$C = -\frac{2ag}{a^2+k^2} Cos\,\alpha$ und sonach allgemein:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2+k^2}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha),$$

eine Gleichung, welche mit jener (m) in Nr. **129**, Anmerkung, für das einfache Pendel bis auf den constanten Factor $\frac{2ag}{a^2+k^2}$ (welcher für $k=0$ dem dortigen gleich wird) vollkommen übereinstimmt.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines *Körpers*.

(§. 197.)

132. Handelt es sich nicht bloss um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sei zuerst NS (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Grösse F, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in derselben Ebene liegenden Punct A oder um eine auf dieser Ebene in A perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w umdreht.

Betrachtet man bei dieser Umdrehung einen Punct M dieser Fläche, wofür die in derselben Ebene angenommenen rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = y$ sind und die entsprechende Fläche dF für die Masse dM und umgekehrt gesetzt werden kann; so erhält man für die Centrifugalkraft dR des materiellen Punctes dM (wenn man nämlich diese Kraft für die ganze Fläche oder Masse mit R bezeichnet) nach Nr. **130**: $dR = \frac{dF.z^2w^2}{z} = zw^2\,dF$, wenn man nämlich den Abstand $AM = z$ setzt.

Zerlegt man diese nach AM wirksame Kraft in zwei nach den rechtwinkeligen Achsen AX, AY wirkende Seitenkräfte dP und dQ, so wird $dP = dR.\frac{x}{z}$ und $dQ = dR.\frac{y}{z}$, oder:

$$dP = w^2x\,dF \text{ und } dQ = w^2y\,dF;$$

diese Gleichungen integrirt geben:

$$P = w^2\int x\,dF \text{ und } Q = w^2\int y\,dF,$$

oder wenn X und Y die Coordinaten des Schwerpunctes dieser Fläche F sind (man sehe die Relationen II. in Nr. **25**):

$$P = w^2XF \text{ und } Q = w^2YF.$$

Da nun R die Mittelkraft aus diesen beiden Seitenkräften sein soll, so folgt, wenn man auch gleich die Masse M statt der Fläche F setzt:

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = w^2 M \sqrt{(X^2 + Y^2)} = w^2 M r, \ldots (\alpha)$$

wenn man nämlich den Abstand des Schwerpunctes O dieser Fläche oder Masse von A d. i. $AO = r$ setzt; es ist also die gesuchte Centrifugalkraft für diese Fläche, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist:

$$R = \frac{M(rw)^2}{r} = \frac{Mv^2}{r},$$

wenn man nämlich die Geschwindigkeit des Schwerpunctes $rw = v$ setzt. Diese nach AO wirksame Centrifugalkraft ist also ebenso gross, als ob die gesammte Masse M im Schwerpuncte dieser Fläche NS vereinigt und die Kraft selbst in diesem Puncte O wirksam wäre.

133. Dreht sich ein Körper MN (Fig. 30) um die Gerade AB als Achse, so theile man denselben in unendlich dünne parallele Schichten, welche auf der Achse AB perpendikulär stehen; dann erhält man nach der vorigen Nr. ebenso viele, in den Schwerpuncten o, o', o''.. dieser Schichten perpendikulär auf die Umdrehungsachse AB wirksame Centrifugalkräfte, wovon jede (Gleichung α) dem Producte aus der Masse der betreffenden Schichte in den Abstand ao ihres Schwerpunctes o von AB und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gleich ist. Da aber diese Kräfte im Allgemeinen nicht zu einander parallel sein (d. i. nicht in einer einzigen durch AB gehenden Ebene liegen) werden, so können diese nach Umständen eine einzige Resultirende haben, oder sich auf ein Kräftepaar (§. 21) oder auf eine Resultirende gleich Null reduciren, in welch letzterem Falle diese Kräfte auf die Umdrehungsachse AB keinerlei Druck oder Zug ausüben.

134. Liegen dagegen die sämmtlichen Schwerpuncte o, o'.. dieser dünnen Schichten in einer einzigen Geraden DE, welche mit der Umdrehungsachse AB parallel läuft, und von ihr den Abstand r besitzt; so haben auch alle die einzelnen Schwerpuncte einerlei Abstände von dieser Achse und zwar ebenfalls $= r$. Die einzelnen Centrifugalkräfte werden untereinander parallel und liegen sämmtlich in der durch DE und AB gedachten Ebene, so dass demnach ihre Resultirende, indem die einzelnen Kräfte den Massen, also auch den Gewichten der betreffenden Schichten proportional sind, durch den Schwerpunct des ganzen Körpers MN geht und ihre Grösse gleich der Summe dieser parallelen Kräfte, d. i. $R = mrw^2 + m'rw^2 + \ldots = (m + m' + \ldots) rw^2$ ist, wenn nämlich m, m', m''.. die Massen der einzelnen Schichten und w die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Achse AB bezeichnen; setzt man daher $m + m' + m'' + \ldots = M$ als Masse des ganzen Körpers, so ist dessen Centrifugalkraft:

$$R = Mrw^2 = \frac{Mv^2}{r} \text{ (für } v = rw)$$

genau ebenso gross und wirkt auf dieselbe Weise, als ob die gesammte Masse des Körpers in dessen Schwerpunct vereinigt wäre.

Anmerkung 1. Dieser hier erwähnte einfache Fall findet namentlich bei der Kugel, dem Cylinder, geraden Prisma, Kegel und überhaupt allen Rotationskörpern statt, bei welchen die Achse mit der Umdrehungsachse parallel ist. Da für $r = 0$ auch $R = 0$ wird, so folgt, dass wenn in diesen genannten Fällen die Achse des Körpers zugleich die Rotationsachse ist, diese letztere keinen Druck oder Zug durch die Centrifugalkraft erleide.

Ist bei einer Kugel, welche sich während der Zeit t einmal um ihre Achse dreht, r der Abstand irgend eines Punctes, dessen Masse $= 1$ ist, von dieser Achse, so ist dessen Geschwindigkeit $= \frac{2r\pi}{t}$ und Centrifugalkraft $= \frac{4r^2\pi^2}{rt^2} = \frac{4r\pi^2}{t^2}$, nämlich seinem Abstande von der Achse proportional.

Da unterm Aequator unserer Erde die Schwere und Centrifugalkraft einander gerade entgegen wirken, so hat dort die Schwere einen Werth, welcher jenem gleich wäre, wenn die Rotation der Erde nicht bestünde, vermindert um die Centrifugalkraft. Abstrahirt man von den geringen Veränderungen der Schwere in den verschiedenen Breiten, so kann man diese unterm Aequator $= g$ setzen, und wenn man ihre Intensität, in der Voraussetzung, dass keine Achsendrehung der Erde stattfände, durch G bezeichnet, so ist nach dem Vorigen:

$$g = G - \frac{4r\pi^2}{t^2}.$$

Da nun aber für den Aequator in runder Zahl $2r\pi = 40000000$ Meter und $t = 86164$ Secunden beträgt*), so ist wegen $g = 9{\cdot}808$ M. sehr nahe

*) Der Sterntag ist nämlich in Sonnenzeit ausgedrückt um 236 (genauer 235·90867) Sec. kürzer als der mittlere Sonnentag. Ferner ist nach Bessel der Aequatorradius = 6377399, sowie der Polarradius = 6356080 Meter, der mittlere Erdhalbmesser kann zu 6366739 Meter angenommen werden.

$$\frac{4r\pi^2}{gt^2} = \frac{1}{289}, \text{ folglich:}$$

$$g = G - \frac{g}{289}, \text{ oder auch nahe } g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right),$$

so dass also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dass wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal grösser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null sein würde.

Anmerkung 2. Nimmt man auf die allmähliche Abnahme der Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin, sowie auch auf die Abplattung der Erde selbst Rücksicht, so kann man, wenn g' die Intensität oder Beschleunigung der Schwere in dem Parallelkreis von der Breite von 45" bezeichnet, sofort für jeden Ort der Erde, für welchen die geographische Breite $= \varphi^0$ ist, sehr nahe

$$g = g'(1 - {\cdot}002588 \, Cos \, 2\varphi)$$

setzen. So ist z. B. im Metermass $g' = 9{\cdot}80558$, folglich für Paris wegen $\varphi = 48^0 \, 50' \, 14''$ nach dieser Formel:

$$g = 9{\cdot}80558 \times 1{\cdot}0003456 = 9{\cdot}80896 \text{ Meter.}$$

Auf den Wiener Fuss bezogen, kann man $g' = 31{\cdot}0203$ setzen; folglich ist für Wien, wegen $\varphi = 48^0 \, 12' \, 36''$ die Beschleunigung der Schwere:

$$g = 31{\cdot}0203 \times 1{\cdot}00028938 = 31{\cdot}02927 \text{ Fuss.}$$

Nach den von Pouillet im J. 1854 aus den Gesammt-Beobachtungen zusammengestellten wahrscheinlichsten Werthen wäre für das Metermass:

$$g = 9{\cdot}806055 \, (1 - {\cdot}00255237 \, Cos \, 2\varphi).$$

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 200.)

135. Schwingt oder rotirt ein materieller Punct von der Masse m in Folge der Einwirkung einer Kraft mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um irgend eine Achse, von welcher er die Entfernung r besitzt, so wird (§. 200) das Product mr^2, aus der Masse in das Quadrat des Abstandes derselben von der Drehungsachse das Moment der Trägheit dieser Masse genannt. Soll eine andere Masse M, welche in der Entfernung $= 1$ von der Drehungsachse angebracht ist, durch dieselbe oder eine gleich grosse Kraft ebenso bewegt werden, d. i. die nämliche Winkelgeschwindigkeit wie die erstere Masse m im Abstande r erhalten, so muss [§. 200, Gleich. (1)] diese Masse $M \times 1^2 = mr^2$, d. i. $M = mr^2$ sein, so dass also auch diese letztere Masse M als Mass