Von dem Stosse *unelastischer* Körper.

(§. 241.)

158. Sind m und m' die Massen zweier homogener unelastischer Kugeln, deren Mittelpuncte sich auf einer geraden Linie nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c' bewegen und wobei, wenn m' die vorausgehende Kugel, $c > c'$ ist, folglich durch das Einholen ein gerader centraler Stoss entsteht; so stelle man sich vor, dass durch das Auf- oder Gegeneinanderwirken dieser beiden Massen während des Stosses, in Folge welcher die vorausgehende Kugel beschleunigt und die nachfolgende verzögert wird, diess durch eine zwischen beide wirkende beschleunigende Kraft geschieht, die also beim Beginn des Stosses ihren grössten Werth, und in dem Augenblicke als der Stoss vollendet ist, beide Massen also einerlei Geschwindigkeit haben, Null ist. Hat nun diese variable Kraft nach Verlauf der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt, als der Stoss beginnt, den Werth p, so kann man diesen, wie bekannt, während des darauf folgenden Zeitelementes dt als constant ansehen und da, wenn die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln m, m' nach Verlauf dieser genannten Zeit t, v und v' sind, während dieser Zeit dt die Geschwindigkeit v' um dv' zu-, dagegen jene v um dv abnimmt; so hat man nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten oder verzögernden Bewegung [§. 176, Gleich. (1) und §. 186, Gleich. (2)] $dv' = \frac{p}{m'}g\,dt$ und $dv = -\frac{p}{m}g\,dt$, oder da p eine gewisse, wenn uns auch unbekannte Function der von 0 bis t' wachsenden Zeit t ist, wenn man nämlich annimmt, dass der Stoss in der Zeit t' [welche, wenn auch noch so klein, doch kein untheilbarer Augenblick ist*)] vollendet sei, also $p = \varphi(t)$ gesetzt werden kann, auch:

$$dv' = \frac{g}{m'}\varphi(t)\,dt \text{ und } dv = -\frac{g}{m}\varphi(t)\,dt.$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man $\int\varphi(t)\,dt = \varphi'(t)$ setzt, wo $\varphi'(t)$ eine neue, ebenfalls unbekannte Function von t ist:

$$v' = \frac{g}{m'}\varphi'(t) + C \text{ und } v = C' - \frac{g}{m}\varphi'(t).$$

*) Wie diese Zeitdauer wenigstens näherungsweise bestimmt werden kann, findet man in unserer Beispielsammlung.

Um die Constanten C und C' der Integrationen zu bestimmen, bemerke man, dass für $t=0$, was wir durch t_0 anzeigen wollen, sofort $v'=c'$ und $v=c$ sein muss; hieraus folgt daher:

$$C=c'-\frac{g}{m'}\varphi'(t_0) \text{ und } C'=c+\frac{g}{m}\varphi'(t_0),$$

so dass also, wenn man diese Werthe substituirt, die vorigen Ausdrücke übergehen in:

$$v'=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t)-\varphi'(t_0)] \text{ und}$$

$$v=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t)].$$

Ist nun C die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoss, welche also nach unserer Voraussetzung nach Verlauf der Zeit t' eintritt, so darf man in den vorigen Relationen nur $t=t'$ und $v=v'=C$ setzen und man erhält:

$$C=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t')-\varphi'(t_0)]$$

$$C=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t')],$$

oder auch $\quad m'C=m'c'+g\varphi'(t')-g\varphi'(t_0)$

und $\quad mC=mc+g\varphi'(t_0)-g\varphi'(t')$.

Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man endlich: $\quad (m+m')C=mc+m'c'$

und daraus: $\quad C=\frac{mc+m'c'}{m+m'}$

[vergl. §. 241, Gleich. (1)].

Anmerkung 1. Der in §. 243 gefundene Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoss unelastischer Körper entsteht und mit Beibehaltung der hier gewählten Bezeichnung durch $m(c-C)^2+m'(C-c')^2$, nämlich so ausgedrückt werden kann, dass man sagt, dieser Verlust sei der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche den Geschwindigkeitsänderungen beider Massen m und m' entspricht, bildet in der Wesenheit den Carnot'schen Lehrsatz. Im Augenblicke des Zusammenstosses zweier Körper setzt nämlich jeder derselben durch die in Thätigkeit kommenden Molecularkräfte dem anderen, und zwar während der Dauer des Stosses, also auch durch einen gewissen Weg einen Widerstand entgegen; es verrichten sonach diese Kräfte während dieser Dauer des Stosses eine wirkliche Arbeit, die sowohl in einer Verschiebung der sich berührenden Molecüle (wie auch die Formänderung der Körper zeigt) als in der Geschwindigkeitsänderung beider Körper besteht. Jene Arbeit (oder lebendige Kraft), welche nothwendig ist, um beide Körper nach dem Stosse zur Ruhe zu bringen, ist daher genau um jene Arbeit der Molecularkräfte, welche während des Stosses in beiden Körpern thätig waren, kleiner als diejenige Arbeit, welche nöthig gewesen wäre, um die Körper noch vor dem Stosse in Ruhe zu versetzen; und diese Eigenschaft wird eben durch den Carnot'schen Lehrsatz, welcher in der industriellen Mechanik und im Maschinenwesen häufig zur Anwendung kommt, ausgedrückt.

Bezieht man diesen Lehrsatz auf ein ganzes System von unelastischen Körpern, in welchem sich ein plötzlicher Stoss ereignet und setzt man die Geschwindigkeit eines Theilchens von der Masse m vor dem Stoss $= V$ und nach dem Stoss in derselben Richtung $= v$; so ist $V - v$ die durch den Stoss verlorene Geschwindigkeit oder überhaupt (da diese Differenz auch negativ sein kann) die dadurch herbeigeführte Geschwindigkeitsänderung, und $m(V-v)^2$ die dieser Geschwindigkeitsänderung entsprechende lebendige Kraft. Nimmt man nun diese lebendige Kraft für alle Theilchen des Systemes, so ist nach diesem Lehrsatze der Verlust an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Stoss erlitten hat, gleich

$$\Sigma m (V-v)^2 \dots (1).$$

Aendert aber irgend ein Massentheilchen m nicht bloss, wie es hier vorausgesetzt wurde, seine Geschwindigkeit, sondern überdiess noch nach dem Stosse seine Richtung, so seien X, Y, Z die durch Zerlegung der Geschwindigkeit V nach den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen entstehenden Seitengeschwindigkeiten dieses Theilchens m vor, sowie x, y, z jene nach dem Stosse; so ist der durch den Stoss herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft gleich

$$\Sigma m [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2] \dots (2).$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit V vor dem Stosse, und α', β', γ' jene, welche die Richtung der Geschwindigkeit v nach dem Stosse mit den Achsen der x, y, z bilden, sowie φ der Winkel dieser beiden Richtungen gegeneinander; so ist wegen $X = V Cos\,\alpha$, $Y = V Cos\,\beta$, $Z = V Cos\,\gamma$, $x = v\,Cos\,\alpha'$, $y = v\,Cos\,\beta'$, $z = v\,Cos\,\gamma'$, sofort

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = V^2 + v^2 - 2Vv(Cos\,\alpha\,Cos\,\alpha' + Cos\,\beta\,Cos\,\beta' + Cos\,\gamma\,Cos\,\gamma') = V^2 + v^2 - 2Vv\,Cos\,\varphi.$$

Aendert sich die Richtung nach dem Stosse nicht, so wird $\varphi = 0$ und der vorige Verlust ist $= V^2 + v^2 - 2Vv = (V-v)^2$, wie es sein soll.

Anmerkung 2. Der im §. 246 entwickelte Satz, dass durch den Stoss vollkommener elastischer Körper kein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, setzt noch voraus, dass im Augenblicke des Auseinandergehens oder Zurückspringens der Körper im Inneren derselben durch die eingetretene Erschütterung der Molecüle keine Schwingungen oder Vibrationen mehr stattfinden. So würde z. B. eine im leeren Raume auf eine feste horizontale Platte frei herabfallende Kugel, selbst wenn durch den Fall oder Stoss die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, die Kugel noch keineswegs mit derselben Geschwindigkeit, die sie erlangt hat, zurückspringen, also wieder dieselbe Höhe, durch die sie gefallen, erreichen, wenn im Augenblicke des Zurückspringens in der Platte oder Kugel solche Vibrationen vorhanden sind.