Anmerkung 1. Besitzt der Zapfen, wie diess auch manchmal vorkommt, die Form eines nach unten verjüngten abgestutzten Kegels, welcher sich in seinem genau passenden konischen Lager bloss auf der Mantelfläche reibt, so findet man genau auf dieselbe Weise, wenn man den oberen und unteren Halbmesser des Zapfens durch R und r, sowie die Kante oder Seite des abgestutzten Kegels durch a bezeichnet, dann Q und f wieder die vorige Bedeutung haben, für die von der Zapfenreibung während einer Umdrehung absorbirte Arbeit:

$$w = \tfrac{4}{3} \pi f Q \frac{R^3 - r^3}{(R + r) a}.$$

Für $r = 0$ und $a = R$ erhält man, wie es sein soll, $w = \frac{4}{3} R \pi f Q$, weil dann die reibende Fläche in eine ebene Kreisfläche vom Halbmesser R übergeht.

Anmerkung 2. Ganz auf dieselbe Weise findet man für einen horizontal liegenden Wellzapfen, welcher in seinem Lager, den Kreisbogen aDb (Fig. 67) vollkommen berührend aufliegt, und wobei $CA = CD = r$ der Halbmesser des reibenden Zapfens, $aO = a$ die halbe Sehne ab, Q der verticale Druck auf den Zapfen und f wieder der Reibungs-Coefficient ist, für die Arbeit oder Wirkung der Reibung während einer Umdrehung des Zapfens, den Ausdruck:

$$w = \frac{2 r \pi f Q}{a} \int_0^a dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

und wenn man integrirt (Comp. §. 819, Beisp. 2):

$$w = \frac{r \pi f Q}{a} \left[a \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} + r \, arc \, Sin \left(\frac{a}{r}\right) \right],$$

oder wenn man wieder auf die Reihen übergeht und mit a abkürzt:

$$w = 2 r \pi f Q \left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{112}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - . \right].$$

Bildet die halbe Mantelfläche des Zapfens die reibende Fläche, so ist $a = r$ und es ist ziemlich nahe $w = \frac{8}{5} r \pi f Q$.

Liegt dagegen bloss die unterste Kante der cylinderischen Oberfläche des Zapfens wie auf einer horizontalen Ebene auf, so wird a so klein, dass man in der vorigen Reihe, vom 2ten angefangen, alle Glieder vernachlässigen kann, und dann ist $w = 2 r \pi f Q$, also die von der Reibung absorbirte Arbeit um $\frac{2}{5} r \pi f Q$ grösser als im vorigen Falle und gerade so gross, wie diese [vergl. §. 287, Gleich. (4)] für gewöhnlich in Rechnung gebracht wird.

Reibung eines Seiles über einen ruhenden Cylinder.

(§. 292.)

165. Ist das Seil, woran die Last Q hängt, um den Bogen $AM = r\alpha$ (Fig. 47) geschlagen, und steht die Kraft P mit dieser Last und der zwischen dem Seil und dem genannten Bogenstück des Cylinders C vom Halbmesser r im Gleichgewichte, d. h. kann die Kraft P, wenn die Bewegung eingeleitet ist, die Last Q heraufziehen; so muss durch Vergrösserung des Winkels α um $d\alpha$, wegen der vermehrten, auf dem Bogenstück $Mm = r\,d\alpha$ stattfindenden Reibung, auch die Kraft P um dP vermehrt werden, um das Gleichgewicht zwischen der Last Q und der Reibung über den Bogen AMm wieder herzustellen, so dass also dP die Reibung über den unendlich kleinen Bogen Mm überwindet.

Um diese Reibung zu finden, muss man zuerst den Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm bestimmen. Dazu denke man sich die im Puncte M in der Richtung MA stattfindende Spannung durch eine nach der Tangente MT wirkende Kraft $= P$ ersetzt, so dass der Stand des Gleichgewichtes nicht gestört wird, wenn an dem über den Bogen Mm gelegten Seil nach den Richtungen der Tangenten MT und mt die Kräfte P und $P + dP$ wirksam gedacht werden. Da aber $P + dP = P$ ist, so wirken auf den Punct N nach den genannten Richtungen zwei gleiche Kräfte P und erzeugen daher eine nach dem Mittelpuncte C gerichtete, d. i. den Winkel $MCm = d\alpha$ halbirende Resultirende R, welche sich einfach nach §. 16 (Anmerkung), d. i. wenn man Kürze halber W. $MNC =$ W. $mNC = \varphi$ setzt, aus der Proportion $R : P = Sin\,2\varphi : Sin\,\varphi = 2\,Cos\,\varphi : 1$, oder wegen $\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}d\alpha$ aus $R : P = 2\,Sin\,\frac{1}{2}d\alpha : 1$ bestimmen lässt; es ist nämlich, wegen $Sin\,\frac{1}{2}d\alpha = \frac{1}{2}d\alpha$, sofort $R = P\,d\alpha$.

Da nun diese Kraft R den gesuchten Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm vorstellt, so ist, wenn f den betreffenden Reibungs-Coefficienten bezeichnet, $fR = fP\,d\alpha$ der Betrag der Reibung, folglich auch $dP = fP\,d\alpha$.

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Absonderung: $\frac{dP}{P} = f\,d\alpha$ und durch Integration: $logn.\,P = f\alpha + C$.

Um die unbestimmte Constante C zu bestimmen, bemerke man, dass für $\alpha = 0$ sofort $P = Q$ sein muss; diess gibt $logn.\,Q = C$, folglich wenn dieser Werth für C substituirt wird:

$$logn.\,P - logn.\,Q = f\alpha, \text{ oder } logn.\,\frac{P}{Q} = f\alpha,$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen selbst übergeht, auch: $\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$ oder $P = Q e^{f\alpha}$,

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist (vergleiche §. 292, Gleich. 1).