Reibung auf der schiefen Ebene.

(§. 280.)

159. Um die Bewegung eines Körpers auf der schiefen Ebene mit Rücksicht auf die vorhandene Reibung zu behandeln, seien wieder, wie in §. 280, α der Neigungswinkel der schiefen Ebene, i jener der Kraft P mit der schiefen Ebene, Q das Gewicht des Körpers, welcher durch diese Kraft über die schiefe Ebene hinaufgezogen wird, oder sein Hinabgehen mässigt, sowie f der Reibungs-Coefficient; dann ist, wenn man jede der beiden Kräfte P und Q in zwei Componenten zerlegt, wovon die eine parallel mit der Länge der schiefen Ebene und die andere darauf normal ist, die Seitenkraft aus P in der ersteren Richtung $= P \, Cos\, i$ und die ihr gerade entgegengesetzte aus der Last Q gleich $Q \, Sin\, \alpha$, sowie der Normaldruck auf die schiefe Ebene aus beiden der genannten Componenten $N = Q \, Cos\, \alpha - P \, Sin\, i$.

Findet daher eine Bewegung nach aufwärts statt und ist s der zurückgelegte Weg, so sind die Arbeiten oder Wirkungen von Seite der Kraft P, der Last Q und der Reibung, beziehungsweise $w = s P \, Cos\, i$, $w' = s Q \, Sin\, \alpha$ und $w'' = s f (Q \, Cos\, \alpha - P \, Sin\, i)$, und man erhält für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse $\frac{Q}{g}$, wenn die Bewegung über die schiefe Ebene **aufwärts** stattfindet: $W = w - w' - w''$ und wenn die Bewegung nach **abwärts** eintritt: $W = w' - w - w''$, d. i. im 1sten Falle:

$$W = s[P(f \, Sin\, i + Cos\, i) - Q(f \, Cos\, \alpha + Sin\, \alpha)] = sA \ldots (1),$$

und im 2ten Falle:

$$W = s[P(f \, Sin\, i - Cos\, i) - Q(f \, Cos\, \alpha - Sin\, \alpha)] = sB \ldots (2),$$

wenn man nämlich Kürze halber die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke beziehungsweise durch A und B bezeichnet.

160. Legt nun der Körper den Weg s in der Zeit t zurück, und besitzt derselbe zu Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit c und am Ende derselben jene v, so dass er in dieser Zeit die Geschwindigkeitsänderung $v - c$ erlitten hat; so ist dieselbe Wirkung W durch die lebendige Kraft ausgedrückt (§. 227) auch $\frac{Q}{2g}(v^2 - c^2)$, mithin $v = \sqrt{\frac{2gW}{Q} + c^2}$, und wenn man für W den

Werth aus (1) oder (2) substituirt, sofort für den 1sten Fall:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}} \text{ und im 2ten: } v = \sqrt{c^2 + \frac{2gBs}{Q}}.$$

Nun ist aber [Nr. **120**, (α)] $dt = \frac{ds}{v}$, oder für den 1sten Fall: $dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}}$, und wenn man integrirt:

$$t = \frac{Q}{gA}\left(-c + \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}\right),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $s = 0$ auch $t = 0$ ist.

Sucht man aus dieser letzteren Gleichung den Weg s, so findet man: $s = \frac{gA}{2Q}t^2 + ct$ und damit aus $v = \frac{ds}{dt}$, die Endgeschwindigkeit: $v = \frac{gA}{Q}t + c$.

Für den 2ten Fall darf man nur B statt A in diesen Formeln setzen.

Ist als specieller Fall $\alpha = 0$ und auch $i = 0$, also sowohl die Ebene, als auch die Richtung der Kraft P horizontal, so erhält die Grösse A aus der obigen Relation (1) den Werth $P - fQ$, und es ist dafür:

$$s = \frac{g}{2Q}(P - fQ)t^2 + ct \text{ und } v = \frac{g}{Q}(P - fQ)t + c,$$

wie es sein soll [vergl. Nr. **122**, Relat. (4)].

Anmerkung. Soll die Bewegung auf der schiefen Ebene eine gleichförmige werden, so muss die Wirkung auf Beschleunigung, d. i. $W = 0$ sein. Setzt man daher die obigen Ausdrücke (1) und (2) Null und bestimmt daraus die Kraft P, so erhält man:

$$\text{für den 1sten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha + f\,Cos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i + f\,Sin\,i}$$

$$\text{und für den 2ten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha - f\,Cos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i - f\,Sin\,i},$$

welche Ausdrücke sofort, wie es sein soll, mit jenen [§. 280, Relat. (1)] für das statische Gleichgewicht übereinstimmen.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 284.)

161. Die in §. 284 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne lässt sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seien $CA = R$ und $cA = r$ (Fig. 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und