folglich wenn man diesen Werth für das zweite Integral substituirt:

$$\mathfrak{M} = 8m\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{r^2\pi}{4}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz = 2mr^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz$$

$$= 2mr^2\pi\left(\frac{r^2 l}{8}+\frac{l^3}{24}\right),$$

oder wegen $M = mr^2\pi l$ endlich:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2)\ldots(e).$$

152. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit [Nr. **136.**, Gleich. (1)]:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2) + M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2+4l^2),$$

oder auch:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **150.** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (d) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (e) wegen $l = NN' = 2\varrho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2+4\varrho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\varrho^2}{3}\right)$, so dass also das eigentliche Moment der Trägheit der in **150.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (d) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Grösse δ ab, so muss man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}'' + (M-M')\delta^2 = \mathfrak{M}'' + M''\delta^2,$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§§. 230—234.)

153. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit [§. 200, Gleich. (3)] auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, sowie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die

Kurbelwarze M hin- und herschiebt, um die Kurbel umzudrehen, so ist, wenn die Kurbelwarze nach M gekommen und dafür der Winkel $ACM = \alpha$ ist, die aus der Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte abgeleitete Tangentialkraft $p = P \, Sin \, \alpha$. Da aber diese veränderliche Kraft p, während die Warze um einen unendlich kleinen Bogen fortschreitet, d. i. α um $d\alpha$ zunimmt, als constant angesehen werden kann, so ist ihre Wirkung dw oder Arbeit während ihres Fortschreitens um $r\,d\alpha$, nach §. 213:

$$dw = p\,r\,d\alpha = P\,r\,Sin\,\alpha\,d\alpha.$$

Da aber während dieser Zeit die Last Q um den Weg $r\,d\alpha$ gehoben wird, so ist gleichzeitig ihre Wirkung, oder wenn man will die geleistete Arbeit:

$$dw' = Q\,r\,d\alpha,$$

und da der Ueberschuss dieser beiden Wirkungen $dw - dw'$ auf Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M verwendet wird, je nachdem $dw \gtrless dw'$, der letztere Fall aber immer in dem ersteren begriffen ist (und durch das Zeichen dieser Differenz ausgedrückt wird); so ist also, während die Kurbelwarze von dem Puncte M um einen unendlich kleinen Bogen fortgeht, die auf Beschleunigung der Masse M verwendete Arbeit:

$$dW = dw - dw' = P\,r\,Sin\,\alpha\,d\alpha - Q\,r\,d\alpha.$$

Aus dieser Differenzialgleichung folgt durch Integration ganz einfach:

$$W = r\,(P\,Sinv.\alpha - Q\,\alpha) \ldots (a),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $\alpha = 0$ auch noch $W = 0$ ist.

154. Soll die Kurbel bei ihrer Bewegung in den Beharrungsstand kommen, d. h. eine gewisse Gleichförmigkeit erlangen, wodurch ihre mittlere Geschwindigkeit endlich constant wird, so muss zwischen der Kraft P und der Last Q ein bestimmtes Verhältniss stattfinden, welches wir ganz einfach aus der Betrachtung finden, dass die Warze im Beharrungsstande an den beiden Endpuncten irgend eines, z. B. des Durchmessers AA', einerlei Geschwindigkeit besitzen müsse, weil, wenn diese durch die Bewegung im oberen Halbkreise ABA' hervorgebracht, in $A' \gtrless A$ wäre, aus gleichem Grunde diese Geschwindigkeit durch die Bewegung im unteren Halbkreise $A'B'A$ erzeugt, in $A \gtrless A'$, dann wieder in $A' \gtrless A$ u. s. w., die Kurbelwarze also entweder fortwährend beschleunigt oder verzögert würde, was gegen die Voraussetzung des Beharrungsstandes ist. Da also, während die Kurbelwarze den Halbkreis ABA' zurücklegt, wobei der Weg der Kraft $= AA' = 2r$ und jener der Last $=$ Bog. $ABA' = r\pi$ ist, die Wirkung oder Arbeit von Seite der Kraft P jener der Last Q gleich sein muss (weil jeder Ueberschuss Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M, also auch der Kurbelwarze hervorbringt), so hat man:

$$P.2r = Q.r\pi \text{ und daraus } P:Q = \pi:2 \text{ oder } Q = \frac{2}{\pi}P \ldots (m).$$

Diese für den Beharrungsstand der Kurbelbewegung nothwendige Relation zwischen P und Q erhält man auch, wie es sein soll, aus der obigen Gleichung (a), wenn man in dieser gleichzeitig $\alpha = 180^0$ und $W = 0$ setzt.

Setzt man daher diesen Werth von Q aus der Gleichung (m) in die obige Gleichung (a), so erhält man für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse M:

$$W = rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \ldots (b).$$

155. Diese zur Beschleunigung, oder überhaupt zur Geschwindigkeitsänderung der Masse M nöthige Arbeit oder Wirkung W lässt sich aber auch nach §. 227 durch die sogenannte lebendige Kraft ausdrücken. Nimmt man nämlich an, dass die Kurbelwarze, sobald der Beharrungsstand eingetreten ist, im Puncte A (also auch in A') die constante Geschwindigkeit c, dagegen im Puncte M die veränderliche Geschwindigkeit v besitze, so ist, wenn h und z die Geschwindigkeitshöhen zu c und v bezeichnen (also $h = \frac{c^2}{2g}$, $z = \frac{v^2}{2g}$ ist) die nöthige Wirkung, um die Masse M, während die Kurbelwarze den Weg AM zurücklegt, von der Geschwindigkeit c auf jene v zu bringen (§. 227): $W = M(z - h)$; folglich ist, wenn man diesen Werth dem vorigen in (b) gleichsetzt: $M(z-h) = rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right)$, oder:

$$Mz = Mh + rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \ldots (c).$$

156. Da die Tangentialkraft $p = P\,Sin\,\alpha$ von Null (im Puncte A) bis P (im Puncte B) allmählich oder continuirlich zunimmt und vermöge der Relation (m) (in **154.**) $P > Q$ ist, so muss es zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ (welche Werthe den genannten beiden Puncten A und B entsprechen) einen Werth α' geben, wofür $p = P\,Sin\,\alpha' = Q$, d. h. wenn $ACD = \alpha'$ ist, so muss im Puncte D die Tangentialkraft p ebenso gross als die Last Q sein, und da es im oberen Halbkreise ABA' noch einen zweiten Punct D' von gleicher Beschaffenheit gibt (wofür nämlich W. $A'CD' = 180^0 - \alpha'$ ist), ferner im unteren Halbkreise $A'B'A$ zwei ähnliche Puncte E und E' vorkommen (wofür man nur $D'C$ und DC verlängern darf), so folgt, dass während die Kurbelwarze den Kurbelkreis einmal durchläuft, die auf Umdrehung wirklich verwendete Kraft, d. i. die Tangentialkraft p viermal und zwar in den Puncten D, D', E', E, der gerade entgegenwirkenden Last Q gleich, dagegen von E bis D und von D' bis E' kleiner, dann von D bis D' und von E' bis E grösser als diese Last Q ist; hieraus folgt aber ferner, dass die Bewegung der Kurbelwarze durch die Bögen ED und $D'E'$ gar nicht stattfinden könnte, wenn diess nicht auf Kosten der mit ihr oder dem Kurbelkreis verbundenen Masse M, welche durch den Ueberschuss der Kraft p über Q, durch die Bögen DD' und $E'E$ beschleunigt worden, geschähe, und wodurch jetzt die Masse verzögert wird. Betrachtet man daher, da sich im unteren Halbkreise dasselbe wiederholt, nur die Bewegung im oberen Halbkreise, so folgt, dass die Masse, also auch die Kurbelwarze, von A bis D verzögert, und von D bis D' beschleunigt wird, so dass in D die kleinste und in D' die grösste Geschwindigkeit eintritt. Diese bemerkenswerthen Puncte D und D' bestimmen sich aber aus der Gleichung $P\,Sin\,\alpha' = Q$, woraus: $Sin\,\alpha' = \frac{Q}{P} = \frac{2}{\pi}$ [wegen Relat. (m)] folgt, und wobei der spitze Winkel $\alpha' = ACD$ und der stumpfe

$$\alpha'' = 180^0 - \alpha' = ACD' \quad \text{ist.}$$

Bestimmt man aber aus dieser Gleichung $Sin\,\alpha' = \frac{2}{\pi}$ den Winkel α', so findet man $\alpha' = 39^0\,32'\,25'' = $ W. ACD, folglich $\alpha'' = $ W. $ACD' = 180^0 - 39^0\,32'\,25'' = 140^0\,27'\,35''$.

Anmerkung 1. Diese beiden Winkel α' und α'', welche beziehungsweise der kleinsten und grössten Geschwindigkeit v der Kurbelwarze, folglich auch der kleinsten und grössten Geschwindigkeitshöhe z entsprechen, findet man auch ganz einfach aus der Gleichung (c) in **155.** nach den bekannten Regeln für das Maximum und Minimum. Denn es folgt daraus:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{rP}{M}\left(Sin\,\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = 0, \text{ oder } Sin\,\alpha = \frac{2}{\pi},$$

und zwar erhält man für α zwei Werthe, den einen $\alpha' < 90^0$ und den zweiten $\alpha'' = 180^0 - \alpha' > 90^0$.

Da der zweite Differentialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{rP}{M} Cos\, \alpha$, für den ersteren Werth oder $\alpha = \alpha'$ positiv, dagegen für $\alpha = \alpha''$ negativ wird, so folgt in der That wie vorhin, dass im 1sten Quadranten, und zwar für $\alpha' = 39^0 32' 25''$ das Minimum, und im 2ten Quadranten, für $\alpha'' = 180^0 - \alpha'$ das Maximum der Geschwindigkeit der Kurbel stattfindet.

Anmerkung 2. Schwieriger, und von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades abhängig, wird die Bestimmung dieser beiden Winkel, wenn man ausser der auf den Kurbelkreis reducirten Masse M auch noch annimmt, dass mit der Schubstange MP ebenfalls eine Masse verbunden ist; bezeichnet man diese nämlich mit M', so muss man, da die Geschwindigkeit der Kurbelwarze im Puncte M parallel mit dem Durchmesser AA' (welches die Geschwindigkeit der Masse M' ist) $v_1 = v\, Sin\, \alpha$, also die auf den Kurbelkreis reducirte Masse m wegen $mv^2 = M'v_1^2$ (§. 200, Anmerk.) $= M'\frac{v_1^2}{v^2} = M' Sin\, \alpha^2$ ist, im ersten Theil der Gleichung (c) in **155.** statt Mz setzen $(M + M' Sin\, \alpha^2) z$. (Eigentlich müsste auch im 2ten Theil $M + M' Sin\, \alpha$ statt M gesetzt werden, allein es hat dieses Glied keinen Einfluss auf diese Bestimmung.)

Uebrigens kann man in der Anwendung überall diese Masse M' (welche dahin wirkt, den Winkel α' zu vergrössern) unberücksichtigt und die bisherige einfachere Voraussetzung gelten lassen.

157. Bezeichnet man die in den Puncten D und D' stattfindende kleinste und grösste Geschwindigkeit der Kurbelwarze mit c' und c'', sowie die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen mit h' und h'', so erhält man aus der Gleichung (c) in **155.**:

$$Mh'' = Mh + rP\left(Sinv.\, \alpha'' - \frac{2\alpha''}{\pi}\right)$$

und

$$Mh' = Mh + rP\left(Sinv.\, \alpha' - \frac{2\alpha'}{\pi}\right),$$

folglich wenn man subtrahirt und statt $Sinv.$ den Werth $1 - Cos.$ setzt:

$$M(h'' - h') = rP\left[Cos\, \alpha' - Cos\, \alpha'' - \frac{2}{\pi}(\alpha'' - \alpha')\right],$$

oder wegen $Cos\, \alpha'' = Cos\,(180^0 - \alpha') = - Cos\, \alpha'$ und $\alpha'' = \pi - \alpha'$ auch

$$M(h'' - h') = 2rP\left(Cos\, \alpha' + \frac{2\alpha'}{\pi} - 1\right),$$

und wenn man für α' den oben gefundenen Werth von $39^0 32' 25''$ setzt, in $\frac{2\alpha'}{\pi}$ den Winkel in Bogenlänge ausdrückt und reducirt, auch $M(h'' - h') = {\cdot}42103\, rP$, woraus sofort $M = \frac{{\cdot}42103\, rP}{h'' - h'} = \frac{{\cdot}84206\, rgP}{c''^2 - c'^2}$ folgt [vergl. §. 234, Gleich. (1)].