Flüssigkeiten aus, dass sie den auf ihre Oberfläche ausgeübten Druck nach allen Richtungen hin gleichmässig fortpflanzen oder vertheilen; denn der Druck, welchen jedes Element der Flüssigkeit erleidet, kann als eine auf dasselbe wirkende Kraft angesehen werden, welche von einem Puncte der Masse zum anderen variirt und die sich sonach als eine Function der seine Lage bestimmenden Coordinaten darstellen oder ausdrücken lässt.

Betrachtet man nämlich die ganze Masse der Flüssigkeit als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen rechtwinkeligen Parallelopipeden, deren drei Dimensionen unendlich kleine Elemente der ihre Lage bestimmenden Coordinaten sind, und zerlegt man die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen, so erhält man drei partielle Differentialgleichungen zwischen diesen Kräften und dem aus ihnen hervorgehenden Drucke, aus denen sich durch Integration die Grösse dieses Druckes, sowie die Bedingungen, denen die beschleunigenden Kräfte genügen müssen, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, bestimmen lassen.

167. Es seien daher AX, AY, AZ (Fig. 83) die drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen, wobei die letztere oder Achse der z in die Richtung der Schwere fallen, folglich die Ebene xy horizontal liegen soll. Befindet sich nun unterhalb dieser Ebene eine flüssige Masse (diese mag homogen oder heterogen, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar sein), und zwar in jenem Winkel, in welchem die Coordinaten positiv sind, und bezeichnet man durch x, y, z die Coordinaten des dem Anfangspuncte A am nächsten liegenden körperlichen Winkels M eines der genannten unendlich kleinen Parallelopipeden, so ist das Volumen dieses Elementes $= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ und wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M ist, dessen Masse $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Dabei ist der Factor ϱ bei homogenen Flüssigkeiten constant (wenn man nämlich von den etwa vorhandenen kleinen Compressionen abstrahirt) und bei heterogenen und elastischen Flüssigkeiten (welche sofort nicht durchaus gleichmässig comprimirt sind) variabel und irgend eine Function von x, y, z.

Es seien X, Y, Z die drei parallel zu den Coordinatenachsen auf das Element $\mathrm{d}m$ wirkenden beschleunigenden Seitenkräfte, folglich $X\mathrm{d}m$, $Y\mathrm{d}m$, $Z\mathrm{d}m$ (Nr. **125.**) die nach den Richtungen dieser Achsen auf $\mathrm{d}m$ wirkenden bewegenden Kräfte. Da nun das Element $\mathrm{d}m$ von der umgebenden Flüssigkeit auf alle sechs Seitenflächen einen Druck von aussen nach innen erleidet, so müssen, wenn dieses Element in der Ruhe bleiben soll, diese äusseren Pressungen den inneren Kräften $X\mathrm{d}m$, $Y\mathrm{d}m$, $Z\mathrm{d}m$ das Gleichgewicht halten.

Bezeichnet daher p den Druck auf die Flächeneinheit, welcher in der Richtung der Schwere auf den Punct M stattfindet, so erleidet das Element $\mathrm{d}m$ auf seine obere Fläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ nach abwärts den Druck $p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, und da p im Allgemeinen eine Function der Coordinaten x, y, z ist, so wird dieser Druck p im Puncte M', dessen Coordinaten $x, y, z + \mathrm{d}z$ sind, $p + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z$ sein, so dass also die untere Fläche dieses Elementes im Sinne der Schwere einem Drucke $(p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ausgesetzt ist. Da aber der Widerstand des Flüssigen, worauf sich das Element $\mathrm{d}m$ stützt, eine diesem Drucke gleiche und entgegengesetzte Kraft bildet, so wird dieses Element von den zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften $p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $(p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ getrieben, welche als Resultirende die von unten nach oben wirkende Kraft $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

als Differenz der beiden vorigen geben. Damit sich dieses Element dm aber weder nach aufwärts noch nach abwärts bewege, so muss diese letztere Kraft der oben genannten, nach der Achse der z wirkenden Kraft $Z\,\mathrm{d}m = Z\varrho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ gleich sein, so dass man dafür hat:

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \varrho Z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \text{ d. i. } \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) = \varrho Z.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch noch die beiden Gleichungen: $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \varrho Y$ und $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \varrho X$, welche stattfinden müssen, damit sich das Element dm weder im Sinne der Achse der y, noch in jenem der Achse der x bewegt. Dabei ist man von der immer richtigen Voraussetzung ausgegangen, dass der Druck auf die Seitenflächen dxdz und dydz des Elementes auf die Flächeneinheit bezogen, ebenfalls $= p$ ist.

Diess vorausgesetzt, sind daher die **allgemeinen Gleichungen der Hydrostatik**, d. i. des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt, worauf beliebige beschleunigende Kräfte wirken (mag diese Masse gleichartig oder ungleichartig, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar sein) sofort:

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \varrho X, \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \varrho Y, \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) = \varrho Z \ldots (1).$$

168. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz und addirt sie hierauf, so erhält man (Comp. §. 673):

$$\mathrm{d}p = \varrho\,(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z) \ldots (2).$$

Soll nun p möglich sein, oder das Gleichgewicht bestehen, so muss dp ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z darstellen; dieses ist aber der Fall, wenn (Lehrbuch III. S. 63, Comp. §. 678) die drei Bedingungs-Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}.\varrho X}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}.\varrho Y}{\mathrm{d}x}\right), \left(\frac{\mathrm{d}.\varrho X}{\mathrm{d}z}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}.\varrho Z}{\mathrm{d}x}\right), \left(\frac{\mathrm{d}.\varrho Y}{\mathrm{d}z}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}.\varrho Z}{\mathrm{d}y}\right) \ldots (3).$$

Finden diese Gleichungen statt, so lässt sich die Gleichung (2) integriren und der daraus gefundene Werth von p leistet dann den Bedingungs-Gleichungen (1) für das Gleichgewicht Genüge.

Um die bei dieser Integration vorkommende willkürliche Constante zu bestimmen, muss der in irgend einem Puncte der Flüssigkeit stattfindende Druck gegeben sein.

169. Jede Fläche, in deren sämmtlichen Puncten der nämliche Druck stattfindet, heisst Niveaufläche, ihre Gleichung wird demnach durch die Bedingung $p = Const.$ oder $dp = 0$ bestimmt. Dieser Erklärung zufolge besteht also für jede Niveaufläche [wegen Gleichung (2)] die Bedingungs- oder Differential-Gleichung:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \ldots (4)$$

und diese drückt sofort aus, dass jede Kraft, welche auf irgend einen Punct x, y, z dieser Fläche wirkt und deren Componenten nach den 3 Achsen X, Y, Z sind, auf dieser Fläche normal ist.

Denn zieht man auf dieser Fläche irgend eine Curve und an einen beliebigen Punct x, y, z derselben die Tangente, welche bekanntlich mit dem Curvenelement ds an diesem Puncte zusammenfällt, so sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche diese Tangente mit den Achsen der x, y, z bildet.

Ist ferner R die Resultirende aus den Kräften X, Y, Z, so sind ebenso $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ die Cosinus der Winkel, welche R mit diesen Achsen einschliesst, [d. i. $Cos(R.x)$, $Cos(R.y)$, $Cos(R.z)$].

Dividirt man alle Glieder der obigen Gleichung (4) durch $R ds$, so erhält man:

$$\frac{X}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

woraus (Comp. §. 580) sofort folgt, dass die Resultirende R mit der Tangente der Curve, welche man auf der Niveaufläche willkürlich gezogen hat, einen rechten Winkel einschliesst, mithin die Richtung von R mit der Normale der Fläche in diesem Puncte x, y, z, der ebenfalls willkürlich gewählt wurde, zusammenfällt. Ausserdem versteht es sich von selbst, dass die Kraft R von aussen nach innen gerichtet sein muss.

170. Setzt man in den aus der oben erwähnten Integration der Gleichung (2) hervorgehenden Werth von $p = f(x, y, z)$ für die 3 Variablen die Coordinaten irgend eines Punctes der Wandfläche ABA' (Fig. 84) des die Flüssigkeit einschliessenden Gefässes, so erhält man die Grösse des Druckes dieser Flüssigkeit auf den entsprechenden Punct der Gefässwand, ein Druck, welcher von der Festigkeit der Wand aufgehoben wird.

Da jedoch dort, wo das Gefäss offen ist, dieser Druck durch nichts aufgehoben würde, so muss derselbe für das Gleichgewicht an dieser offenen Stelle, d. i. an der freien Oberfläche $ADA'E$ der Flüssigkeit gleich Null sein, und da diese Bedingung von

$p = 0$ ebenfalls der obigen (in der vorigen Nummer) $\mathrm{d}p = 0$ entspricht, so folgt, dass die freie Oberfläche ebenfalls eine Niveaufläche bildet. Dasselbe ist auch noch der Fall, wenn auf die freie Oberfläche ein gleichmässiger Druck stattfindet (wegen $p = Const.$).

171. Wird die obige Differentialgleichung (4) integrirt, so erhält man:

$$\int (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) = C \ldots (5).$$

Gibt man nun der willkürlichen Constanten C nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man eben so viele partikuläre Integrale, welche eben so vielen Niveauflächen angehören, deren jede also die Gleichung (4) als Differential-Gleichung und zugleich die Eigenschaft besitzt, die Resultirende R der beschleunigenden Kräfte X, Y, Z unter rechten Winkeln zu schneiden.

Die von zwei unendlich nahen Niveauflächen begrenzte unendlich dünne Schichte heisst Niveau-Schichte.

172. Geht man noch Einmal auf die obige Gleichung (2) in Nr. **168.** zurück und nimmt an, dass $X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ das vollständige Differenzial einer Function $\varphi(x, y, z)$ sei, so wird auch:

$$\mathrm{d}p = \varrho\, \mathrm{d}.\varphi(x, y, z) \ldots (6),$$

und da p eine Function $f(x, y, z)$ sein soll (**170.**), so muss sofort ϱ eine Function von $\varphi(x, y, z)$ sein. Da nun für jede Niveaufläche oder Niveauschichte (wegen $\mathrm{d}p = 0$) die Function $\varphi(x, y, z)$ constant ist, so folgt, dass dafür auch die Dichte ϱ constant sei. Jede Niveauschichte besitzt daher durchaus dieselbe Dichte.

Das Gesetz endlich der Dichtigkeits-Veränderung von einer Niveauschichte zur anderen hängt von einer dieses Gesetz bestimmenden Function von $\varphi(x, y, z)$ ab, wodurch dann auch der jeder Schichte entsprechende Druck p durch die Integration der vorigen Gleichung (6) bestimmt wird.

Anmerkung. Aus allem bisher Gesagten folgt also, dass, wenn eine flüssige Masse (tropfbar oder luftförmig) mit freier Oberfläche ins Gleichgewicht kommen soll, sie sich so lagern muss, dass 1stens die Dichte für alle Niveauschichten zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen constant, und 2tens die Resultante der auf die äussere Oberfläche wirkenden beschleunigenden Kräfte auf diese perpendikulär sein muss.

173. Ist die Schwere die einzige auf die Flüssigkeit wirkende Kraft, so haben bei der oben angenommenen Richtung der Coordinatenachsen die beschleunigenden Kräfte die Werthe $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, und es ist für das Gleichgewicht [Relat. (2) in Nr. **168.**] $dp = \varrho g dz$.

Ist nun die Dichte ϱ constant, was bei allen tropfbaren Flüssigkeiten, ihrer geringen Zusammendrückbarkeit wegen, angenommen werden kann, so folgt aus dieser Gleichung, wenn man integrirt: $p = \varrho g z + C$. Ist zur Bestimmung der willkürlichen Constante C der Druck P in einer bestimmten Tiefe von $z = h$ gegeben oder bekannt, so hat man $P = \varrho g h + C$ und daraus $C = P - \varrho g h$, folglich als vollständiges Integrale, oder für den Druck auf die Flächeneinheit in einer beliebigen Tiefe z:

$$p = P + \varrho g (z - h).$$

Endlich geht die obige Bedingungs-Gleichung (5) für die Niveauflächen im vorliegenden Falle in jene $\int g dz = C$ über, aus welcher, wenn a eine constante Grösse bezeichnet, sofort $z = a$ folgt.

Nach den in Nr. **171.** gemachten Bemerkungen sind also hier die Niveauflächen mit der Ebene der xy parallele, d. i. horizontale Ebenen.

Wäre die Dichte ϱ variabel, so wäre $p = g \int \varrho dz$.

174. Um eine weitere Anwendung von der vorigen Gleichung (4) zu zeigen, wollen wir annehmen, dass alle Theilchen einer völlig freien (in keinem Gefässe eingeschlossenen), nicht schweren Flüssigkeit von einer Kraft angezogen werden, welche von einem im Innern derselben liegenden festen Punct ausgeht und dem Abstande von diesem Puncte proportional ist. Ist nun φ der Werth dieser Kraft im Abstande 1, und nimmt man den genannten festen Punct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, so sind $X = \varphi x$, $Y = \varphi y$, $Z = \varphi z$ die auf das Element oder den Punct x, y, z wirkenden, mit den Achsen parallelen Seitenkräfte, folglich ist, wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung (4) substituirt und gleich mit φ abkürzt, $x dx + y dy + z dz = 0$ die Differenzial-Gleichung für alle Niveauflächen, also auch der freien Oberfläche selbst.

Diese Gleichung gibt, wenn man integrirt $x^2 + y^2 + z^2 = C$, und wenn man, um die Constante C zu bestimmen, den Abstand des Punctes x, y, z vom Ursprung der Coordinaten $= r$ setzt, wodurch (Comp. §. 557) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ wird, so folgt $C = r^2$, mithin wird die vorige Integral-Gleichung, wenn man für C diesen Werth substituirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welches sofort (Comp. §. 604) die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser r ist. Die flüssige Masse bildet also in diesem Falle eine Kugel, deren Mittelpunct der genannte feste Anziehungspunct ist; zugleich sind die sämmtlichen Niveauschichten concentrische Kugelflächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefässes.

(§. 332.)

175. Es befinde sich in dem oben offenen Gefässe CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal sein soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB, so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. **170**.), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendikulär auf die Richtung der Schwere sein und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch ausserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegende Schichte mn gleich p und ist ϱ die constante Dichte der Flüssigkeit, sowie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. **168**. (wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$) sofort $dp = \varrho g dz$, und wenn man integrirt:

$$p = \varrho g z + q,$$

wobei die Constante q den äusseren auf die Oberfläche AB stattfindenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefässes, sowie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn