

Erster Abschnitt.

Hydrostatik.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten.

(§. 331.)

166. Um die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt zu finden, geht man am einfachsten von der in §. 328 erwähnten Eigenschaft der Flüssigkeiten aus, dass sie den auf ihre Oberfläche ausgeübten Druck nach allen Richtungen hin gleichmässig fortpflanzen oder vertheilen; denn der Druck, welchen jedes Element der Flüssigkeit erleidet, kann als eine auf dasselbe wirkende Kraft angesehen werden, welche von einem Punkte der Masse zum anderen variirt und die sich sonach als eine Function der seine Lage bestimmenden Coordinaten darstellen oder ausdrücken lässt.

Betrachtet man nämlich die ganze Masse der Flüssigkeit als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen rechtwinkligen Parallelepipeden, deren drei Dimensionen unendlich kleine Elemente der ihre Lage bestimmenden Coordinaten sind, und zerlegt man die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen, so erhält man drei partielle Differentialgleichungen zwischen diesen Kräften und dem aus ihnen hervorgehenden Drucke, aus denen sich durch Integration die Grösse dieses Druckes, sowie die Bedingungen, denen die beschleunigenden Kräfte genügen müssen, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, bestimmen lassen.

167. Es seien daher AX , AY , AZ (Fig. 83) die drei rechtwinkligen Coordinatenachsen, wobei die letztere oder Achse der z in die Richtung der Schwere fallen, folglich die Ebene xy hori-

zontal liegen soll. Befindet sich nun unterhalb dieser Ebene eine flüssige Masse (diese mag homogen oder heterogen, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar sein), und zwar in jenem Winkel, in welchem die Coordinaten positiv sind, und bezeichnet man durch x, y, z die Coordinaten des dem Anfangspuncte A am nächsten liegenden körperlichen Winkels M eines der genannten unendlich kleinen Parallelepipedes, so ist das Volumen dieses Elementes $= dx dy dz$ und wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M ist, dessen Masse $dm = \rho dx dy dz$. Dabei ist der Factor ρ bei homogenen Flüssigkeiten constant (wenn man nämlich von den etwa vorhandenen kleinen Compressionen abstrahirt) und bei heterogenen und elastischen Flüssigkeiten (welche sofort nicht durchaus gleichmässig comprimirt sind) variabel und irgend eine Function von x, y, z .

Es seien X, Y, Z die drei parallel zu den Coordinatenachsen auf das Element dm wirkenden beschleunigenden Seitenkräfte, folglich Xdm, Ydm, Zdm (Nr. 125.) die nach den Richtungen dieser Achsen auf dm wirkenden bewegenden Kräfte. Da nun das Element dm von der umgebenden Flüssigkeit auf alle sechs Seitenflächen einen Druck von aussen nach innen erleidet, so müssen, wenn dieses Element in der Ruhe bleiben soll, diese äusseren Pressungen den inneren Kräften Xdm, Ydm, Zdm das Gleichgewicht halten.

Bezeichnet daher p den Druck auf die Flächeneinheit, welcher in der Richtung der Schwere auf den Punct M stattfindet, so erleidet das Element dm auf seine obere Fläche $dx dy$ nach abwärts den Druck $p dx dy$, und da p im Allgemeinen eine Function der Coordinaten x, y, z ist, so wird dieser Druck p im Puncte M' , dessen Coordinaten $x, y, z + dz$ sind, $p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$ sein, so dass also die untere Fläche dieses Elementes im Sinne der Schwere einem Drucke $(p + \frac{dp}{dz} dz) dx dy$ ausgesetzt ist. Da aber der Widerstand des Flüssigen, worauf sich das Element dm stützt, eine diesem Drucke gleiche und entgegengesetzte Kraft bildet, so wird dieses Element von den zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften $p dx dy$ und $(p + \frac{dp}{dz} dz) dx dy$ getrieben, welche als Resultirende die von unten nach oben wirkende Kraft $\left(\frac{dp}{dz}\right) dx dy dz$

als Differenz der beiden vorigen geben. Damit sich dieses Element dm aber weder nach aufwärts noch nach abwärts bewege, so muss diese letztere Kraft der oben genannten, nach der Achse der z wirkenden Kraft $Zdm = Z\rho dx dy dz$ gleich sein, so dass man dafür hat:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) dx dy dz = \rho Z dx dy dz, \text{ d. i. } \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho Z.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch noch die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho Y \text{ und } \left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho X,$$

welche stattfinden müssen, damit sich das Element dm weder im Sinne der Achse der y , noch in jenem der Achse der x bewegt. Dabei ist man von der immer richtigen Voraussetzung ausgegangen, dass der Druck auf die Seitenflächen $dx dz$ und $dy dz$ des Elementes auf die Flächeneinheit bezogen, ebenfalls $= p$ ist.

Diess vorausgesetzt, sind daher die allgemeinen Gleichungen der Hydrostatik, d. i. des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt, worauf beliebige beschleunigende Kräfte wirken (mag diese Masse gleichartig oder ungleichartig, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar sein) sofort:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho X, \left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho Y, \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho Z \dots (1).$$

168. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx , die zweite mit dy , die dritte mit dz und addirt sie hierauf, so erhält man (Comp. §. 673):

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz) \dots (2).$$

Soll nun p möglich sein, oder das Gleichgewicht bestehen, so muss dp ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z darstellen; dieses ist aber der Fall, wenn (Lehrbuch III. S. 63, Comp. §. 678) die drei Bedingungs-Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{d. \rho X}{dy}\right) = \left(\frac{d. \rho Y}{dx}\right), \left(\frac{d. \rho X}{dz}\right) = \left(\frac{d. \rho Z}{dx}\right), \left(\frac{d. \rho Y}{dz}\right) = \left(\frac{d. \rho Z}{dy}\right) \dots (3).$$

Finden diese Gleichungen statt, so lässt sich die Gleichung (2) integriren und der daraus gefundene Werth von p leistet dann den Bedingungs-Gleichungen (1) für das Gleichgewicht Genüge.

Um die bei dieser Integration vorkommende willkürliche Constante zu bestimmen, muss der in irgend einem Punkte der Flüssigkeit stattfindende Druck gegeben sein.

169. Jede Fläche, in deren sämtlichen Punkten der nämliche Druck stattfindet, heisst Niveaufläche, ihre Gleichung wird demnach durch die Bedingung $p = \text{Const.}$ oder $dp = 0$ bestimmt. Dieser Erklärung zufolge besteht also für jede Niveaufläche [wegen Gleichung (2)] die Bedingungs- oder Differentialgleichung:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \dots (4)$$

und diese drückt sofort aus, dass jede Kraft, welche auf irgend einen Punkt x, y, z dieser Fläche wirkt und deren Componenten nach den 3 Achsen X, Y, Z sind, auf dieser Fläche normal ist.

Dem zieht man auf dieser Fläche irgend eine Curve und an einen beliebigen Punkt x, y, z derselben die Tangente, welche bekanntlich mit dem Curvenelement ds an diesem Punkte zusammenfällt, so sind $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche diese Tangente mit den Achsen der x, y, z bildet.

Ist ferner R die Resultirende aus den Kräften X, Y, Z , so sind ebenso $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$ die Cosinus der Winkel, welche R mit diesen Achsen einschliesst, [d. i. $\text{Cos}(R.x), \text{Cos}(R.y), \text{Cos}(R.z)$].

Dividirt man alle Glieder der obigen Gleichung (4) durch $R ds$, so erhält man:

$$\frac{X}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

woraus (Comp. §. 580) sofort folgt, dass die Resultirende R mit der Tangente der Curve, welche man auf der Niveaufläche willkürlich gezogen hat, einen rechten Winkel einschliesst, mithin die Richtung von R mit der Normale der Fläche in diesem Punkte x, y, z , der ebenfalls willkürlich gewählt wurde, zusammenfällt. Ausserdem versteht es sich von selbst, dass die Kraft R von aussen nach innen gerichtet sein muss.

170. Setzt man in den aus der oben erwähnten Integration der Gleichung (2) hervorgehenden Werth von $p = f(x, y, z)$ für die 3 Variablen die Coordinaten irgend eines Punktes der Wandfläche ABA' (Fig. 84) des die Flüssigkeit einschliessenden Gefässes, so erhält man die Grösse des Druckes dieser Flüssigkeit auf den entsprechenden Punkt der Gefässwand, ein Druck, welcher von der Festigkeit der Wand aufgehoben wird.

Da jedoch dort, wo das Gefäss offen ist, dieser Druck durch nichts aufgehoben würde, so muss derselbe für das Gleichgewicht an dieser offenen Stelle, d. i. an der freien Oberfläche $ADA'E$ der Flüssigkeit gleich Null sein, und da diese Bedingung von

$p = 0$ ebenfalls der obigen (in der vorigen Nummer) $dp = 0$ entspricht, so folgt, dass die freie Oberfläche ebenfalls eine Niveaufläche bildet. Dasselbe ist auch noch der Fall, wenn auf die freie Oberfläche ein gleichmässiger Druck stattfindet (wegen $p = \text{Const.}$).

171. Wird die obige Differentialgleichung (4) integrirt, so erhält man:

$$f(Xdx + Ydy + Zdz) = C \dots (5).$$

Gibt man nun der willkürlichen Constanten C nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man eben so viele particuläre Integrale, welche eben so vielen Niveauflächen angehören, deren jede also die Gleichung (4) als Differential-Gleichung und zugleich die Eigenschaft besitzt, die Resultirende R der beschleunigenden Kräfte X, Y, Z unter rechten Winkeln zu schneiden.

Die von zwei unendlich nahen Niveauflächen begrenzte unendlich dünne Schichte heisst Niveau-Schichte.

172. Geht man noch Einmal auf die obige Gleichung (2) in Nr. **168.** zurück und nimmt an, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differenzial einer Function $\varphi(x, y, z)$ sei, so wird auch:

$$dp = \rho d.\varphi(x, y, z) \dots (6),$$

und da p eine Function $f(x, y, z)$ sein soll (**170.**), so muss sofort ρ eine Function von $\varphi(x, y, z)$ sein. Da nun für jede Niveaufläche oder Niveauschichte (wegen $dp = 0$) die Function $\varphi(x, y, z)$ constant ist, so folgt, dass dafür auch die Dichte ρ constant sei. Jede Niveauschichte besitzt daher durchaus dieselbe Dichte.

Das Gesetz endlich der Dichtigkeits-Veränderung von einer Niveauschichte zur anderen hängt von einer dieses Gesetz bestimmenden Function von $\varphi(x, y, z)$ ab, wodurch dann auch der jeder Schichte entsprechende Druck p durch die Integration der vorigen Gleichung (6) bestimmt wird.

Anmerkung. Aus allem bisher Gesagten folgt also, dass, wenn eine flüssige Masse (tropfbar oder luftförmig) mit freier Oberfläche ins Gleichgewicht kommen soll, sie sich so lagern muss, dass 1stens die Dichte für alle Niveauschichten zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen constant, und 2tens die Resultante der auf die äussere Oberfläche wirkenden beschleunigenden Kräfte auf diese perpendicular sein muss.

173. Ist die Schwere die einzige auf die Flüssigkeit wirkende Kraft, so haben bei der oben angenommenen Richtung der Coordinatenachsen die beschleunigenden Kräfte die Werthe $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, und es ist für das Gleichgewicht [Relat. (2) in Nr. 168.] $dp = \rho g dz$.

Ist nun die Dichte ρ constant, was bei allen tropfbaren Flüssigkeiten, ihrer geringen Zusammendrückbarkeit wegen, angenommen werden kann, so folgt aus dieser Gleichung, wenn man integrirt: $p = \rho g z + C$. Ist zur Bestimmung der willkürlichen Constante C der Druck P in einer bestimmten Tiefe von $z = h$ gegeben oder bekannt, so hat man $P = \rho g h + C$ und daraus $C = P - \rho g h$, folglich als vollständiges Integrale, oder für den Druck auf die Flächeneinheit in einer beliebigen Tiefe z :

$$p = P + \rho g (z - h).$$

Endlich geht die obige Bedingungs-Gleichung (5) für die Niveauflächen im vorliegenden Falle in jene $\int \rho g dz = C$ über, aus welcher, wenn a eine constante Grösse bezeichnet, sofort $z = a$ folgt.

Nach den in Nr. 171. gemachten Bemerkungen sind also hier die Niveauflächen mit der Ebene der xy parallele, d. i. horizontale Ebenen.

Wäre die Dichte ρ variabel, so wäre $p = \int \rho g dz$.

174. Um eine weitere Anwendung von der vorigen Gleichung (4) zu zeigen, wollen wir annehmen, dass alle Theilchen einer völlig freien (in keinem Gefässe eingeschlossenen), nicht schweren Flüssigkeit von einer Kraft angezogen werden, welche von einem im Innern derselben liegenden festen Punct ausgeht und dem Abstände von diesem Puncte proportional ist. Ist nun φ der Werth dieser Kraft im Abstände 1, und nimmt man den genannten festen Punct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, so sind $X = \varphi x$, $Y = \varphi y$, $Z = \varphi z$ die auf das Element oder den Punct x, y, z wirkenden, mit den Achsen parallelen Seitenkräfte, folglich ist, wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung (4) substituirt und gleich mit φ abkürzt, $x dx + y dy + z dz = 0$ die Differenzial-Gleichung für alle Niveauflächen, also auch der freien Oberfläche selbst.

Diese Gleichung gibt, wenn man integrirt $x^2 + y^2 + z^2 = C$, und wenn man, um die Constante C zu bestimmen, den Abstand des Punctes x, y, z vom Ursprung der Coordinaten $= r$ setzt,

wodurch (Comp. §. 557) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ wird, so folgt $C = r^2$, mithin wird die vorige Integral-Gleichung, wenn man für C diesen Werth substituirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welches sofort (Comp. §. 604) die Gleichung einer Kugel fläche vom Halbmesser r ist. Die flüssige Masse bildet also in diesem Falle eine Kugel, deren Mittelpunkt der genannte feste Anziehungspunct ist; zugleich sind die sämtlichen Niveauschichten concentrische Kugel flächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefässes.

(§. 332.)

175. Es befinde sich in dem oben offenen Gefässe CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal sein soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB , so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. 170.), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendicular auf die Richtung der Schwere sein und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch ausserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegende Schichte mn gleich p und ist ϱ die constante Dichte der Flüssigkeit, sowie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. 168. (wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$) sofort $dp = \varrho g dz$, und wenn man integrirt:

$$p = \varrho g z + q,$$

wobei die Constante q den äusseren auf die Oberfläche AB stattfindenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefässes, sowie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn

der grösseren Einfachheit wegen hier ganz auslassen oder Null setzen, wodurch die vorige Gleichung in $p = \rho g z$ übergeht.

Ist nun die Bodenfläche $= F$, ihr Abstand von der Oberfläche $AB = h$, sowie der Druck auf den Boden $= P$, so folgt aus dieser Gleichung wegen $z = h$, sofort:

$$P = p F = \rho g F h \dots (m),$$

woraus also ersichtlich ist, dass der auf den horizontalen Boden ausgeübte Druck, ohne Rücksicht auf die Form des Gefässes (es mag gleich weit, oder nach aufwärts erweitert oder verengt sein), gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitsprisma oder Cylinders, welcher F zur Grundfläche und h zur Höhe hat, dessen Volumen und Masse also beziehungsweise $V = F h$ und $M = \rho F h$ ist. (Da hier g das Gewicht der Masseneinheit bezeichnet, so ist §. 35, Anmerk. $Mg = P$ das Gewicht der Masse M .)

Anmerkung. Befinden sich in einem Gefässe mehrere Flüssigkeiten eine über der anderen, so ist es für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend, dass die Niveau- oder Separationsflächen zwischen zwei aufeinander folgenden Flüssigkeiten (Nr. 173.) horizontal seien, weil in diesem Falle jede über einer anderen stehende Flüssigkeit auf alle Punkte ihrer Grundfläche einen constanten Druck ausübt, welcher also nach der oben gemachten Bemerkung das Gleichgewicht der unter ihr liegenden Flüssigkeit nicht stören kann.

Giesst man nun in das vorige Gefäss CE (Fig. 85) über die Flüssigkeit $ABCD$ eine neue, von der Dichte ρ' , deren obere Fläche $A'B'$ wieder horizontal ist und über der Schichte AB den Abstand h' hat, so übt diese Flüssigkeit auf die Schichte $AB = F$, als ihre Basis nach der vorigen Gleichung (m) , den Druck $P' = \rho' g F h'$ aus, welcher sofort durch die untere Flüssigkeit auf die Bodenfläche F des Gefässes nach §. 330 gleichmässig fortgepflanzt wird und dadurch auf diesen den Druck $\rho' g F h'$ hervorbringt; der von beiden Flüssigkeiten auf die Bodenfläche ausgeübte Druck ist daher $P + P' = \rho g F h + \rho' g F h' = g F (\rho h + \rho' h')$.

Auf dieselbe Weise findet man, dass, wenn über diese zweite noch eine dritte Flüssigkeit von der Dichte ρ'' bis $A''B''$ gegossen wird und diese Schichte $A''B''$, welche von der vorigen $A'B'$ um h'' absteht mag, wieder horizontal steht, dadurch erstens das Gleichgewicht nicht gestört wird und dann der Gesamtdruck auf den Boden des Gefässes:

$$= (\rho h + \rho' h' + \rho'' h'') g F \text{ ist.}$$

Führt man so fort, so zeigt sich, dass, wenn beliebig viele übereinander befindliche Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, welche jedoch keine chemische Wirkung aufeinander ausüben dürfen, und wobei sich immer die specifisch leichtere über die schwerere lagern wird, in einem Gefässe im Gleichgewichte stehen, der Druck auf die horizontale Bodenfläche lediglich von der Grösse dieser Fläche, von der Höhe der

einzelnen Flüssigkeitsschichten und von ihren Dichtigkeiten abhängt. Da dieser Satz auch noch stattfindet, wenn diese horizontalen Schichten unendlich dünn sind, so gilt er auch für den Fall, dass sich die Dichte der Flüssigkeit nach verticaler Richtung continuirlich und gleichmässig ändert, wie diess bei compressiblen Flüssigkeiten der Fall ist. Auch gilt dieser Satz noch, wenn mit der Dichte die Schwere von Schichte zu Schichte variirt.

176. Wird der Boden des Gefässes durch keine Ebene, sondern durch irgend eine krumme Fläche gebildet, so seien, um den Normaldruck auf denselben zu bestimmen, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes M (Fig. 86), sowie w das demselben Puncte entsprechende Flächenelement dieser krummen Fläche (wobei z wieder in der Richtung der Schwere liegen soll). Bezeichnet ferner p den Druck auf die Flächeneinheit, so ist pw der auf dieses Flächenelement nach der Richtung der Normale NM stattfindende Druck. Bildet diese Normale mit den drei Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ , so sind bekanntlich die Neigungswinkel des Flächenelementes w , d. i. der Tangentialebene im Puncte M mit den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise $= \gamma, \beta, \alpha$, so dass, wenn das Flächenelement auf die 3 genannten coordinirten Ebenen projectirt und die Projectionen beziehungsweise mit u, u', u'' bezeichnet werden, sofort:

$$u = w \cos \gamma, \quad u' = w \cos \beta, \quad u'' = w \cos \alpha$$

stattfindet.

Multiplicirt man diese Gleichungen mit p , so erhält man:

$$pu = pw \cos \gamma, \quad pu' = pw \cos \beta, \quad pu'' = pw \cos \alpha,$$

woraus hervorgeht, dass die Producte pu, pu', pu'' nichts anderes als die nach den drei Achsen der z, y, x genommenen, also beziehungsweise auf den Ebenen der xy, xz, yz perpendicularen Seitenkräfte des Normaldruckes pw sind, so dass man also überhaupt den aus dem Normaldruck pw abgeleiteten senkrechten Druck auf irgend eine Ebene erhält, wenn man in dem Producte pw das Element der krummen Fläche w mit dessen Projection auf die betreffende Ebene vertauscht.

177. Wird nun auf die Oberfläche der in dem prismatischen oder cylinderischen Gefässe enthaltenen tropfbaren Flüssigkeit ein verticaler Druck P derart ausgeübt, dass davon auf die Flächen-

einheit der Druck p (welcher sofort §. 330 auf jedes Flächenelement normal ist) entfällt, und abstrahirt man dabei von dem Gewichte der Flüssigkeit, so ist der Gesamtdruck auf den Boden CDE des Gefässes nach verticaler, d. i. lothrechter Richtung $= pu + pu_1 + pu_2 + \dots = p(u + u_1 + \dots) = pF$, wenn nämlich F die Projection der krummen Fläche auf die horizontale Ebene CE ist.

Anmerkung. Stellt dieses Gefäss, welches ein Cylinder vom Halbmesser r sein mag, einen beweglichen Kolben, z. B. einer Wassersäulenmaschine vor, so ist der Wasserdruck auf denselben ganz gleich, er mag durch irgend eine krumme Fläche CDE oder durch die Kreisebene $CE = r^2\pi$ geschlossen sein, indem dieser Druck immer $= pr^2\pi$ ist, wenn p den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet.

178. Rührt der Druck auf die Bodenfläche von dem Gewichte der Flüssigkeit her, so ist p nicht mehr constant, sondern eine Function von z , wenn z die Tiefe des betreffenden Flächenelementes unter dem Spiegel der Flüssigkeit ist, die Ebene der xy also mit diesem Spiegel zusammenfällt. In diesem Falle findet man den lothrechten Druck auf die krumme Fläche, also senkrecht auf die Ebene der xy , sowie auch gegen die beiden übrigen coordinirten Ebenen durch eine doppelte Integration, wie aus dem nachstehenden Beispiele zu ersehen ist.

Beispiel. Es sei z. B. die Kugelschale $AEA'B$ (Fig. 84), welche die Hälfte einer hohlen Kugel vom Halbmesser $CA = CB = r$ bilden, und wobei die grösste Kreisebene $ADA'E$ horizontal liegen und mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Gewicht in der cubischen Einheit $= \gamma$ ist.

Nimmt man AA' zur Achse der x , DE als Achse der y und schneidet die Halbkugel sowohl durch zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen in den Entfernungen $CP = x$ und $x + dx$, als auch durch zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen in den Distanzen $PM = y$ und $y + dy$, so erhält man ein lothrechtcs Flüssigkeitsprisma vom Querschnitt $dx dy$ und, wenn man $Pp = MM' = z$ setzt, von der Höhe z . Ist P der gesuchte lothrechte Druck auf die Kugelschale, so ist (Nr. 177.) $d^2P = pu$, und zwar ist hier $p = \gamma z$ und $u = dx dy$, daher auch:

$$d^2P = \gamma z dx dy = \gamma dx dy \sqrt{r^2 - y^2},$$

wenn man nämlich $PN = PM' = \rho$ setzt.

Aus dieser Differential-Gleichung erhält man durch eine zweifache

Integration:
$$P = 4\gamma \int_0^r dx \int_0^\rho dy \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Nun ist aber
$$\int_0^\rho dy \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{\pi}{4} \rho^2 = \frac{\pi}{4} (r^2 - x^2),$$
 mithin auch:

$$P = 4\gamma \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^r dx (r^2 - x^2) = \gamma \pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3 \pi \gamma,$$

also der gesuchte Druck, wie es sein soll, gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit.

Bildet diese Kugelschale die Bodenfläche eines senkrechten Cylinders von demselben Halbmesser r und reicht die Flüssigkeit bis auf die Höhe h über der Kreisfläche $ADA'E$, so kommt zu dem vorigen Drucke noch jener $r^2 \pi h \gamma$ hinzu, so dass der Gesamtdruck dann $= (\frac{2}{3} r^3 \pi + r^2 \pi h) \gamma$ gleich dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit ist, wie es sich wohl von selbst versteht.

Seitendruck.

(§. 333.)

179. Es sei auf der schiefen Wand DE (Fig. 87) des bis auf die Höhe AB mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten prismatischen Gefässes die krumme Linie $aMbm$ gezeichnet und der Druck der Flüssigkeit auf die von dieser Curve begrenzte ebene Fläche zu bestimmen.

Legt man durch den Punct A eine verticale Ebene AJ senkrecht auf die Ebene DE , zählt auf der dadurch entstehenden Durchschnittslinie AL von A aus die Abscissen und nimmt darauf senkrecht die rechtwinkeligen Ordinaten der geschlossenen Curve, welche also horizontal sein werden, setzt nämlich für einen beliebigen Punct M der Curve, welche wir der grösseren Einfachheit wegen gegen ab als symmetrisch voraussetzen wollen, $AP = x$ und $PM = Pm = y$, zieht ferner in der Entfernung $Pp = dx$ eine zweite Ordinate, so ist die von diesen beiden Ordinaten eingeschlossene unendlich schmale Fläche $df = 2y dx$ und es liegen alle ihre Puncte um die Tiefe $NP = z$ unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so dass der Druck auf diesen schmalen Streifen (Nr. 175.) durch $dP = \gamma z df = 2\gamma z y dx$, oder wenn der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ ist, wegen $z = x \text{ Sin } \alpha$, durch

$$dP = 2\gamma \text{ Sin } \alpha y x dx$$

ausgedrückt wird, wenn wieder γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Grenzen $Aa = x$ und $Ab = x''$ setzt, sofort durch Integration der gesuchte Normaldruck auf die von der Curve $aMbm$ eingeschlossene ebene Fläche:

$$P = 2\gamma \sin \alpha \int_x^{x''} y x dx \dots (1),$$

wobei die Gleichung der Umfangscurve $y = f(x)$ gegeben sein muss.

180. Ist X die Abscisse des Schwerpunktes der von der angenommenen Curve begrenzten Fläche F , also $X \sin \alpha = h$ der Abstand dieses Punctes vom Wasserspiegel, so ist (Nr. **25.**):

$$FX \sin \alpha = 2 \sin \alpha \int_x^{x''} y x dx,$$

folglich auch: $P = \gamma FX \sin \alpha = \gamma Fh \dots (2);$

es ist also der auf die Fläche ausgeübte Seitendruck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Anmerkung. Ein Schutzbret oder eine Spundwand hat also, ohne Rücksicht darauf, ob viel oder wenig Wasser anliegt, immer denselben Druck auszuhalten, so lange sich der Abstand des Schwerpunktes dieser Wand vom Wasserspiegel nicht ändert.

181. Um auch eine Anwendung des in Nr. **176.** entwickelten Satzes für den Druck auf krumme Flächen bei dem Seitendruck zu zeigen, wollen wir annehmen, dass der hohle Kegel $ABMO$ (Fig. 88) ganz mit Wasser gefüllt sei und den dadurch entstehenden Druck im Gefässe bestimmen.

Denkt man sich den Umfang der Grundfläche in unendlich viele gleiche Theile wie $Mm = ds$ getheilt und die Theilungspuncte mit der Spitze des Kegels durch gerade Linien verbunden, so hat man die Mantelfläche in unendlich schmale gleichschenkelige Dreiecke zerlegt, wovon jedes die Fläche $\frac{1}{2} l ds$ besitzt, wenn man die Seite oder Kante des Kegels mit l bezeichnet. Ist ferner $OC = h$ die Höhe des Kegels, so liegt der Schwerpunct o eines solchen Flächenelementes OMm um $\frac{2}{3} h$ unter dem Wasserspiegel, d. i. unter dem Punct O , und es ist daher nach der vorigen Nummer der Druck des Wassers auf dieses Element $dN = \frac{1}{2} l ds \cdot \frac{2}{3} h \gamma = \frac{1}{3} \gamma l h ds$, folglich der Normaldruck auf die gesammte Mantelfläche:

$$N = \frac{1}{3} \gamma l h \int ds = \frac{1}{3} \gamma l h \int_0^{2\pi} r d\alpha = \frac{2}{3} r \pi \gamma l h,$$

oder wenn man die Mantelfläche $= O$ setzt, auch $N = O \cdot \frac{2}{3} h \cdot \gamma \dots (m).$

Zerlegt man nun, um den Seitendruck parallel zur Achse zu erhalten, den auf das Flächenelement OMm stattfindenden Normaldruck dN in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte dP, dP' , wovon die erstere parallel zur Achse OC , die andere also darauf senkrecht ist; so hat man, die Projection des Flächenelementes OMm auf die Grundfläche des Kegels, d. i. $MCm = dF$ gesetzt, nach dem erwähnten Satz in Nr. 176.:

$$dP = dF \frac{2}{3} h \gamma, \text{ folglich } P = \frac{2}{3} F h \gamma = \frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma$$

(was auch unmittelbar aus der Relat. (m) folgt, wenn man F statt O setzt) als Resultirende aller zu OC parallelen Kräfte, während sich die darauf senkrechten, in der verlängerten Kreisebene aob liegenden Kräfte ringsherum aufheben.

Der Druck auf den Boden des Kegels ist gleich $r^2 \pi \cdot h \gamma$, und da der vorige Druck P diesem entgegengesetzt ist, so bleibt noch ein Druck nach abwärts (normal auf die horizontale Ebene, worauf das Gefäss steht) $= r^2 \pi h \gamma - \frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma = \frac{1}{3} r^2 \pi h \gamma$, also gleich dem Gewichte des im Gefässe enthaltenen Wassers, wie es sein muss.

Würde man die Mantelfläche von dem Boden lostrennen, so würde der Boden mit der Kraft $r^2 \pi h \gamma$ abwärts gedrückt und die Mantelfläche mit der Kraft $\frac{2}{3} r^2 \pi h \gamma$ vertical aufwärts gehoben.

Anmerkung. Hat der Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine die Trichterform $ABCD$ (Fig. 89), wobei $AB = 2R$ der grössere, und $ab = 2r$ der kleinere Durchmesser ist und bezeichnet p den von der Wassersäule auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck, so ist der Druck auf die Fläche AB aufwärts $= R^2 \pi \cdot p$ und der Seitendruck nach abwärts, welcher von dem auf die Mantelfläche $ABab$ ausgeübten Normaldruck herrührt $= (R^2 - r^2) \pi \cdot p$, so dass also noch nach aufwärts der wirksame Druck

$$P = R^2 \pi p - (R^2 - r^2) \pi p = r^2 \pi \cdot p$$

übrig bleibt, welcher sofort bloss dem Querschnitt des Cylinders $abcd$ entspricht.

Mittelpunct des Druckes.

(§. 335.)

182. Um den Mittelpunct des Druckes O (Fig. 90) für die von der Curve $aMbma$ umschlossene ebene Fläche zu bestimmen, wenn das Gefäss CDG mit einer schweren Flüssigkeit gefüllt ist, nehme man die horizontale Kante EF des Gefässes zur Achse der statischen Momente und setze, wie in Nr. 179., $AP = x$

$PM = Pm = y$, $Pp = dx$, $Aa = x'$ und $Ab = x''$; so ist der Normaldruck der Flüssigkeit auf das Flächenelement Mn , welches um die Tiefe $x \sin \alpha$ unter dem Spiegel EG liegt: $dp = 2\gamma dx \cdot x \sin \alpha \cdot y$ und dessen statisches Moment gegen EF : $xdp = 2\gamma \sin \alpha \cdot y x^2 dx$, folglich die Summe der statischen Momente aller Flächenelemente:

$$M = 2\gamma \sin \alpha \int_{x'}^{x''} y x^2 dx,$$

wobei die Gleichung $y = f(x)$ der Umfangscurve gegeben sein muss. Ist nun P die Resultirende aus allen den (zu einander parallelen) Normalpressungen, d. i. aus dem Gesamt-Normaldruck auf die betreffende Fläche $aMbma$, nämlich $P = 2\gamma \sin \alpha \int_{x'}^{x''} y x dx$, und $AO = X$ die Abscisse ihres Angriffspunctes, d. i. der Mittelpunct des Druckes; so ist auch $M = PX$, oder wenn man für M und P die vorigen Werthe substituirt und abkürzt:

$$X = \frac{\int_{x'}^{x''} y x^2 dx}{\int_{x'}^{x''} y x dx} \quad (1)$$

wodurch dieser Punct O , da er bei der gemachten Voraussetzung, dass die betreffende Fläche durch die Abscissenachse AB in zwei symmetrische Theile getheilt wird, in der Geraden AB liegt, vollkommen bestimmt ist.

Anmerkung. Lässt sich die Fläche durch die Gerade AB nicht in zwei symmetrische Theile theilen, so muss man noch eine zweite, am einfachsten mit der AB parallele Momentenachse annehmen und auf dieselbe Weise den Abstand Y des Punctes O von dieser Achse bestimmen.

183. Ist, als einfachster Fall, die Fläche ein Rechteck, dessen beide horizontal liegende Seiten $= b$ und die beiden anderen (parallel mit AB) $= a$ sind und wofür $Aa = d$, folglich $Ab = a + d$ ist; so hat man nach der vorigen Gleichung (1), wegen $y = \frac{1}{2}b$ sofort:

$$X = \frac{\frac{1}{2}b \int_d^{a+d} x^2 dx}{\frac{1}{2}b \int_d^{a+d} x dx} = \frac{2}{3} \frac{(a+d)^3 - d^3}{(a+d)^2 - d^2}$$

d. i.

$$X = \frac{2}{3} \frac{a^2 + 3ad + 3d^2}{a + 2d} \dots (m)$$

(vergl. Gleich. 1 in §. 335).

Liegt die obere Kante im Wasserspiegel, so ist wegen $d = 0$ sofort: $X = \frac{2}{3}a$.

184. Ist die Fläche ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel und Höhe h in der Geraden AB liegt, so hat man, wenn die Basis des Dreieckes $= 2b$ ist, wegen $x : y = h : b$, also $y = \frac{b}{h}x$ sofort:

$$X = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{3}{4}h.$$

Für die umgekehrte Lage, wenn nämlich die Basis im Wasserspiegel liegt, ist

$$X = \frac{\int_0^h x^2 dx (h-x)}{\int_0^h x dx (h-x)} = \frac{1}{2}h.$$

Anmerkung. Dieselben Ausdrücke gelten auch für ein rechtwinkeliges Dreieck CAB (Fig. 91 und 91'), dessen Cathete $AC = h$ parallel mit der Geraden AB (Fig. 90) liegt. Es ist nämlich im ersteren Falle, wenn die Spitze C (Fig. 91) im Wasserspiegel liegt, $CP = \frac{3}{4}CA$ und im letzteren (Fig. 91') $CP = \frac{1}{2}AC$.

Da ferner in beiden Fällen der gesuchte Punkt O in der Halbierungslinie CB liegen muss, so ist in diesen beiden Fällen beziehungsweise $PO = \frac{3}{8}AB$ und $PO = \frac{1}{4}AB$.

185. Ist endlich die betreffende Fläche ein Kreis vom Halbmesser r , dessen Mittelpunkt von der Achse EF um a absteht, und verwechselt man für dieses Beispiel zur Vereinfachung der Rechnung die beiden Coordinatenachsen, setzt nämlich (Fig. 92) $AP = Cp = x$ und $pM = pm = y$; so ist $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und der Druck auf das Flächenelement Mn , da dessen Schwerpunkt um die Grösse $a \sin \alpha$ lothrecht unter dem Wasserspiegel liegt, $dp = 2y dx \cdot a \sin \alpha \cdot \gamma = 2a\gamma \sin \alpha dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$, folglich der Gesamtdruck auf die Kreisfläche:

$$P = 2 \int_0^r dp = 4a\gamma \sin \alpha \int_0^r dx \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

oder wegen $\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{x}{2} \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r}$,

folglich $\int_0^r dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2}$ auch $P = r^2 \pi \gamma a \sin \alpha$ (wie diess auch nach dem Satze in Nr. 180 sein muss).

Um ferner das statische Moment M dieses Druckes zu finden, hat man für den Abstand Po des Mittelpunctes des Druckes des unendlich schmalen Rechteckes Mn nach Nr. 183. Gleichung (m), in welcher $d = a - y$ und $a = 2y$ zu setzen ist, $Po = a + \frac{1}{3a} y^2$, folglich das statische Moment des auf dieses Element ausgeübten Druckes:

$$\begin{aligned} P o \cdot dp &= \left(a + \frac{1}{3a} y^2 \right) 2 a \gamma \text{Sin } \alpha y dx \\ &= 2 \gamma a^2 \text{Sin } \alpha y dx + \frac{2}{3} \gamma \text{Sin } \alpha y^3 dx. \end{aligned}$$

Das gesuchte Moment ist daher:

$$M = 2 \gamma a^2 \text{Sin } \alpha \cdot 2 \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{2}{3} \gamma \text{Sin } \alpha \cdot 2 \int_0^r dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder wegen $\int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^r dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8} r^4 \frac{\pi}{2}$ *)

auch:

$$M = \gamma r^2 \pi \text{Sin } \alpha \left(a^2 + \frac{1}{4} r^2 \right).$$

Da nun für's Gleichgewicht $PX = M$, also $X = \frac{M}{P}$ ist, so erhält man, wenn für M und P die Werthe gesetzt werden, sofort:

$$X = \frac{\gamma r^2 \pi \text{Sin } \alpha \left(a^2 + \frac{1}{4} r^2 \right)}{\gamma r^2 \pi a \text{Sin } \alpha} = a + \frac{r^2}{4a} = \frac{4a^2 + r^2}{4a}.$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so ist wegen $a = r$ sofort: $X = \frac{5}{4} r$, während der Schwerpunkt des Kreises nur um $\frac{4}{3} r$ unter dem Wasserspiegel liegt (vergl. §. 337).

*) Es ist nämlich (Comp. §. 817 und §. 819, 2.):

$$\int dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{4} \left(\frac{3}{2} r^2 - x^2 \right) \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3}{8} r^4 \text{arc Sin } \frac{x}{r}.$$