Reibung auf einem Kugelsegment.

164. Da man noch häufig bei stehenden Wellen Kugelzapfen anwendet, wodurch die Reibung anstatt auf einer ebenen Kreisfläche sofort auf einem Kugelsegment stattfindet, so wollen wir diesen Fall hier noch entwickeln.

Benützen wir zu diesem Ende die Fig. 67, welche den Durchschnitt des halbkugelförmigen Zapfens mit einer durch den Mittelpunct der Kugel gelegten Verticalebene bezeichnen soll und nehmen an, dass sich das Segment aDb in einer entsprechenden hohlen Kugelschale reibt, und dass dafür der Kugelhalbmesser $CA = CD = r$, jener der oberen Kreisfläche des Segmentes $Oa = Ob = \varrho$, der gesammte lothrechte Druck $= Q$ und der Reibungs-Coefficient wieder $= f$ sei. Diess angenommen, durchschneide man das Kugelsegment in den Abständen $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ mit den beiden durch P und p gehenden horizontalen, unendlich nahe liegenden Ebenen, so begrenzen diese auf der Oberfläche eine unendlich schmale Zone Mm von der Höhe $\mathrm{d}x$, deren Horizontalprojection $= 2\pi y \,\mathrm{d}y$ ist, wenn man nämlich die Ordinate $PM = y$ setzt. Auf diese Projection oder Ringfläche entfällt aber von dem Gesammtdrucke Q der Theil $\mathrm{d}Q$, welcher wieder aus der Proportion $Q : \mathrm{d}Q = \varrho^2\pi : 2\pi y\,\mathrm{d}y$ gefunden wird, weil man sich die ganze reibende Kugeloberfläche aDb in solche unendlich schmale Zonen Mm zerlegt und den Totaldruck Q der Welle auf diese im Verhältniss ihrer horizontalen Projectionen vertheilt denken kann, und weil, wie bemerkt, $2\pi y\,\mathrm{d}y$ diese Projection für das Element und $\varrho^2\pi$ jene für die ganze reibende Fläche ist.

Aus dieser Proportion folgt nun $\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{\varrho^2} y\,\mathrm{d}y$, und wenn man diesen in M wirkenden verticalen Druck in einen Druck t nach der Tangente des Kreises ADB und in einen Normaldruck n zerlegt und den Winkel, welchen die Normale mit der Verticalen einschliesst, mit α bezeichnet, so ist der Normaldruck $n = \mathrm{d}Q . Cos\,\alpha$, oder wenn man für $\mathrm{d}Q$ den vorigen Werth setzt und berücksichtiget, dass $Cos\,\alpha = \frac{CP}{CM} = \frac{x}{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$ ist, indem aus der Gleichung des Kreises $AMDB$, nämlich aus $x^2 + y^2 = r^2$ sofort $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ folgt, auch: $n = \frac{2Q}{\varrho^2} y\,\mathrm{d}y \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$. Es ist daher der Betrag der Reibung für dieses Element der reibenden Oberfläche $= nf$ und die Wirkung oder Arbeit dieser Reibung während einer Umdrehung der Welle:

$$dw = 2\pi y . nf = \frac{4\pi f Q}{\varrho^2} y^2 dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2},$$

also die Arbeit der ganzen reibenden Oberfläche:

$$w = \frac{4\pi f Q}{\varrho^2} \int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}.$$

Nun ist, wenn man Kürze halber $\frac{y}{r} = x$ setzt (Comp. §. 814 und §. 817):

$$\int y^2 dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}[-x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} + arc\,Sin\,x],$$

folglich da für $y = \varrho$ das x in $\frac{\varrho}{r} = a$ übergeht, wenn man nämlich der Kürze wegen a statt $\frac{\varrho}{r}$ setzt, dagegen der ganze Integralausdruck für $y = 0$ verschwindet, so hat man:

$$\int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}[-a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2} + arc\,Sin\,a].$$

Löst man sowohl $arc\,Sin\,a$ als auch $\sqrt{1-a^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von a fortlaufende Reihe auf, so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}\left(\frac{16}{2\cdot3}a^3 - \frac{32}{2\cdot4\cdot5}a^5 - \frac{48}{2\cdot4\cdot6\cdot7}a^7 - \ldots\right)$$

$$= \frac{r^3 a^3}{3}\left(1 - \frac{3}{10}a^2 - \frac{3}{56}a^4 - \ldots\right)$$

Es ist daher endlich, wenn man für a den Werth wieder herstellt und abkürzt, die Arbeit der Reibung während einer Umdrehung des Kugelzapfens:

$$w = \tfrac{4}{3}\pi f Q \varrho \left[1 - \frac{3}{10}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - \frac{3}{56}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - \ldots\right].$$

Ist die Höhe des im Lager laufenden Kugelsegmentes DO so gering, dass $\frac{\varrho}{r}$ eine so kleine Grösse wird, um die höheren Potenzen dieses Bruches in der Reihe gegen das 1ste Glied ohne Fehler vernachlässigen zu können; so ist, wie bei der Reibung auf der ebenen Kreisfläche vom Halbmesser ϱ:

$$w = \tfrac{4}{3}\varrho\pi f Q \quad \text{(vergl. Nr. \textbf{163})}.$$

Liegt dagegen die volle Halbkugel im Lager, so ist wegen $\varrho = r$, der genäherte Werth der obigen Reihe $= \cdot 6$, folglich jener der Arbeit:

$$w = \tfrac{4}{5} r \pi f Q.$$

Anmerkung 1. Besitzt der Zapfen, wie diess auch manchmal vorkommt, die Form eines nach unten verjüngten **abgestutzten Kegels**, welcher sich in seinem genau passenden konischen Lager bloss auf der Mantelfläche reibt, so findet man genau auf dieselbe Weise, wenn man den oberen und unteren Halbmesser des Zapfens durch R und r, sowie die Kante oder Seite des abgestutzten Kegels durch a bezeichnet, dann Q und f wieder die vorige Bedeutung haben, für die von der Zapfenreibung während einer Umdrehung absorbirte Arbeit:

$$w = \tfrac{4}{3}\pi f Q \frac{R^3 - r^3}{(R + r)\,a}.$$

Für $r = 0$ und $a = R$ erhält man, wie es sein soll, $w = \frac{4}{3} R\pi f Q$, weil dann die reibende Fläche in eine ebene Kreisfläche vom Halbmesser R übergeht.

Anmerkung 2. Ganz auf dieselbe Weise findet man für einen **horizontal** liegenden Wellzapfen, welcher in seinem Lager, den Kreisbogen aDb (Fig. 67) vollkommen berührend aufliegt, und wobei $CA = CD = r$ der Halbmesser des reibenden Zapfens, $aO = a$ die halbe Sehne ab, Q der verticale Druck auf den Zapfen und f wieder der Reibungs-Coefficient ist, für die Arbeit oder Wirkung der Reibung während einer Umdrehung des Zapfens, den Ausdruck:

$$w = \frac{2r\pi f Q}{a}\int_0^a dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

und wenn man integrirt (Comp. §. 819, Beisp. 2):

$$w = \frac{r\pi f Q}{a}\left[a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} + r\, arc\, Sin\left(\frac{a}{r}\right)\right],$$

oder wenn man wieder auf die Reihen übergeht und mit a abkürzt:

$$w = 2r\pi f Q\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{112}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - .\right].$$

Bildet die halbe Mantelfläche des Zapfens die reibende Fläche, so ist $a = r$ und es ist ziemlich nahe $w = \frac{8}{5} r\pi f Q$.

Liegt dagegen bloss die unterste Kante der cylinderischen Oberfläche des Zapfens wie auf einer horizontalen Ebene auf, so wird a so klein, dass man in der vorigen Reihe, vom 2ten angefangen, alle Glieder vernachlässigen kann, und dann ist $w = 2r\pi f Q$, also die von der Reibung absorbirte Arbeit um $\frac{2}{5} r\pi f Q$ grösser als im vorigen Falle und gerade so gross, wie diese [vergl. §. 287, Gleich. (4)] für gewöhnlich in Rechnung gebracht wird.

Reibung eines Seiles über einen ruhenden Cylinder.

(§. 292.)

165. Ist das Seil, woran die Last Q hängt, um den Bogen $AM = r\alpha$ (Fig. 47) geschlagen, und steht die Kraft P mit dieser Last und der zwischen dem Seil und dem genannten Bogenstück des Cylinders C vom Halbmesser r im Gleichgewichte, d. h. kann