$$\frac{4r\pi^2}{gt^2} = \frac{1}{289}, \text{ folglich:}$$

$$g = G - \frac{g}{289}, \text{ oder auch nahe } g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right),$$

so dass also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dass wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal grösser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null sein würde.

Anmerkung 2. Nimmt man auf die allmähliche Abnahme der Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin, sowie auch auf die Abplattung der Erde selbst Rücksicht, so kann man, wenn g' die Intensität oder Beschleunigung der Schwere in dem Parallelkreis von der Breite von 45° bezeichnet, sofort für jeden Ort der Erde, für welchen die geographische Breite $= \varphi^0$ ist, sehr nahe

$$g = g'(1 - {\cdot}002588 \, Cos\, 2\varphi)$$

setzen. So ist z. B. im Metermass $g' = 9{\cdot}80558$, folglich für Paris wegen $\varphi = 48^0\, 50'\, 14''$ nach dieser Formel:

$$g = 9{\cdot}80558 \times 1{\cdot}0003456 = 9{\cdot}80896 \text{ Meter.}$$

Auf den Wiener Fuss bezogen, kann man $g' = 31{\cdot}0203$ setzen; folglich ist für Wien, wegen $\varphi = 48^0\, 12'\, 36''$ die Beschleunigung der Schwere:

$$g = 31{\cdot}0203 \times 1{\cdot}00028938 = 31{\cdot}02927 \text{ Fuss.}$$

Nach den von Pouillet im J. 1854 aus den Gesammt-Beobachtungen zusammengestellten wahrscheinlichsten Werthen wäre für das Metermass:

$$g = 9{\cdot}806055\,(1 - {\cdot}00255237 \, Cos\, 2\varphi).$$

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 200.)

135. Schwingt oder rotirt ein materieller Punct von der Masse m in Folge der Einwirkung einer Kraft mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um irgend eine Achse, von welcher er die Entfernung r besitzt, so wird (§. 200) das Product mr^2, aus der Masse in das Quadrat des Abstandes derselben von der Drehungsachse das Moment der Trägheit dieser Masse genannt. Soll eine andere Masse M, welche in der Entfernung $= 1$ von der Drehungsachse angebracht ist, durch dieselbe oder eine gleich grosse Kraft ebenso bewegt werden, d. i. die nämliche Winkelgeschwindigkeit wie die erstere Masse m im Abstande r erhalten, so muss [§. 200, Gleich. (1)] diese Masse $M \times 1^2 = mr^2$, d. i. $M = mr^2$ sein, so dass also auch diese letztere Masse M als Mass für das Moment der Trägheit der im Abstande r befindlichen Masse m gelten kann*).

Dehnt man diese in Beziehung auf einen materiellen Punct gegebene Definition auf einen Körper von was immer für Dimensionen aus, so versteht man unter dem Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf irgend eine Gerade als Umdrehungsachse, die Summe der Producte der Massen aller einzelnen Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von dieser Geraden. Bezieht man die Lage des Körpers, dessen Masse $= M$

*) Nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise setzt jede Masse der bewegenden Kraft einen Widerstand entgegen, der um so grösser ist, je grösser die Masse, oder je grösser die Geschwindigkeit ist, welche die Masse erlangen soll, und in diesem Sinne sagt man auch, dass die im Abstande 1 von der Drehachse angebrachte Masse $M = mr^2$ der drehenden Bewegung denselben Widerstand wie die Masse m im Abstande r entgegensetze. Allein wir wiederholen hier, dass diese Art sich kurz auszudrücken, wobei man sich offenbar von dem Gefühle, welches mit jeder Kraftanstrengung verbunden ist und nur zu leicht mit der Empfindung eines dadurch hervorgerufenen Widerstandes von Seite der zu bewegenden Masse verwechselt wird, keineswegs zu dem falschen Begriff verleiten lassen darf, als ob sich die Masse als etwas Selbstthätiges der Bewegung nur mit einem gewissen Widerstreben füge und sonach in der That einen gewissen Widerstand leiste. Decher gebraucht aus diesem Grunde anstatt der Benennung: Moment der Trägheit, weit zweckmässiger jene: Moment der Massen. Wir behalten die erstere als die allgemein übliche bei, ohne nach den gegebenen Erklärungen und Bemerkungen eine Begriffsverwirrung zu besorgen. (M. s. 15. in Nr. **131**.)

Mit Benützung der lebendigen Kräfte oder Arbeitsgrössen (§. 227) lässt sich die hier erwähnte Fundamentalgleichung (1) in §. 200 auch von einem anderen Gesichtspuncte aus, und zwar in folgender Weise entwickeln.

Schwingen zwei in den Puncten B, B' einer Geraden AD befindlichen materiellen Puncte von den Massen M und M' um einen Punct A dieser Geraden und erlangen sie, während diese Gerade den Winkel DAD' beschreibt, die Geschwindigkeiten v und v', so sind die zur Erzeugung dieser Geschwindigkeiten nöthigen Arbeitsgrössen, wenn nämlich diese Massen nicht gleichzeitig, sondern jede für sich schwingt, beziehungsweise $\frac{1}{2}Mv^2$ und $\frac{1}{2}M'v'^2$. Sollen nun diese Arbeitsgrössen einander gleich, d. i. sollen in dieser Beziehung diese beiden Massen M und M' in den Entfernungen vom Drehungspunct $AB = a$ und $AB' = a'$ einander gleichgeltend oder äquivalent sein, so muss die Gleichung $Mv^2 = M'v'^2$ oder wegen $v:v' = a:a'$ (da die beiden Massen einerlei Winkelgeschwindigkeiten haben, d. i. $\frac{v}{a} = \frac{v'}{a'}$ sein soll) jene $Ma^2 = M'a'^2$ stattfinden, welches eben die erwähnte Fundamentalgleichung (1) in §. 200 ist.

sein soll, auf drei rechtwinkelige Achsen und nimmt die Umdrehungsachse für die Achse der z, so ist das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Achse:

$$\mathfrak{M} = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}M,$$

wobei $\mathrm{d}M$ die Masse des Elementes oder materiellen Punctes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und wobei sich das Integrale auf die gesammte Masse M erstreckt (es steht nämlich hier $\mathrm{d}M$ statt d^3M und $\int$ statt $\iiint$). Auf gleiche Weise bezeichnen die Ausdrücke:

$$\int (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}M \text{ und } \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}M$$

die Trägheitsmomente dieses Körpers in Beziehung auf die Achsen der y und x.

136. Kennt man das Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf irgend eine Achse, so kann man dasselbe leicht auch für jede andere, mit der ersteren parallele Achse finden.

Denn nimmt man die erstere Achse oder Gerade zur Achse der z und legt durch diese und die mit ihr parallele Gerade oder neue Achse die Ebene der xz, setzt den Abstand dieser beiden Geraden $= a$, die Masse des Körpers $= M$ und bezeichnet das Moment der Trägheit desselben in Bezug auf die Achse der z durch $\mathfrak{M}$, sowie in Beziehung auf die neue, mit dieser parallelen Achse durch $\mathfrak{M}'$; so ist, wie leicht zu sehen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}' &= \int (x'^2 + y^2)\,\mathrm{d}M = \int [(x \pm a)^2 + y^2]\,\mathrm{d}M \\ &= \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}M + a^2 \int \mathrm{d}M \pm 2a \int x\,\mathrm{d}M,\end{aligned}$$

d. i.

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \pm 2a \int x\,\mathrm{d}M,$$

oder wenn X die Abscisse des Schwerpunctes des Körpers bezeichnet, also (Nr. **32**) $XM = \int x\,\mathrm{d}M$ ist, auch

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \pm 2aXM.$$

Liegt der Schwerpunct in der Achse der z selbt, so ist $X = 0$ und

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \ldots (1),$$

oder, wenn man, da das Moment der Trägheit immer diese Form annimmt, $\mathfrak{M} = Mk^2$ setzt, auch:

$$\mathfrak{M}' = M(k^2 + a^2) \ldots (2)$$

(vergleiche §. 202, Gleich. 1).

Anmerkung. Hieraus folgt, dass das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse kleiner, als in Beziehung auf jede andere mit ihr parallele Achse ist.

137. Um das Moment der Trägheit einer materiellen geraden Linie AB (Fig. 32) zu finden, welche sich um den Endpunct A dreht, sei ihre Länge $AB = l$, die auf die Längeneinheit entfallende träge Masse $= m$, sowie die über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Masse $ml = M$. Nimmt man nun in dieser Geraden in dem Abstande $AM = x$ ein Element derselben $Mm = \mathrm{d}x$, so kann man das dieser Länge entsprechende Massenelement $m\mathrm{d}x = \mathrm{d}M$ als materiellen Punct betrachten und darauf die Grundgleichung (2) in §. 200 anwenden, so dass, wenn das Moment der Trägheit dieses Elementes durch $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ bezeichnet wird, sofort $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \mathrm{d}M . x^2 = m x^2 \mathrm{d}x$, folglich $\mathfrak{M} = m\int_0^l x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} m l^3$ ist. Da man jedoch in alle Ausdrücke des Trägheitsmomentes die sich drehenden Massen hineinzubringen pflegt, und hier $M = ml$ ist, so hat man auch für das gesuchte Trägheitsmoment den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M l^2.$$

138. Um das Moment der Trägheit eines Rechteckes AD (Fig. 33) zu finden, welches sich um ihren Mittel- oder Schwerpunct O oder eine durch O gehende auf der Ebene des Rechteckes perpendikuläre Achse dreht und dessen Masse $= M$ sein soll, setze man die beiden Seiten $AB = a$, $BD = b$ und ziehe damit parallel durch den Punct O die Coordinatenachsen der x und y. Zieht man mit dieser letzteren parallel in den Abständen $OP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ die beiden Geraden von der Länge BD, so schliessen diese ein Rechteck $b\mathrm{d}x$ ein, welches ein Element des Rechteckes, also auch dessen Masse M bildet, so dass, wenn die auf die Flächeneinheit dieses Rechteckes entfallende Masse wieder durch m bezeichnet wird, sofort $\mathrm{d}M = mb\mathrm{d}x$ ist. Schneidet man aber auf diesem unendlich schmalen Streifen, indem man in den Abständen $PM = y$ und $Mm = \mathrm{d}y$ mit der Achse der x zwei Parallele zieht, selbst wieder ein Element ab, so bildet dieses neue Rechteck $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ das Differenzial der vorigen Fläche, also $m\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ das Differenzial der vorigen Masse $\mathrm{d}M$, oder es ist $\mathrm{d}^2M = m\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Da nun aber dieses Element als ein materieller Punct zu betrachten ist, welcher vom Drehungspuncte den Abstand OM hat, wofür $OM^2 = x^2 + y^2$ ist; so hat man nach dem ersten Satze [§. 200, Gleich. (2)] für dessen Moment der Trägheit, welches, wenn man jenes des Rechteckes AD mit $\mathfrak{M}$, folglich jenes des Rechteckes EF mit $\mathrm{d}\mathfrak{M}$

bezeichnet, durch $d(d\mathfrak{M}) = d^2\mathfrak{M}$ ausgedrückt werden muss, sofort $d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy$. Wird dieser Ausdruck zweimal, und zwar, da x und y von einander unabhängig sind, einmal nach y (wobei x als constant) und einmal nach x (wobei y als constant zu nehmen ist) beziehungsweise innerhalb der Grenzen von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$ und $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$, oder einfacher von 0 bis $\frac{1}{2}b$ und 0 bis $\frac{1}{2}a$ integrirt und im letzteren Falle jedes Integrale 2 mal genommen, so erhält man, da die Ordnung der Integration (Comp. §. 852) willkürlich ist:

$$\mathfrak{M} = 4m\int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^{\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\, dy,$$

durch die Ausführung dieser Integration erhält man zuerst:

$$\mathfrak{M} = 4m\int_0^{\frac{1}{2}a} dx\,(\tfrac{1}{2}b x^2 + \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{8}b^3) = 2bm\int_0^{\frac{1}{2}a} dx\,(x^2 + \tfrac{1}{12}b^2),$$

ferner $\mathfrak{M} = 2bm(\frac{1}{3}.\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a.\frac{1}{12}b^2) = mab(\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{12}b^2)$,
oder da $mab = M$ ist, auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

[vergl. §. 204, Gleich. (1)].

Anmerkung 1. Dass dieselbe Formel zugleich auch für das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelopipedes gilt, das sich um seine geometrische Achse dreht und für welches das vorige Rechteck AD einen auf dieser durch O gehenden Achse senkrechten Querschnitt bezeichnet, wenn man dabei nur unter dem Factor M die Masse des Parallelopipedes versteht, ist bereits in der Anmerkung zu §. 204 erwähnt. Ist nämlich l die Länge oder Höhe des Parallelopipedes und nimmt man die Umdrehungsachse zur Achse der z, so ist, wenn man ausser den vorigen mit den Achsen der x und y parallel geführten Schnitten (hier Ebenen, welche mit jenen der xz und yz parallel sind), auch noch mit der Ebene der xy (wofür man die untere Grundfläche AD des Körpers nehmen kann) in den Abständen z und $z + dz$ parallele Schnitte führt und dadurch das Körperelement $d^3M = dx\,dy\,dz$, ferner damit

$$d^3\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy\, dz, \text{ also nach Obigem:}$$

$$\mathfrak{M} = m\int_0^l dz \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\, dy = \frac{mab}{12}\int_0^l (a^2 + b^2)\, dz = \frac{1}{12} mabl(a^2 + b^2),$$

oder wegen $mabl = M$ sofort wieder $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$.

Noch einfacher ist die Ableitung für den Fall, dass sich das rechtwinkelige Parallelopiped, dessen drei zusammenstossende Seiten a, b, c und Masse der cubischen Einheit $= m$ sein soll, um die eine Seite oder Kante z. B. um jene c dreht.

Nimmt man nämlich diese drei genannten Seiten für die Achsen der x, y, z, theilt jede dieser Seiten in unendlich viele unendlich kleine Theile und legt durch alle Theilungspuncte Ebenen, welche mit den Seitenflächen des Parallelopipedes parallel laufen (jene durch die in der Kante c liegenden Puncte gelegten Ebenen nämlich parallel mit der Seitenfläche ab oder Ebene der xy u. s. w.), so theilen diese drei Reihen von Ebenen das Parallelopiped in lauter unendlich kleine Theile, wovon jener, welcher den Coordinaten x, y, z entspricht, das Volumen $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, also die Masse $m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ hat, so dass, wenn M die Masse des Parallelopipedes bezeichnet, sofort $\mathrm{d}^3M = m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ist. Das Moment der Trägheit dieses Körpers ist daher in Beziehung auf jene Kante, welche man zur Achse der z genommen hat:

$$\mathfrak{M} = m\iiint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = m\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^c (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}mabc(a^2+b^2),$$

oder wegen $mabc = M$, auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$.

Anmerkung 2. Nimmt man den Umdrehungspunct A für das Rechteck BE (Fig. 34) oder Umdrehungsachse für das rechtwinkelige Parallelopiped von den Grundflächen BE ausserhalb an, und setzt auf zwei mit BC und BD parallele Achsen AX, AY bezogen, die Abscissen $AP = a$, $AP' = a'$ und Ordinaten $AQ = b$, $AQ' = b'$, wodurch die beiden Seiten $BC = a' - a$ $BD = b' - b$ werden; so erhält man nach dem Satze in Nr. **136**. [Gleich. (1)] für das Moment der Trägheit auf diesen Punct A, d. i. einer mit der durch den Schwerpunct O gehenden parallelen Achse bezogen, wegen

$$AO^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+b'}{2}\right)^2 \text{ sofort:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}M[(a'-a)^2 + (b'-b)^2] + \tfrac{1}{4}M[(a+a')^2 + (b+b')^2],$$

oder wenn man entwickelt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2+a'^2+b'^2+aa'+bb').$$

139. Um das Moment der Trägheit eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC (Fig. 35) zu finden, welches sich um eine durch den Winkelpunct A (des rechten Winkels) auf der Ebene ABC perpendikulären Achse umdreht, seien die beiden Catheten $AB = a$ und $AC = b$. Zieht man in dem Abstande $AP = x$ mit AC parallel die Ordinate $PN = y'$ und nimmt darauf in den Abstand $PM = y$ den Punct M, lässt x um $\mathrm{d}x$ und y um $\mathrm{d}y$ zunehmen, um das Flächenelement $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ oder Massenelement $m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ zu erhalten, welches vom Punct A den Abstand AM besitzt, wofür $AM^2 = x^2+y^2$; so hat man wieder wie vorhin:

$$\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = (x^2+y^2)\,m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \text{ oder } \mathfrak{M} = m\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{y'} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y,$$

wobei jedoch y' von x abhängig und zwar wegen $a:b = (a-x):y'$ sofort $y' = \frac{b}{a}(a-x)$ ist. Führt man die Integration aus, so erhält man zuerst:

$$\mathfrak{M} = m\int_0^a \mathrm{d}x(x^2y' + \tfrac{1}{3}y'^3)$$

und wenn man für y' den Werth setzt, integrirt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \frac{mab}{12}(a^2 + b^2), \text{ oder wegen } M = \tfrac{1}{2} mab \text{ auch:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M(a^2 + b^2)$$

(vergl. §. 205, Gleich. 1).

140. Zur Bestimmung des Momentes der Trägheit eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC (Fig. 36), welches sich um eine durch den der Basis gegenüberliegenden Winkelpunct C gehende, auf der Dreieckebene perpendikuläre Achse dreht (oder eines senkrechten Prisma, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat), sei die Basis $AB = 2a$ und das auf dieselbe aus C gefällte Perpendikel $CD = h$. Nimmt man auf diesem $CP = x$ und zieht durch den Punct P mit AB die Parallele $NN' = 2y'$, ferner auf dieser $PM = y$ und lässt wieder x um dx und y um dy zunehmen, um durch die diesen Puncten entsprechenden, mit AB und CD Parallelen, das Massenelement $m\,dx\,dy$ zu erhalten, welches dem d^2M entspricht; so hat man wieder genau wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy, \text{ oder } \mathfrak{M} = m\int_0^h dx \int_{-y'}^{+y'} (x^2 + y^2)\, dy$$

$$= 2m\int_0^h dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\, dy = 2m \int_0^h dx\, (x^2 y' + \tfrac{1}{3} y'^3),$$

oder wegen $y' = \frac{a}{h}x$ (aus $x : y' = h : a$) auch:

$$\mathfrak{M} = 2m\int_0^h \frac{a}{h} dx\, (x^3 + \tfrac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}x^3) = \frac{2ma}{h}\left(\frac{h^4}{4} + \frac{a^2h^2}{12}\right) = \tfrac{1}{6} mah(a^2 + 3h^2),$$

oder endlich wegen $mah = M$ auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M(a^2 + 3h^2).$$

Will man die Seite $AC = BC = d$ hineinbringen, so ist wegen $a^2 = d^2 - h^2$ auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{6} M(d^2 + 2h^2) = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$ (vergl. §. 206.) Dreht sich ein gleichseitiges Dreieck von den Seiten $2a$ um dessen Schwerpunct, so findet man $M = \frac{1}{3} Ma^2$.

141. Um das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis zu bestimmen, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, sei AB (Fig. 37) eine unendlich dünne, auf der Achse senkrechte Schichte des Cylinders, dabei dessen Halbmesser $CA = r$, Länge $= l$ und Masse $= M$. Zieht man in dieser Kreisfläche (oder eigentlich unendlich dünnen Kreisscheibe) von der Masse $m' = dM$ mit den Halbmessern $CP = x$

und $Cp = x + \mathrm{d}x$ aus dem Mittelpuncte C die concentrischen Kreise, so schliessen diese ein unendlich schmales Kreisband ein, dessen Fläche $= (x + \mathrm{d}x)^2 \pi - x^2 \pi = 2 x \pi \mathrm{d}x + \pi \mathrm{d}x^2 = 2 x \pi \mathrm{d}x$ (also ebenso gross wie das Rechteck von der Basis des Umfanges $2x\pi$ und der Höhe $\mathrm{d}x$) und Masse $\mathrm{d}m' = 2\pi m x \mathrm{d}x$ ist. Ist μ das Moment der Trägheit dieser Schichte AB, also $\mathrm{d}\mu$ jenes des schmalen Kreisbandes, so ist nach der Grundformel:

$$\mathrm{d}\mu = 2\pi m x \mathrm{d}x \,.\, x^2 = 2\pi m x^3 \mathrm{d}x,$$

folglich: $\mu = 2\pi m \int_0^r x^3 \mathrm{d}x = 2\pi m \,.\, \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} m r^2 \pi \,.\, r^2 = \frac{1}{2} m' r^2$, weil die Masse $m' = m r^2 \pi$ ist. Besteht nun aber der Cylinder aus n solchen Schichten (wobei n unendlich gross), so ist auch wegen $n\mu = \frac{1}{2} n m' r^2$, und $n\mu = \mathfrak{M}$, sowie $nm' = M$ sofort das Moment der Trägheit des Cylinders: $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$ (welcher Ausdruck sich nämlich wieder in nichts von jenem $\mu = \frac{1}{2} m' r^2$ der Kreisfläche, als in der Bedeutung der Factoren M und m' unterscheidet).

Oder es ist, wenn $\mathrm{d}z$ die Dicke dieser Schichte oder des Cylinderelementes bezeichnet, auf den Cylinder bezogen $\mu = \mathrm{d}\mathfrak{M}$ und $m' = m r^2 \pi \mathrm{d}z = \mathrm{d}M$, folglich $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \frac{1}{2} m r^4 \pi \mathrm{d}z$ und daraus:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} m r^4 \pi \int_0^l \mathrm{d}z = \frac{1}{2} m r^2 \pi l \,.\, r^2 = \frac{1}{2} M r^2.$$

Oder noch einfacher für $m' = \mathrm{d}M$ sofort $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}M$, also $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$. [Vergl. §. 208, Gleich. (1).]

142. Ist der Cylinder hohl und sind R und r der äussere und innere Halbmesser desselben, so darf man das obige Integral nur anstatt von 0 bis r hier von r bis R nehmen; dadurch erhält man: $\mu = 2\pi m \int_r^R x^3 \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{4} m (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} m (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$, oder da man $m(R^2 - r^2)\pi$ für die Masse m' der unendlich dünnen Schichte nehmen kann, auch $\mu = \frac{1}{2} m' (R^2 + r^2)$. Ist wieder $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, sowie M dessen Masse, so ist nach dem Vorigen ebenso:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

[§. 209, Gleich. (2)].

Anmerkung. Setzt man für einen Radkranz die Breite des Kranzes (in der Richtung des Radhalbmessers $= a$ und dessen Dicke (in der Richtung der Achse) $= b$, sowie den mittleren Radhalbmesser $= R'$, so ist $R = R' + \frac{a}{2}$

und $r = R' - \frac{a}{2}$, mithin $R^2 + r^2 = 2\left(R'^2 + \frac{a^2}{4}\right)$ und $R^2 - r^2 = 2aR'$. Substituirt man diese Werthe in der obigen Formel $\mathfrak{M} = \frac{b\pi}{2}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$, so erhält man nach einer einfachen Reduction für das Moment der Trägheit des Radkranzes:

$$\mathfrak{M} = 2R'ab\pi\left(R'^2 + \frac{a^2}{4}\right),$$

oder wenn, wie es z. B. bei allen Schwungrädern der Fall, $a < \frac{1}{5}R'$, also $\frac{a^2}{4} < \frac{R'^2}{100}$ ist, für die Anwendung hinreichend genau:

$$\mathfrak{M} = 2\pi abR'^3 = MR'^2 \ldots (\alpha),$$

wenn nämlich M die Masse des Radkranzes bezeichnet.

143. Um sogleich allgemein das Moment der Trägheit für alle durch Rotation erzeugte Körper zu bestimmen, drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 38) den beiden rechtwinkeligen Ordinaten QN, $Q'N'$ und der Abscisse QQ' begrenzte Ebene QN' um die Abscissenachse AX; so entsteht ein Körper, dessen Masse wir mit M bezeichnen, und für welchen wir das Moment der Trägheit $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf diese Achse AX bestimmen wollen.

Setzt man $AQ = a$, $AQ' = a'$ und zieht zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die Ordinaten PM und pm, nimmt auf diesen $Pn = y$, $nn' = \mathrm{d}y$ und zieht durch n und n' mit der Abscissenachse die Parallelen, so erhält man das Flächenelement $nr = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, welches bei seiner Umdrehung um AX einen Körper, d. i. einen Kreisring erzeugt, welcher $= 2y\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ist und sofort das zweite Differenzial des Volumens, also, wenn man diesen Ausdruck mit der Masseneinheit m multiplicirt, das zweite Differenziale der Masse des Körpers bildet, so dass also $\mathrm{d}^2M = 2\pi my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist. Für dieses Massenelement ist aber das Moment der Trägheit $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = y^2\mathrm{d}^2M = 2\pi my^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, und wenn man zweimal integrirt und die von x abhängige Ordinate $PM = y'$ setzt:

$$\mathfrak{M} = 2\pi m\int_a^{a'}\mathrm{d}x\int_0^{y'}y^3\mathrm{d}y = 2\pi m\int_a^{a'}\tfrac{1}{4}y'^4\mathrm{d}x, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int_a^{a'}y'^4\mathrm{d}x \ldots (\alpha),$$

wobei diese zweite Integration erst dann ausgeführt werden kann, wenn die Natur der Curve NN', d. i. ihre Gleichung $y' = f(x)$ bekannt ist.

Beispiele.

144. Dreht sich anstatt der Curve eine mit AX parallele Gerade, welche von AX den Abstand r hat, um diese Achse, und setzt man $a = 0$, $a' = l$ gleich der Länge des dadurch erzeugten Cylinders, so wird wegen $y' = r$ sofort:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m \int_0^l r^4 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} m r^2 \pi l . r^2 = \tfrac{1}{2} M r^2$$

(vergl. Nr. **141**).

145. Geht die Gerade AB (Fig. 39) durch den Ursprung und ist $CB = r$ der Halbmesser und $AC = h$ die Höhe des erzeugten geraden Kegels, so ist wegen $x : y' = h : r$ sofort $y' = \frac{r}{h} x$, folglich:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m \int_0^h \frac{r^4}{h^4} x^4 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi m \frac{r^4}{h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10} m r^4 \pi h,$$

oder wegen $M = \frac{1}{3} m r^2 \pi h$ auch $\mathfrak{M} = \frac{3}{10} M r^2$.

146. Ist die Curve eine Ellipse von den Halbachsen a und b, welche sich um die grosse Achse $2a$ umdreht, so erhält man wegen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ (die Abscissen vom Mittelpunct aus gezählt, Comp. §. 465) für das Moment der Trägheit des elliptischen Sphäroides (nach der obigen Formel (α) in **143.**):

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m \int_{-a}^{+a} \frac{b^4}{a^4} \mathrm{d}x (a^2 - x^2)^2 = 2 . \tfrac{1}{2}\pi m \frac{b^4}{a^4} \int_0^a \mathrm{d}x (a^4 - 2a^2x^2 + x^4)$$

$$= m\pi \frac{b^4}{a^4}\left(a^5 - \frac{2a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) = \frac{8}{15} m \pi a b^4.$$

Nun ist aber das Volumen dieses Körpers (Comp. §. 889, 2.) gleich $\frac{4}{3} a b^2 \pi$, folglich dessen Masse $M = \frac{4}{3} m a b^2 \pi$, also auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M b^2.$$

147. Bei der Umdrehung der Ellipse um die kleine Achse wird ebenso, wenn wieder M die Masse des dadurch entstehenden Ellipsoides bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M a^2.$$

148. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $a = b = r$ über, so hat man für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, aus beiden vorigen Formeln:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M r^2$$

[vergl. §. 210, Gleich. (2)].

Ist die Curve eine Parabel und dreht sich diese um ihre geometrische Achse AC (Fig. 40), so wird, wenn man $AC = h$ und $CB = r$ setzt, wegen $y'^2 = px$ und (Comp. §. 889, 1.) $M = \frac{1}{2} m r^2 \pi h = \frac{1}{2} m \pi p h^2$ (wegen $r^2 = ph$), wenn h die Höhe des entstehenden Paraboloides ist:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} m \pi \int_0^h p^2 x^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} m \pi p^2 \frac{h^3}{3},$$

oder auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M p h = \tfrac{1}{3} M r^2.$$

149. Dreht sich die von dem Kreisbogen AN (Fig. 41) begrenzte Fläche ANB um die (in der Richtung des Durchmessers liegende) Achse AB, so entsteht ein Kugelsegment mit einer Grundfläche $NAN'B$ von der Höhe AB. Setzt man den Halbmesser des Kreises (gleich dem Kugelhalbmesser) $= r$, und $AB = a$ (gleich der Höhe des Kugelsegmentes), so folgt aus der Formel (α) in **143.** wegen $y'^2 = 2rx - x^2$:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi m \int_0^a \mathrm{d}x (2rx - x^2)^2 = \tfrac{1}{2} m a^3 \pi \left(\tfrac{4}{3} r^2 - ar + \tfrac{1}{5} a^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{30} m a^3 \pi (20 r^2 - 15 ar + 3a^2),$$

oder wenn M die Masse des Segmentes, also:

$$M = \left(\tfrac{1}{2} BN^2 \pi . a + \tfrac{1}{6} a^3 \pi\right) m = \left[\tfrac{1}{2} a \pi (2ra - a^2) + \tfrac{1}{6} a^3 \pi\right] m = m \frac{a^2 \pi}{3} (3r - a)$$

ist, auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{aM}{10(3r - a)} (20 r^2 - 15 ar + 3a^2) \ldots (c)$$

[vergl. §. 210, Gleich. (1)].

150. Besteht eine Pendellinse aus zwei solchen Kugelsegmenten, deren Grundflächen aufeinander liegen und sich decken, so ist ihr Moment der Trägheit in Bezug auf ihre geometrische Achse AB (Fig. 42) genau durch die vorige Formel (c) ausgedrückt, wenn M die Masse der Linse bedeutet. Bringt man statt dem Kugelhalbmesser r den Halbmesser $CN = \varrho$ der Grundflächen der beiden Segmente in diese Formel (c), so erhält man wegen $\varrho^2 = 2ra - a^2$ sofort $r = \frac{a^2 + \varrho^2}{2a}$ und damit nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{10} \left(\frac{a^4 + 5a^2 \varrho^2 + 10 \varrho^4}{a^2 + 3\varrho^2}\right) \ldots (d).$$

Anmerkung. Ist die Linse, wie gewöhnlich nach der Richtung NN' durchbohrt, um die cylindrische Pendelstange, welche in der Regel aus einem anderen Materiale als die Linse besteht, durchschieben zu können, so muss man von dem vorigen Werthe noch das Moment der Trägheit dieser Bohrung (den hohlen Cylinder als massiv gedacht) abziehen. (Man sehe Nr. **152.**, Anmerkung.)

151. Um endlich noch das Moment der Trägheit eines gewöhnlichen Cylinders zu finden, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct des Cylinders geht und auf dessen geometrischer Achse perpendikulär steht, nehme man die Achse des Cylinders für die Achse der z, den Ursprung A der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen im Schwerpunct des Cylinders, sowie die Umdrehungsachse für die Achse der y, so ist, wenn man den Cylinder in den Entfernungen von $AC = z$ (Fig. 43) und $z + \mathrm{d}z$ durch zwei Ebenen parallel mit der Ebene der xy durchschneidet, die unendlich dünne Kreisscheibe, welche dadurch entsteht, ein Element des Cylinders und $= \mathrm{d}M$, wenn M wieder die Masse des Cylinders, dessen Halbmesser $= r$ und Länge $= l$ sein soll, bezeichnet. Sind BB' und DD' die Durchschnitte der Ebenen der xz und yz mit dieser Kreisscheibe von der Dicke $\mathrm{d}z$ und legt man in den Entfernungen $CP = x$ und $x + \mathrm{d}x$ wieder zwei Ebenen und zwar parallel mit der Ebene der yz, so erhält man aus dieser Kreisscheibe als Element derselben das Parallelopiped von der Grundfläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ und Länge $mm' = 2y$, wenn man nämlich die der Abscisse $CP = x$ entsprechende Ordinate des Kreises $Pm' = Pm = y$ setzt. Da nun dieses Körperelement (gleichsam eine materielle gerade Linie) $\mathrm{d}^2M = 2my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ von der Umdrehungsachse YY' den Abstand u hat, wofür $u^2 = x^2 + z^2$ ist, so hat man, wenn $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, folglich $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ jenes der Kreisscheibe und endlich $\mathrm{d}^2\mathfrak{M}$ jenes des unendlich dünnen Prisma bezeichnet, nach der Grundformel sofort: $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = 2my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,(x^2 + z^2)$, folglich wenn man zweimal innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt:

$$\mathfrak{M} = 2m\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\mathrm{d}z\int_{-r}^{+r} y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = 8m\int_0^{\frac{1}{2}l}\mathrm{d}z\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^r x^2\,\mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + z^2\int_0^r \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

und da (Lehrb. Bd. III S. 336, Beispiel 4)

$$\int x^2\,\mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4}\,(x^3 - \tfrac{1}{2}r^2x)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{8}r^4\,arc\,Sin\frac{x}{r},$$

ferner (S. 339) $\int \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2}r^2\,arc\,Sin\frac{x}{r}$,

so ist innerhalb der angezeigten Grenzen:

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{8}r^4\cdot\frac{\pi}{2} + z^2\cdot\tfrac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^2\pi}{4}z^2,$$

folglich wenn man diesen Werth für das zweite Integral substituirt:

$$\mathfrak{M} = 8m\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{r^2\pi}{4}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz = 2mr^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz$$

$$= 2mr^2\pi\left(\frac{r^2 l}{8}+\frac{l^3}{24}\right),$$

oder wegen $M = mr^2\pi l$ endlich:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2)\ldots(e).$$

152. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit [Nr. **136.**, Gleich. (1)]:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2)+M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2+4l^2),$$

oder auch:
$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **150.** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (d) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (e) wegen $l = NN' = 2\varrho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2+4\varrho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\varrho^2}{3}\right)$, so dass also das eigentliche Moment der Trägheit der in **150.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (d) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Grösse δ ab, so muss man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}''+(M-M')\delta^2 = \mathfrak{M}''+M''\delta^2,$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§§. 230—234.)

153. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit [§. 200, Gleich. (3)] auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, sowie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die