Winkel α', so ist auch $W = PS$, folglich:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} QN d\alpha' \ldots (1)$$

als allgemeine Gleichung.

162. Geht nun die gemeinschaftliche Tangente, wie es z. B. bei der Epicycloiden-Verzahnung der Fall ist, durch den Mittelpunct c (Fig. 46), so wird $\beta = \alpha'$, $AB = N = r Sin\,\alpha'$, und da, wenn P' die nöthige Tangentialkraft am Umfange der primitiven Kreise bezeichnet, um die Räder ohne Rücksicht auf die Reibung umzudrehen, $P' = Q Cos\,\alpha'$ ist, sofort $Q = \frac{P'}{Cos\,\alpha'}$ (wenn man nämlich den in der Richtung BA wirksamen Normaldruck Q in die zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte nach AR, welcher Kraft jene P' gleich sein muss, und AS zerlegt denkt). Diese Werthe in die vorige Gleichung (1) substituirt, geben:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} P'r\frac{Sin\,\alpha'}{Cos\,\alpha'}d\alpha' = AP'r\int_0^{\alpha'}\alpha' d\alpha' = fP'r\frac{(R+r)}{R}\cdot\frac{\alpha'^2}{2},$$

wenn man nämlich, was bei den hier vorkommenden kleinen Werthen von α' immer erlaubt ist, α' statt $tang\,\alpha'$ setzt.

Ist endlich b die Theilung oder Schrift der Räder, so findet der Angriff des Zahnes des treibenden Rades nach der Regel während des Bogens $b = r\alpha'$ statt, woraus $\alpha' = \frac{b}{r}$, folglich die ganze Wirkung, wofür auch $S = b$ zu setzen ist:

$$Pb = fP'\frac{(R+r)}{Rr}\frac{b^2}{2}, \text{ d. i. } P = \tfrac{1}{2}fP'b\frac{(R+r)}{Rr}.$$

Sind aber m und m' die Anzahl der Zähne in den beiden Rädern C und c, so ist (§. 259) $b = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$, folglich:

$$\frac{R+r}{Rr}b = 2\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right)$$

und daher endlich: $P = f\pi P'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$.

Reibung eines Cylinders auf seiner Grundfläche.

(§. 286.)

163. Ist $CA = r$ (Fig. 37) der Halbmesser der ebenen Grundfläche des Cylinders, auf welche der Normaldruck Q stattfindet und welche zugleich die reibende Fläche sein soll; so ziehe man aus ihrem Mittelpuncte C mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ die beiden concentrischen Kreise, welche sofort die Fläche $2\,x\pi\,\mathrm{d}x$ einschliessen. Da der Druck Q über die ganze Kreisfläche gleichförmig vertheilt ist, so kommt davon auf dieses unendlich schmale Kreisband der Theil $\mathrm{d}Q$, welcher sich aus der Proportion $\mathrm{d}Q : Q = 2\,x\pi\,\mathrm{d}x : r^2\pi$ bestimmen lässt, und zwar folgt daraus $\mathrm{d}Q = \frac{2\,Q}{r^2}\,x\,\mathrm{d}x$. Der Betrag der Reibung ist daher, wenn f den Reibungs-Coefficienten bezeichnet, $f\mathrm{d}Q$, sowie das statische Moment der Reibung in Beziehung auf die Umdrehungsachse

$$\mathrm{d}S = x\,.\,f\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{r^2}fx^2\,\mathrm{d}x, \text{ woraus } S = \frac{2Q}{r^2}f\int_0^r x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}\,r f Q$$

für das Moment der ganzen Reibung folgt, gerade so, als fände der Widerstand der Reibung fQ lediglich auf der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $\frac{2}{3}\,r$ statt.

Ist daher P' die am Umfange des Cylinders nöthige Kraft, um diese Reibung zu überwinden oder mit ihr im Gleichgewichte zu stehen, so ist auch $P'r = S = \frac{2}{3}\,r f Q$, folglich:

$$P' = \tfrac{2}{3} f Q.$$

(Vergleiche §. 286.)

Die durch die Reibung während einer Umdrehung der gewöhnlich vertical stehenden Welle absorbirte Arbeit ist $w = 2 r\pi P' = \frac{4}{3}\,r\pi f Q$. Auch lässt sich diese gleich in dem unendlich schmalen Kreisring ausdrücken, indem $\mathrm{d}w = 2\,\pi\,x f\,\mathrm{d}Q = \frac{4\,\pi f Q}{r^2}\,x^2\,\mathrm{d}x$ ist, woraus durch Integration ebenfalls wieder

$$w = \frac{4\,\pi f Q}{r^2}\int_0^r x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,r\,\pi\,f Q$$

gefunden wird.

Anmerkung. Ist nicht die volle Kreisfläche, sondern nur ein Kreisband vom äusseren und inneren Halbmesser R und r die reibende Fläche, so ist $\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{R^2 - r^2}x\,\mathrm{d}x$, folglich die Arbeit der Reibung des Flächenelementes während einer Umdrehung: $\mathrm{d}w = \frac{4\,\pi f Q}{R^2 - r^2}\,x^2\,\mathrm{d}x$, und sonach die Arbeit der Reibung für die ganze reibende Fläche:

$$w = \frac{4\,\pi f Q}{R^2 - r^2}\int_r^R x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,\pi f Q\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right),$$

oder auch, wenn man abkürzt:

$$w = \tfrac{4}{3}\,\pi f Q\left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}\right),$$

ein Ausdruck, welcher offenbar grösser als der obige ist.