Werth aus (1) oder (2) substituirt, sofort für den 1sten Fall:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}} \text{ und im 2ten: } v = \sqrt{c^2 + \frac{2gBs}{Q}}.$$

Nun ist aber [Nr. **120**, (α)] $dt = \frac{ds}{v}$, oder für den 1sten Fall: $dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}}$, und wenn man integrirt:

$$t = \frac{Q}{gA}\left(-c + \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}\right),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $s = 0$ auch $t = 0$ ist.

Sucht man aus dieser letzteren Gleichung den Weg s, so findet man: $s = \frac{gA}{2Q}t^2 + ct$ und damit aus $v = \frac{ds}{dt}$, die Endgeschwindigkeit: $v = \frac{gA}{Q}t + c$.

Für den 2ten Fall darf man nur B statt A in diesen Formeln setzen.

Ist als specieller Fall $\alpha = 0$ und auch $i = 0$, also sowohl die Ebene, als auch die Richtung der Kraft P horizontal, so erhält die Grösse A aus der obigen Relation (1) den Werth $P - fQ$, und es ist dafür:

$$s = \frac{g}{2Q}(P - fQ)t^2 + ct \text{ und } v = \frac{g}{Q}(P - fQ)t + c,$$

wie es sein soll [vergl. Nr. **122**, Relat. (4)].

Anmerkung. Soll die Bewegung auf der schiefen Ebene eine gleichförmige werden, so muss die Wirkung auf Beschleunigung, d. i. $W = 0$ sein. Setzt man daher die obigen Ausdrücke (1) und (2) Null und bestimmt daraus die Kraft P, so erhält man:

$$\text{für den 1sten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha + fCos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i + fSin\,i}$$

$$\text{und für den 2ten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha - fCos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i - fSin\,i},$$

welche Ausdrücke sofort, wie es sein soll, mit jenen [§. 280, Relat. (1)] für das statische Gleichgewicht übereinstimmen.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 284.)

161. Die in §. 284 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne lässt sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seien $CA = R$ und $cA = r$ (Fig. 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und die Berührung der beiden Zähne NB und nB, welche im Puncte A begonnen, sei bereits bis zu einem Punct B fortgerückt, wofür $ACB = \alpha$ und $AcB = \alpha'$ die Mittelpunctswinkel sein sollen. Bei dem weiteren unendlich wenigen Fortrücken der Räder nimmt α um $d\alpha$ und α' um $d\alpha'$ zu, wobei der Berührungspunct B des Zahnes BN den Kreisbogen $BB' = CB\,d\alpha$ und jener des Zahnes Bn den Kreisbogen $BB'' = cB\,d\alpha'$ beschreibt.

Da man während dieser unendlich kleinen Bewegung die Lage der gemeinschaftlichen Tangente DE als unverändert ansehen kann, so gleitet der Punct B des Zahnes BN auf dieser Tangente von B nach b, und des Zahnes Bn von B nach b', so dass der ganze Weg des Gleitens $s = Bb + Bb' = BB'\,Cos B'Bb + BB''\,Cos.B''Bb' = CB.d\alpha.Cos B'Bb + cB.d\alpha'.Cos B''Bb'$ ist.

Sind aber CD und cd perpendikulär auf dieser Tangente DE, so ist W. $B'Bb =$ W. BCD und W. $B''Bb' =$ W. Bcd, folglich:

$$CB.Cos B'Bb = CB.Cos.BCD = CD$$

und

$$cB.Cos B''Bb' = cB.Cos.Bcd = cd;$$

es ist daher auch, wenn man diese Perpendikel $CD = a$ und $cd = a'$ setzt:

$$s = a\,d\alpha + a'\,d\alpha'.$$

Ist ferner die vom Puncte A aus gezählte gemeinschaftliche Normale $AB = N$, so ist auch, wenn man W. $CED = \beta$ setzt:

$$a = CD = N + R Sin\beta \text{ und } a' = cd = N - r Sin\beta,$$

folglich auch: $s = N d\alpha + R Sin\beta\, d\alpha + N d\alpha' - r Sin\beta\, d\alpha'$, d. i.

$$s = N(d\alpha + d\alpha') + (R\,d\alpha - r\,d\alpha')\,Sin\beta.$$

Nun sind aber $R\,d\alpha$ und $r\,d\alpha'$ die Bögen oder Wege, welche der Punct A auf den primitiven Kreisen in derselben Zeit (dt) zurücklegt, und da diese bei einer richtigen Verzahnung (§. 249) gleich sein müssen, so ist $R\,d\alpha = r\,d\alpha'$ und daher $s = N(d\alpha + d\alpha')$ oder wegen $d\alpha = \frac{r}{R}d\alpha'$ auch $s = N\frac{(R+r)}{R}d\alpha'$.

Ist nun Q der zwischen den Zähnen stattfindende Normaldruck und f der Reibungs-Coefficient, so ist die auf Reibung verwendete Arbeit oder unendlich kleine Wirkung:

$$dW = fQs = fQN\frac{(R+r)}{R}d\alpha', \text{ also } W = f\frac{(R+r)}{R}\int QN\,d\alpha'.$$

Ist ferner P die nöthige Tangentialkraft (am Umfange der primitiven Kreise), um den Widerstand der Reibung zu überwinden und S ihr Weg während der Drehung des Rades c um den

Winkel α', so ist auch $W = PS$, folglich:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} QN d\alpha' \ldots (1)$$

als allgemeine Gleichung.

162. Geht nun die gemeinschaftliche Tangente, wie es z. B. bei der Epicycloiden-Verzahnung der Fall ist, durch den Mittelpunct c (Fig. 46), so wird $\beta = \alpha'$, $AB = N = r\,Sin\,\alpha'$, und da, wenn P' die nöthige Tangentialkraft am Umfange der primitiven Kreise bezeichnet, um die Räder ohne Rücksicht auf die Reibung umzudrehen, $P' = Q\,Cos\,\alpha'$ ist, sofort $Q = \frac{P'}{Cos\,\alpha'}$ (wenn man nämlich den in der Richtung BA wirksamen Normaldruck Q in die zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte nach AR, welcher Kraft jene P' gleich sein muss, und AS zerlegt denkt). Diese Werthe in die vorige Gleichung (1) substituirt, geben:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} P'r\frac{Sin\,\alpha'}{Cos\,\alpha'}d\alpha' = AP'r\int_0^{\alpha'}\alpha' d\alpha' = fP'r\frac{(R+r)}{R}\cdot\frac{\alpha'^2}{2},$$

wenn man nämlich, was bei den hier vorkommenden kleinen Werthen von α' immer erlaubt ist, α' statt $tang\,\alpha'$ setzt.

Ist endlich b die Theilung oder Schrift der Räder, so findet der Angriff des Zahnes des treibenden Rades nach der Regel während des Bogens $b = r\alpha'$ statt, woraus $\alpha' = \frac{b}{r}$, folglich die ganze Wirkung, wofür auch $S = b$ zu setzen ist:

$$Pb = fP'\frac{(R+r)}{Rr}\frac{b^2}{2}, \text{ d. i. } P = \tfrac{1}{2}fP'b\frac{(R+r)}{Rr}.$$

Sind aber m und m' die Anzahl der Zähne in den beiden Rädern C und c, so ist (§. 259) $b = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$, folglich:

$$\frac{R+r}{Rr}b = 2\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right)$$

und daher endlich: $\quad P = f\pi P'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$.

Reibung eines Cylinders auf seiner Grundfläche.

(§. 286.)

163. Ist $CA = r$ (Fig. 37) der Halbmesser der ebenen Grundfläche des Cylinders, auf welche der Normaldruck Q stattfindet und welche zugleich die reibende Fläche sein soll; so ziehe man