wozu noch jene kommen, die sich auf die Geschwindigkeiten beziehen, d. i.:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad u = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \ldots (b).$$

Genau ebenso erhält man für den 2. Punct m' die analogen Gleichungen:

$$X' + K' = m' \frac{dv'}{dt}, \; Y' + L' = \ldots (a') \text{ und } v' = \frac{dx'}{dt}, \; u' = \ldots (b'),$$

und so auch für die noch übrigen Puncte m'', m'''... des Systemes die ähnlichen Gleichungen (a''), (b'') etc.

Ist nun das System ein gegebenes, so kennt man K, L, M... in Functionen der Coordinaten des Systemes und man kann, wenn auch die äusseren Kräfte bekannt sind, die Bewegung jedes einzelnen Punctes mit Hilfe der vorigen Gleichungen (a), (a')..., sowie umgekehrt, wenn die Bewegung bekannt, d. i. die Coordinaten der einzelnen Puncte gegeben sind, die äusseren Kräfte bestimmen. Hier ist übrigens nur von der theoretischen Möglichkeit die Rede, da sich der wirklichen Ausführung oft unübersteigliche Schwierigkeiten entgegensetzen.

Geometrisches System.

Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung und mit Rücksicht, dass hier unter S die Resultante aus den sogenannten Verbindungskräften (wieder eventuell jene inbegriffen, welche von dem Widerstande der krummen Flächen oder Linien herrühren) zu verstehen ist, gelten auch hier wieder die obigen allgemeinen Gleichungen der Bewegung (a), (b), (a'), (b')..

Ist nun das System ein bestimmtes oder gegebenes, so ist die Anzahl der Verbindungs-Gleichungen ebenso gross, als die Anzahl der wirklich Unbekannten und man kann, wie eine einfache Betrachtung zeigt, in den genannten Gleichungen die Verbindungskräfte K, L, M, K'... als bekannte Grössen ansehen; denn obschon durch die Verbindung eines Punctes mit einem anderen in diese Grössen K, L... eine neue Unbekannte, nämlich die Intensität der betreffenden Verbindungskraft gebracht wird, so liefert doch auch wieder dieselbe Verbindung andererseits eine neue Verbindungs-Gleichung zwischen denselben unbekannten Coordinaten, wodurch schliesslich die ursprüngliche Anzahl von Gleichungen, folglich auch die Anzahl der Unbekannten, ungeändert bleibt, geradeso, als ob in den erwähnten Bewegungs-Gleichungen alle inneren, d. i. Verbindungskräfte unmittelbar gegeben wären.

Auf solche Weise hat man immer so viele Gleichungen als nothwendig sind, um entweder, wenn die äusseren Kräfte (und die Verbindungen) gegeben sind, die Coordinaten der materiellen Puncte in Functionen dieser äusseren Kräfte, oder umgekehrt, wenn die Bewegung, d. i. die Coordinaten gegeben sind, die äusseren Kräfte als Functionen dieser Coordinaten auszudrücken.

Ist auf diese Weise die Aufgabe gelöst, d. h. sind sowohl die Coordinaten der materiellen Puncte, als auch die äusseren Kräfte bekannt; so unterliegt es auch keinem Anstande, die Intensität der Verbindungskräfte p, p'..., q, q'... (Spannungen der Fäden, Normaldrücke gegen die Flächen oder Linien u. s. w.) zu finden; denn man darf dazu nur für $P, x, y, z \dots$ die Werthe in Functionen der Zeit ausgedrückt, in die ursprünglichen Gleichungen $(a) \dots$ setzen.

Um dieses Verfahren durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehmen wir den in §. 115, Beisp. 2 (Fig. 113) bebandelten Fall, in welchem auf einer doppelten schiefen Ebene zwei durch einen Faden mit einander verbundenen Körper oder materiellen Puncte m, m' vom Gewichte $P = mg$ und $P' = m'g$ liegen oder sich bewegen, wobei die Flächen als absolut glatt angenommen werden (d. i. von jedem Widerstande wie Reibung u. s. w. abstrahirt wird).

Bilden die beiden Ebenen AC, BC mit der Horizontalen AB die Winkel α, α' und legt man durch A in der verticalen Ebene ACB das rechtwinkelige Achsensystem, bei welchem die Abscissenachse mit AB zusammenfällt, und die positiven Ordinaten nach aufwärts, also der Schwerkraft entgegen gezählt werden; bezeichnet bei irgend einer Position der beiden Puncte m, m', nämlich nach Verlauf der Zeit t, vom Beginn der Bewegung an gezählt, die Coordinaten derselben beziehungsweise durch x, y, x', y', ferner durch p, p' die Spannungen der an m und m' befestigten Fadenstücke, sowie durch q, q' die Normaldrücke dieser Puncte gegen die Ebenen AC und BC; so ist, wie leicht zu sehen:

$$K = -q \, Sin\, \alpha + p \, Cos\, \alpha, \qquad K' = q' Sin\, \alpha' - p' Cos\, \alpha',$$
$$L = q \, Cos\, \alpha + p \, Sin\, \alpha, \qquad L' = q' Cos\, \alpha' + p' Sin\, \alpha'.$$

Da ferner die auf diese Körper oder materiellen Puncte m, m' einwirkenden äusseren Kräfte keine anderen sind als die aus der Schwerkraft herrührenden Kräfte $gm = P$ und $gm' = P'$ und diese parallel mit der Ordinatenachse wirken; so ist dafür:

$$X = 0, \quad Y = -P \quad \text{und} \quad X' = 0, \quad Y' = -P'.$$

Für den vorliegenden Fall gehen daher die obigen Bewegungs-Gleichungen, wenn man gleich (a) mit (b), (a') mit (b') verbindet, über in:

$$-q \, Sin\, \alpha + p \, Cos\, \alpha = m \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad q' Sin\, \alpha' - p' Cos\, \alpha' = m' \frac{d^2x'}{dt^2},$$
$$-P + q \, Cos\, \alpha + p \, Sin\, \alpha = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -P' + q' Cos\, \alpha' + p' Sin\, \alpha' = m' \frac{d^2y'}{dt^2}.$$

Wegen der unveränderlichen Länge des Fadens zwischen den beiden Befestigungspuncten und der Bedingung, dass die Puncte m, m' die Ebenen AC, BC nicht verlassen können, hat man zuerst $ds' = ds$, d. i. $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$, oder wenn man Kürze halber $tang\, \alpha = a$, $tang\, \alpha = a'$, $\frac{Cos\, \alpha'}{Cos\, \alpha} = A$, $\frac{Sin\, \alpha'}{Sin\, \alpha} = A'$ setzt und berücksichtiget, dass y' zunimmt, wenn y abnimmt und umgekehrt, auch:

$$dx' = A\,dx \dots (1'), \quad dy' = -A\,dy \dots (2') \quad \text{und} \quad y = ax \dots (3')$$

als die 3 gegebenen Verbindungs-Gleichungen, während die 4te $y' = -a'x'$ nur eine Folge der beiden ersteren ist.

Setzt man auch noch Kürze halber:

$\frac{d^2x}{dt^2} = B$, wodurch $\frac{d^2x'}{dt^2} = AP$, $\frac{d^2y}{dt^2} = aB$ und $\frac{d^2y'}{dt^2} = -aA'B$, und berücksichtiget endlich, dass $p' = p$ ist, so nehmen die vorigen 4 Bewegungs-Gleichungen die einfachere Form an:

$$(1)\quad -q\, Sin\,\alpha + p\, Cos\,\alpha = mB, \qquad (3)\quad q'\, Sin\,\alpha' - p\, Cos\,\alpha' = m'AB,$$

$$(2)\quad q\, Cos\,\alpha + p\, Sin\,\alpha = P + m\,a\,B, \quad (4)\quad q'\, Cos\,\alpha' + p\, Sin\,\alpha' = P' - m'aA'B.$$

Eliminirt man nun aus diesen 4 Gleichungen p, so erhält man 3 Gleichungen mit den 2 Unbekannten q, q'; wird aus diesen Gleichungen q eliminirt, so bleiben noch 2 Gleichungen mit der Unbekannten q', und wenn man endlich aus diesen Gleichungen auch noch q' eliminirt, so entsteht eine von p, q, q' befreite Gleichung, welche mit den gegebenen 3 Verbindungs-Gleichungen (1'), (2'), (3') combinirt die zur Bestimmung der Coordinaten x, y, x', y' nöthigen 4 Gleichungen liefert.

Ohne uns übrigens an diese Ordnung zu halten, eliminiren wir zuerst aus den Gleichungen (1) und (2) die Unbekannte p und erhalten nach Herstellung der Werthe von a, A, A' und einer einfachen Reduction:

$$q = P\, Cos\,\alpha, \text{ und ebenso aus (3) und (4) } q' = P'\, Cos\,\alpha'.$$

Diese Werthe für q und q' in die Gleichungen (1) und (3) gesetzt und dann daraus mB und $m'AB$ eliminirt, erhält man nach Herstellung des Werthes von A und gehöriger Reduction:

$$p = \frac{P m'\, Sin\,\alpha + P' m\, Sin\,\alpha'}{m + m'},$$

oder wegen $m = \frac{P}{g}$ und $m' = \frac{P'}{g}$ auch:

$$p = \frac{PP'}{P + P'}\,(Sin\,\alpha + Sin\,\alpha')\ldots(b).$$

Aus den Verbindungs-Gleichungen (1'), (2'), (3') folgen die Beziehungen:

$$x' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}\,x, \quad y' = -\frac{Sin\,\alpha'}{Sin\,\alpha}\,y, \quad y = tang\,\alpha . x, \quad y' = -\,tang\,\alpha' . x'.$$

Haben also die Coordinaten des materiellen Punctes m in irgend einem Momente die Coordinaten $x = a$ und $y = b$, so sind jene des Punctes m':

$$x' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}\,a \text{ und } y' = -\frac{Sin\,\alpha'}{Sin\,\alpha}\,b.$$

Die Gleichungen (b) geben, wenn man integrirt: $x = vt$, $y = ut$ jene (b') ebenso: $x' = v't$, $y' = u't$; also ist auch:

$$v't = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}\,vt, \text{ d. i. } v' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}\,v \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (a) geben, wenn man für q und p die gefundenen Werthe substituirt und berücksichtiget, dass (Nr. **122.**, Relat. 4) $\frac{dv}{dt} = G'$ und $\frac{du}{dt} = G''$ die Beschleunigungen nach den Achsen der x und y bezeichnen, und wenn man für m den Werth $\frac{P}{g}$ setzt und gehörig abkürzt:

$$G' = \frac{P'\, Sin\,\alpha' - P\, Sin\,\alpha}{P + P'}\,g\, Cos\,\alpha,$$

$$G'' = \frac{P'\, Sin\,\alpha' - P\, Sin\,\alpha}{P + P'}\,g\, Sin\,\alpha;$$

folglich ist die Beschleunigung des Körpers auf der schiefen Ebene AC, d. i. $G = \sqrt{G'^2 + G''^2}$, wegen $Sin\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2 = 1$ sofort:

$$G = \frac{P' Sin\,\alpha' - P\,Sin\,\alpha}{P + P'} g \ldots (c),$$

wie diess Alles ohnehin bekannt ist.

Auf ähnliche Weise könnte man auch die Beschleunigung des materiellen Punctes m' finden.

Für das Gleichgewicht ist $G = 0$, daher $P\,Sin\,\alpha = P' Sin\,\alpha'$ und die Spannung des Fadens (aus b) $p = P\,Sin\,\alpha = P' Sin\,\alpha'$.

Geht der Faden, an dessen Enden die Gewichte P und P' befestigt sind, über eine feste Rolle und haben die Fadenstücke die lothrechte Richtung, so folgt wegen $\alpha = \alpha' = 90^0$ aus (b) und (c) beziehungsweise:

$$p = \frac{2PP'}{P + P'} \text{ und } G = \frac{P' - P}{P + P'} g \quad \text{u. s. w.}$$

14. Betrachtet man endlich die Körper, deren Bewegung untersucht wird, als materielle Puncte, so bildet ganz einfach der Quotient aus der in einer gegebenen Zeit erzeugten Geschwindigkeit dividirt durch diese Zeit das Mass der bewegenden Kraft. Um aber Kräfte mit einander zu vergleichen, die auf verschiedene Körper wirken, muss man auch auf die Massen dieser Körper Rücksicht nehmen, und in diesem Falle dient bei der gleichförmigen Bewegung (§. 173) das Product aus der Masse des Körpers in seine Geschwindigkeit, d. i. die Grösse der Bewegung, dagegen bei der ungleichförmigen Bewegung, das Product aus der Masse in den Quotienten, welcher entsteht, wenn man die in dem Elemente der Zeit erlangte unendlich kleine Geschwindigkeit durch dieses Zeitelement dividirt, als Mass der bewegenden Kraft (Nr. **124**).

Betrachtet man ein System von Körpern oder materiellen Puncten, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, im Zustande der Bewegung, so ist klar, dass die Bewegung jedes einzelnen Körpers das Resultat sein muss aus der auf ihn einwirkenden Kraft und der Reaction der übrigen Körper des Systemes, welche auf ihn stattfindet. Daraus folgt aber, dass keiner dieser Körper im Allgemeinen jene Bewegung annehmen wird, die er vermöge des ursprünglich erhaltenen Impulses und der ihn treibenden beschleunigenden Kräfte angenommen hätte, wenn er frei wäre. Um nun diese von dem Systeme, wovon er einen Theil ausmacht, herrührende Veränderung in der Bewegung zu bestimmen, und die wirklich stattfindende Bewegung zu erhalten, hat D'Alembert ein allgemeines Bewegungsprincip aufgestellt, mittelst welchem man im Stande sein sollte, alle auf die Bewegung sich beziehenden Aufgaben in Gleichungen zu bringen oder auf Aufgaben der Statik zurückzuführen. Dieses Princip ist folgendes:

„Theilt man den Körpern eines Systemes Bewegungen mit, welche durch „ihre gegenseitigen Verbindungen modificirt werden, so kann man diese „Bewegungen so ansehen, als beständen sie aus denjenigen, welche die „Körper wirklich annehmen und aus anderen Bewegungen, welche vernichtet werden; diese letzteren Bewegungen müssen daher so beschaffen

„sein, dass wenn die Körper des Systemes von diesen allein afficirt wür-„den, diese sofort im Gleichgewichte wären."

Dieses D'Alembert'sche Princip gilt sowohl für die nach der älteren Annahme (jedoch nicht existirenden) momentan, als continuirlich wirkenden Kräfte; da jedoch die Bestimmung der Kräfte, welche vernichtet werden und für sich im Gleichgewicht stehen müssen, oft sehr weitläufig und schwierig wird; so wurde dieses Princip später modificirt und in folgender Weise ausgesprochen:

„Gibt man jedem Körper eines Systemes eine Bewegung, die derjenigen, „welche er annehmen muss, gleich, aber direct entgegengesetzt ist, so wird „das ganze System ruhen; diese Bewegungen vernichten daher diejenigen, „welche die Körper angenommen hätten, wenn sie frei gewesen wären, folg-„lich muss zwischen diesen verschiedenen Bewegungen oder den sie erzeu-„genden Kräften Gleichgewicht vorhanden sein."

Es seien nun $m, m', m''\ldots$ die Massen der verschiedenen Körper eines solchen Systemes, $x, y, z, x', y'\ z'\ldots$ die rechtwinkeligen Coordinaten ihrer Schwerpuncte nach Verlauf der Zeit t, und $X, Y, Z, X', Y', Z'\ldots$ die auf die Masseneinheit der Körper $m, m'\ldots$ nach den Richtungen der Coordinatenachsen (d. i. mit diesen parallel) wirkenden beschleunigenden Kräfte, folglich $mX, mY, mZ, m'X', m'Y', m'Z'$ u. s. w. die bewegenden Kräfte, welche beziehungsweise die Körper m, m' u. s. w. nach den genannten Richtungen treiben; endlich soll das Element der Zeit dt als constant angesehen werden. Diess vorausgesetzt sind die den Körper m am Ende des folgenden Zeitelementes nach den Richtungen der Coordinatenachsen afficirenden Geschwindigkeiten $= \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, folglich (Nr. 125.) die ihn nach diesen Richtungen treibenden bewegenden Kräfte $= m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}$. Diese Kräfte gehen im nächstfolgenden Zeitelemente wegen der Wirkung der beschleunigenden Kräfte über in

$$m\frac{dx}{dt} + mXdt,\ m\frac{dy}{dt} + mYdt,\ m\frac{dz}{dt} + mZ\,dt$$

(weil wenn $X = \frac{dv}{dt}$ gesetzt wird, $Xdt = dv$ die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dt bezeichnet, daher die beschleunigende Kraft $\frac{dx}{dt}$ in $\frac{dx}{dt} + Xdt$ übergeht). Die wirklichen Zunahmen aber, welche die Geschwindigkeiten des Körpers m parallel zu den Coordinatenachsen zufolge seiner Verbindung mit den übrigen Körpern des Systemes erhalten und auf deren Bestimmung es hier eigentlich ankommt, sind:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt},\ \frac{d^2y}{dt},\ \frac{d^2z}{dt},$$

folglich die wirklichen bewegenden Kräfte, welche den Körper m am Ende der Zeit dt nach den genannten Richtungen treiben:

$$m\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt},\ m\frac{dy}{dt} + m\frac{d^2y}{dt},\ m\frac{dz}{dt} + m\frac{d^2z}{dt}.$$

Bringt man also diese mit den drei vorigen Kräften auf den Körper m in direct entgegengesetzter Richtung an, so bleiben für die auf diesen Körper oder materiellen Punct wirkenden bewegenden Kräfte:

$$m\left(X\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\right),\ m\left(Y\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t}\right),\ m\left(Z\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t}\right) \ldots (a).$$

Um die ähnlichen Ausdrücke für die übrigen Körper m', m'' ... des Systemes zu erhalten, darf man die Buchstaben m, x, y, z, X, Y, Z dieses Ausdruckes (a) nur mit einem, zwei u. s. w. Accente versehen.

Da nun aber dem D'Alembert'schen Principe zufolge das System unter der vereinten Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewichte sein muss, so braucht man in den allgemeinen Gleichungen (s) von Nr. **20**. (Anmerkung 2) nur statt der Seitenkräfte $P\,Cos\,\alpha$, $P\,Cos\,\beta$, $P\,Cos\,\gamma$ beziehungsweise die vorigen Kräfte (a) zu substituiren. Man erhält dadurch:

$$\Sigma m\left(X\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$(t)\ \left\{\begin{aligned}
&\Sigma(mX) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) \text{ und ebenso}\\
&\Sigma(mY) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\\
&\Sigma(mZ) = \Sigma\left(m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right), \text{ ferner}\\
&\Sigma(m[Xy - Yx]) = \Sigma\left(m\left[\frac{y\,\mathrm{d}^2x - x\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\
&\Sigma(m[Xz - Zx]) = \Sigma\left(m\left[\frac{x\,\mathrm{d}^2z - z\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\
&\Sigma(m[Yz - Zy]) = \Sigma\left(m\left[\frac{y\,\mathrm{d}^2z - z\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)
\end{aligned}\right.$$

diess sind sonach die Gleichungen der Bewegung für ein beliebiges freies System von Körpern m, m', m''..., von welchen sich wieder die 3 ersten auf die progressive Bewegung des Systemes oder dessen Schwerpunct, und die 3 letzten auf die Rotation desselben um dessen Schwerpunct, oder um eine durch den Schwerpunct gehende Axe beziehen. Wäre einer dieser Körper gezwungen, auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben, so müsste man den auf ihn wirkenden Kräften noch den Widerstand (als neue Kraft) hinzufügen, welchen der Körper von der Fläche oder Curve erleidet, um dann auch diesen Körper wieder als völlig frei betrachten zu können. (Eine specielle Anwendung des D'Alembert'schen Principes oder Lehrsatzes kommt weiter unten beim Ausfluss aus einem Gefässe, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt, in der Anmerkung mit weiteren Erläuterungen vor.)

Diese 6 Gleichungen enthalten mehrere allgemeine Bewegungsgesetze oder Lehrsätze, wovon wir hier jedoch nur einen der wichtigsten anführen wollen.

15. Sind nämlich nach Verlauf der Zeit t diese von dem Augenblicke an gezählt, als die Bewegung beginnt, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunctes des Systemes der Körper oder materiellen Puncte m, m'..., so ist

(Nr. **16**, [3]), wenn man Kürze halber die Gesammtmasse des Systemes $\Sigma(m) = M$ setzt:

$$Mx_1 = \Sigma(mx),\ My_1 = \Sigma(my),\ Mz_1 = \Sigma(mz),$$

und wenn man diese Gleichungen zweimal nach t differentiirt:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right),\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right),\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die 3 ersten der vorigen Gleichungen (t), so erhält man:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma(mX),\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma(mY),\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma(mZ)\ldots(\alpha);$$

diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung des Schwerpunctes eines freien Systemes von materiellen Puncten oder Körpern im Raume genau so stattfindet, als wenn die sämmtlichen Massen $m, m' \ldots$ in diesem Puncte vereinigt und alle ihre bewegenden Kräfte durch parallele Verschiebungen ihrer Richtungen auf diesen Punct angebracht wären.

Da nun auf diese Weise alle jene Kräfte, deren Componenten oder Seitenkräfte (parallel mit den Achsen) einander gleich und entgegengesetzt sind, aus den Differenzial-Gleichungen dieser Bewegung hinausfallen, dieser Fall aber dann eintritt. wenn die bewegenden Kräfte keine äusseren sind, sondern aus den wechselseitigen Wirkungen entstehen, welche die materiellen Puncte des Systemes auf einander ausüben, indem sich diese nach dem allgemeinen Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wenn diese Kräfte auf den Schwerpunct des Systemes übertragen werden, zu zwei und zwei aufheben; so bewegt sich, sobald auf die materiellen Puncte des gänzlich freien Systemes ausser ihrer eigenen gegenseitigen Einwirkung (durch Anziehung oder Abstossung) keine anderen Kräfte wirken, der Schwerpunct desselben gleichförmig und geradlinig und behält beständig die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit bei, weshalb man diesen Lehrsatz das Princip von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung genannt hat.

Denn zufolge der Annahme von $\Sigma(mX) = 0$, $\Sigma(mY) = 0$, $\Sigma(mZ) = 0$ geben die vorigen Gleichungen (α) nach der ersten Integration:

$$M\frac{dx_1}{dt} = const.,\ M\frac{dy_1}{dt} = const.,\ M\frac{dz_1}{dt} = const.,$$

sowie, wenn man noch einmal integrirt, die Gleichungen:

$$x_1 = ct + C,\ y_1 = c't + C',\ z_1 = c''t + C''.$$

Die 3 ersten dieser 6 Gleichungen zeigen nun deutlich, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunctes constant sei, während die 3 letzten Gleichungen, in welchen $c, c' \ldots C, C' \ldots$ lauter constante Grössen sind, offenbar die Gleichungen einer geraden Linie im Raume sind.

Insofern dieses Princip, oder wenn man will, Axiom der Gleichheit zwischen Action und Reaction, nichts anderes als die Art und Weise ausdrücken soll, in welcher wir uns die Fortpflanzung oder Uebertragung irgend einer Action (Kraft oder Anstrengung) auf ein Object vorstellen, ist wohl die von Professor Decher gerügte Begriffs-Verwirrung oder die

Meinung, als ob ein Körper gleichsam in sich selbst einen Widerwillen gegen jede Veränderung empfände und desshalb sich der Bewegung oder Aenderung derselben widersetze und dagegen eine Reaction ausübe, nicht zu besorgen.

Wirkt z. B. eine Kraft gegen einen festen, unbeweglichen Punct, so wird dieselbe zerstört oder aufgehoben, und der Erfolg ist genau so, oder es hat den Anschein, als ob dieser feste Punct eine Kraft entwickele, welche der ersteren gleich und entgegengesetzt wäre. Sind ebenso zwei Körper A und B miteinander (wie z. B. durch eine steife Linie) unveränderlich verbunden und übt der erstere A, durch die Einwirkung einer Kraft p in Bewegung gesetzt, auf den zweiten B einen Druck oder Zug aus, so erhält dadurch auch dieser eine Bewegung und es hat dabei für den ersten Körper A den Anschein, oder es befindet sich dieser in derselben Lage, als ob der zweite Körper B gar nicht existirte, dafür aber gegen A unmittelbar eine Kraft thätig oder wirksam wäre, welcher jener p gleich, ihr aber gerade entgegengesetzt ist.

Prof. Decher bemerkt hierüber (in einer Abhandlung über Trägheit, Reaction und Kraft): „dass man bei den durch materielle Verbindungen „übertragenen Kräften jede Kraft wie eine durch Zug oder Druck gespannte „Feder betrachten könne, die mit ihren beiden Enden an die betreffenden „materiellen Puncte befestigt ist, und diese entweder einander zu nähern, „oder von einander zu entfernen strebt, dabei aber beide in Bewegung „setzt; dass ferner die Spannung der Feder nur eine und dieselbe Kraft „bilde, welche auf beide Puncte gleichzeitig und in gleicher Weise wirke „und ihnen Geschwindigkeiten ertheile, die ihren Massen umgekehrt proportional sind. Es gibt also in allen Fällen zwischen zwei materiellen Puncten nur eine einzige Wirkung und nicht für den einen eine Action und „für den anderen eine Reaction.“

Es muss hier übrigens bemerkt werden, dass das oben ausgesprochene Axiom, nach welchem jede Kraftäusserung oder Anstrengung (so oft wir nämlich einen Körper in Bewegung setzen, kommt in uns eine gewisse Kraftanstrengung, die wir eine Zeitlang gegen denselben ausüben, zum Bewusstsein) dem Widerstand gleich und entgegengesetzt ist, ein logischer Begriff, und mit dem von Newton entdeckten Naturgesetze, nach welchem sich zwei Körper oder materielle Puncte gegen einander so verhalten, als ob zwischen ihnen eine gleiche, entgegengesetzte Action und Reaction stattfände, nicht zu verwechseln ist. Ersteres beruht auf einem logischen Schluss und gilt selbst für ideelle Körper, während letzteres ein auf Thatsachen beruhendes Gesetz für wirklich bestehende Körper ist.

Das Gesetz der Reaction besteht nämlich allgemein in der Thatsache, dass so oft in der Natur irgend wo ein Bewegungsact stattfindet, sich immer auch gleichzeitig an einem anderen Orte ein dem ersteren gleicher und entgegengesetzter Act der Bewegung geltend macht, welcher nur oft durch Reibung, feste Widerstände u. s. w. aufgehoben, jedoch sogleich bemerkbar wird, sobald diese Hindernisse beseitigt werden.

Tausend Thatsachen beweisen, dass wenn sich ein Körper einem 2ten nähert oder von diesem entfernt, sich auch dieser 2te Körper dem 1sten gerade so nähert oder von ihm entfernt, als ob in diesem eine anziehende oder abstossende Kraft thätig wäre, und dass man mit Recht sagen kann: es verhalten sich beide Körper gegen einander gerade so, als ob zwischen beiden eine Action und Reaction gleich und entgegengesetzt stattfände. Der Umstand, dass man sich später erlaubt hat, diese Erklärung abzukürzen und einfach zu sagen, dass zwischen zwei Körpern die Reaction immer gleich und entgegengesetzt der Action sei, mag allerdings bei Einigen zu der von Prof. Decher gerügten Begriffsverwirrung Anlass gegeben haben.

Offenbar hängt der unrichtige Begriff, welchen man öfter mit der Benennung Reaction der Körper verbindet, mit dem eben so falschen Ausdrucke der Trägheitskraft („*force d'inertie*") zusammen. Es dürfte hier nicht am unrechten Orte sein, das Gesetz der Trägheit kurz zu wiederholen; es besteht dasselbe nämlich darin, dass von dem Augenblicke an, als die auf einen beweglichen Körper einwirkenden Kräfte zu wirken aufhören, dieser (natürlich bei Abwesenheit jedes äusseren Widerstandes) eine gleichförmige Bewegung nach gerader Linie, nämlich (wenn derselbe in einen einzigen Punct concentrirt gedacht wird) nach der Tangente der von ihm bis dahin beschriebenen Curve mit Beibehaltung jener Geschwindigkeit, welche er im Augenblicke des Verschwindens dieser Kräfte erlangt hat, annimmt.

Dieses von Keppler entdeckte Naturgesetz (welches sich keineswegs, wie man gewöhnlich annimmt, *a priori* beweisen lässt) erweist sich in allen Fällen als vollkommen richtig und berechtigt uns zugleich zu der Annahme, dass überall, wo wir eine gleichförmige Bewegung wahrnehmen, diese ohne Einwirkung irgend einer Kraft (wie wir diese in der Mechanik verstehen) stattfinde, oder dass für unseren Calcül diese Kraft gleich Null sei.

Die Körper, welche wir in Bewegung setzen und wobei wir einer gewissen Anstrengung bedürfen, widerstehen dieser letzteren keineswegs in der Art, wie diess ein festes Hinderniss thut; denn die Körper weichen, wenn keine äusseren Hindernisse vorhanden sind, selbst der allerkleinsten Kraftanstrengung.

Bekanntlich werden in der Mechanik diese Kraftanstrengungen durch abstracte Zahlen oder Kräfte ersetzt, deren Einheit die Kraftanstrengung ausdrückt, um ein Gewicht von 1 Pfund, 1 Kilogramm u. s. w. schwebend zu erhalten.

Alle in der Natur vorkommenden Bewegungen, deren Ursachen uns im Allgemeinen unbekannt sind, könnten immer auch durch solche Kräfte hervorgebracht werden, welche wir in der Mechanik zu Grunde legen, und es ist eben mit die Aufgabe der Mechanik, die Grösse der Kraft zu bestimmen, welche im Stande ist, irgend eine vor Augen habende Erscheinung oder Bewegung in der Natur genau ebenso hervorzubringen.

Um auf den hier entwickelten Satz der sogenannten Erhaltung des Schwerpunctes zurückzukommen, so folgt daraus 1stens, dass alle für den materiellen Punct geltenden und entwickelten Gesetze, welche aus der Einwirkung beliebiger Kräfte hervorgehen, auch ohne Ausnahme für den Schwerpunct eines jeden materiellen Systemes gelten, wenn man sich nur die Gesammtmasse des Systemes in diesem Schwerpuncte concentrirt, und alle äusseren Kräfte nach ihrer Grösse und Richtung in diesen Punct verlegt denkt; und dass 2tens die inneren Kräfte, welche höchstens die Gestalt oder Form des Systemes ändern können, im Falle dasselbe nicht starr ist, auf diese Bewegung des Schwerpunctes nicht den geringsten Einfluss haben.

So können z. B. die Muskelkräfte der Menschen und Thiere, als innere Kräfte, durchaus keine Fortbewegung ihres Schwerpunctes hervorbringen, wenn sie nicht nach dem vorhin erwähnten Gesetze der Reaction äussere Kräfte in der Art hervorrufen, dass wenn sie den Schwerpunct oder sich selbst nach irgend einer Richtung hin bewegen wollen, sie einen Stützpunct finden, welcher eine Reaction nach entgegengesetzter Richtung erzeugt.

Steht ein Mensch z. B. auf einem festen Boden, so kann er sich, wobei die horizontale Ebene eine verticale Reaction entwickelt, erheben oder niederlassen. Ebenso kann er sich vor- oder rückwärts bewegen, so lange der Boden durch seine Rauhigkeit auch eine Reaction in horizontaler Richtung darbietet. (Auf einer absolut glatten horizontalen Ebene wäre jede seitliche Fortbewegung unmöglich.)

Springt ein Mensch in die Höhe, so nimmt der Druck gegen den Stützpunct (also auch dessen Reaction) momentan und zwar insolange zu, als der Schwerpunct mit Beschleunigung aufwärts steigt; das Gegentheil findet statt, wenn er sich niederlässt.

Bei einem in Bewegung befindlichen Eisenbahnzuge bilden die Schienen die Stützpuncte für die Locomotiv-Räder und es entwickelt sich in diesen in jedem Augenblicke die nöthige Reaction zur Fortbewegung des Zuges, so dass also hier die Schienen dieselbe Rolle spielen, wie der Boden beim Gehen oder Laufen der Menschen und Thiere.

Bei einem sich gleichförmig fortbewegenden Dampfschiffe würden sich die Pressungen, welche einerseits auf den Kiel und die Schiffsschale und andererseits gegen die Radschaufeln stattfinden, vollkommen aufheben, wenn sie durch parallele Verschiebungen in den Schwerpunct (oder überhaupt in irgend einen Punct) angebracht oder verlegt würden.

Hängt am Deckel eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefässes, welches auf einer Wagschale im Gleichgewicht steht, ein dichterer Körper, z. B. eine Stahlkugel an einem Faden, so wird in dem Augenblicke, als der Faden reisst, also die Kugel mit beschleunigter Bewegung in der Flüssigkeit herabsinkt, diese Schale leichter oder gehoben und erst wenn die Bewegung der Kugel (durch den Widerstand der Flüssigkeit) etwa gleichförmig geworden, würde sich das Gleigewicht wieder herstellen. Fällt die Kugel auf den Boden des Gefässes und prallt sie von diesem zurück, so wird in diesem Momente die Schale schwerer oder zum Sinken gebracht.

Zerspringt eine in die Luft geworfene Bombe, so verfolgt der Schwerpunct derselben, so lange die Trümmer nicht auf andere Körper treffen, seinen Weg gerade so, als ob die Bombe ganz geblieben wäre; nur werden in der Bewegung Modificationen durch den Widerstand der Luft herbeigeführt.

Und so liessen sich über die Reaction und Bewegung des Schwerpunctes eines Systemes noch sehr viele Beispiele anführen.

16. Um von diesem wichtigen Satze ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier Kugeln betrachten, welche aufeinander stossen.

Es seien am Ende der Zeit t x und x' die Abstände ihrer Mittelpuncte von einem festen Punct der Geraden, auf welcher sich die Kugeln m und m' bewegen, sowie x_1 (in demselben Augenblicke) der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieser Körper von demselben Puncte; so hat man (Nr. **32**):

$$(m+m')\,x_1 = mx + m'x'$$

oder wenn man nach t differenziirt:

$$(m+m')\frac{dx_1}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} \ldots (\alpha),$$

wodurch die den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ der beiden Kugeln entsprechende Geschwindigkeit $\frac{dx_1}{dt}$ des Schwerpunctes gegeben ist. Nun hat man aber vor dem Stoss $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dx'}{dt} = v'$, und nach dem Stoss, wenn die Kugeln unelastisch sind (§. 241) $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = V$, und wenn sie vollkommen elastisch sind (§. 244): $\frac{dx}{dt} = 2V - v$, $\frac{dx'}{dt} = 2V - v'$. Es ist also die Geschwindigkeit des Schwerpunctes vor dem Stoss, wenn man in die Gleichung (α) substituirt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m+m'}$$

und nach dem Stoss, mit Rücksicht auf die Relation von $V = \frac{mv + m'v'}{m+m'}$ für beide Fälle (wenn man wieder in (α) gehörig substituirt):

$$\frac{dx_1}{dt} = V = \frac{mv + m'v'}{m+m'},$$

welches genau derselbe Werth wie vor dem Stosse ist; der Stoss dieser beiden Körper ändert also durchaus nichts in der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes (da er sich überdiess auch auf der ursprünglichen Geraden gleichförmig fortbewegt).

17. Sind die mit den Massen $m, m', m'' \ldots$ behafteten materiellen Puncte in Bewegung, so seien für einen bestimmten Augenblick $x, x', x'' \ldots$ ihre Abscissen auf eine beliebige Achse bezogen und X die Abscisse des Schwerpunctes dieses Systemes für denselben Augenblick; so ist (Nr. **32**.) $(m + m' + \ldots)\,X = mx + m'x' + \ldots$, d. h. $X\Sigma(m) = \Sigma(mx)$. Während des folgenden Zeitelementes dt nehmen die Abscissen um $dx, dx' \ldots dX$ zu und man hat $\frac{dX}{dt}\Sigma(m) = \Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) \ldots (u)$, d. h. die auf eine Achse projicirte Grösse der Bewegung der Gesammtmasse des Systemes, diese im Schwerpunct desselben vereinigt gedacht, ist gleich der Summe der Bewegungsgrössen sämmtlicher einzelner Massen projicirt auf die nämliche Achse. Zwei ähn-

liche Gleichungen mit (u) erhält man auch für die beiden übrigen Coordinatenachsen. Ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und sind v, v'... jene der Puncte m, m'..., so kann man, wenn V_x die Projection der Geschwindigkeit auf die Achse der x bezeichnet und damit analog auch die übrigen Projectionen bezeichnet werden, diese Gleichungen so schreiben:

$$V_x \Sigma(m) = \Sigma(m v_x), \quad V_y \Sigma(m) = \Sigma(m v_y), \quad V_z \Sigma(m) = \Sigma(m v_z).$$

18. Um schliesslich noch das Problem der **Rotation um eine feste Achse** zu behandeln, drehe sich das Element dm irgend eines Körpers um die feste Achse AZ (Fig. 28), welche zugleich von den 3 rechtwinkeligen Achsen AX, AY, AZ, worauf dieser Körper bezogen wird, die Achse der z bilden soll. Sei N die Projection dieses Elementes dm auf die Ebene der xy, dann ist $AN = r$ der Halbmesser jenes Kreises, welchen das Element bei der Rotation des Körpers um die Achse AZ beschreibt; ferner ziehe man in der Ebene der xy durch diesen Punct N die Gerade DE senkrecht auf AN. Diess vorausgesetzt denke man sich wieder die auf das Körperelement dm wirkenden beschleunigenden Kräfte in 3 Componenten X, Y, Z, beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z parallel zerlegt, so verschwinden, da die Rotation bloss um die Achse der z stattfinden soll, von den 3 letzten auf Rotation sich beziehenden Gleichungen in (t) sofort die beiden letzten von selbst und es bleibt, wenn man gleich statt der Summenzeichen die Integralzeichen setzt, bloss die Gleichung:

$$\int\left(\frac{y\, d^2x - x\, d^2y}{dt^2}\right) dm = \int (Xy - Yx)\, dm \ldots (1),$$

wobei sich die Integration auf die ganze Masse des rotirenden Körpers bezieht.

Ist u die Winkelgeschwindigkeit jedes Elementes des Körpers am Ende der Zeit t, also $v = ru$ die absolute Geschwindigkeit des genannten Elementes dm, und nimmt man u positiv oder negativ, je nachdem die Rotation in der Richtung DNE oder in der entgegengesetzten END statt hat; so sind, wenn man noch den W. $XDE = \omega$ setzt, die Seitengeschwindigkeiten nach AX und AY beziehungsweise:

$$\frac{dx}{dt} = -v \, Cos\, \omega = -v\frac{y}{r} \text{ und } \frac{dy}{dt} = v\, Sin\, \omega = v\frac{x}{r},$$

oder wegen $v = ru$ auch $\dfrac{dx}{dt} = -uy$, $\dfrac{dy}{dt} = ux$,

woraus sofort $u(x^2 + y^2)\, dt = x\, dy - y\, dx$,

oder wegen $x^2 + y^2 = r^2$ auch:

$$r^2 u\, dt = x\, dy - y\, dx \ldots (2)$$

folgt.

Diese Gleichung differenziirt gibt, da r und dt constant sind:

$$x\, d^2y - y\, d^2x = r^2\, du\, dt.$$

Mit Rücksicht auf diese letzte Gleichung, sowie darauf, dass du für alle Puncte des rotirenden Körpers denselben Werth besitzt, also bei allen in Bezug auf dm vorzunehmenden Integrationen du als constant zu betrachten ist, erhält die obige Gleichung (1) auch die Form:

$$\frac{du}{dt}\int r^2\, dm = \int (Yx - Xy)\, dm \ldots (3).$$

19. Um von dieser letzteren Gleichung schliesslich eine Anwendung zu zeigen, wollen wir noch die Rotation eines physischen Pendels betrachten.

Zu diesem Ende gebe man der Ebene der xy (Fig. 25) eine verticale Lage und lasse die Achse der y in die Richtung der Schwere fallen, so werden die Achsen der x und z, welche letztere als Rotationsachse in C auf der Ebene der xy senkrecht steht, horizontal, jene der y dagegen vertical sein. Da nun hier von den 3 Componenten X, Y, Z die erste und letzte Null, die 2te dagegen $Y = g$ ist, so verwandelt sich die vorige Gleichung (3) in die folgende: $\frac{du}{dt}\int r^2 dm = g\int x\,dm$, oder wenn x' und y' die Coordinaten des Schwerpunctes und M die Masse des Körpers bezeichnen, wodurch (Nr. **32**) $\int x\,dm = Mx'$ wird, auch:

$$\frac{du}{dt} = \frac{gMx'}{\int r^2 dm} \ldots (A).$$

Beschreibt nun der Schwerpunct des an einen gewichts- und massenlosen undehnbaren Faden befestigten Körpers bei seiner Rotation um die genannte durch C auf XCY perpendikuläre Achse (an welcher das andere Ende des Fadens befestigt ist) in der Ebene der xy den Kreisbogen ABA', wobei wieder, wie beim einfachen Pendel, wenn der Schwerpunct beim Beginn der Oscillation in A und nach Verlauf der Zeit t in M ist, die Winkel BCA und BCM durch α und ω bezeichnet werden sollen; so sind, wenn $CA = CB = a$ gesetzt wird, die Coordinaten des Schwerpunctes des betreffenden Körpers am Ende der Zeit t:

$$x' = a \operatorname{Sin} \omega \quad \text{und} \quad y' = a \operatorname{Cos} \omega,$$

so dass also $dx' = a \operatorname{Cos} \omega \, d\omega$ und $dy' = -a \operatorname{Sin} \omega \, d\omega$ wird.

Die obige Gleichung (2) der vorigen Nummer erhält für den vorliegenden Fall, in welchem a statt r zu setzen ist, die Form: $x'dy' - y'dx' = a^2 u\,dt$, und wenn man in dieser für x', y', dx', dy' die vorigen Werthe substituirt und reducirt, so wird $-a^2 d\omega = a^2 u\,dt$ und daraus $u = -\frac{d\omega}{dt}$.

Ist ferner Mk^2 das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf eine durch dessen Schwerpunct gehende, mit der Rotationsachse CZ parallele Achse, so ist (Nr. **136**) $M(a^2 + k^2) = \int r^2 dm$ das Moment der Trägheit dieses selben Körpers in Beziehung auf die Rotationsachse CZ selbst.

Substituirt man endlich in die obige Gleichung (A) die hier gefundenen Werthe von x', u und $\int r^2 dm$; so erhält man für den vorliegenden Fall die Gleichung:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{ag \operatorname{Sin} \omega}{a^2 + k^2},$$

und wenn man sie mit $2\,d\omega$ multiplicirt und integrirt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2 + k^2} \operatorname{Cos} \omega + C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C hat man für den Anfang der Bewegung im Puncte A, d. i. für $\omega = \alpha$ die Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt} = 0$, daher

$C = -\frac{2ag}{a^2+k^2} Cos\,\alpha$ und sonach allgemein:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2+k^2}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha),$$

eine Gleichung, welche mit jener (m) in Nr. **129**, Anmerkung, für das einfache Pendel bis auf den constanten Factor $\frac{2ag}{a^2+k^2}$ (welcher für $k=0$ dem dortigen gleich wird) vollkommen übereinstimmt.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines *Körpers*.

(§. 197.)

132. Handelt es sich nicht bloss um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sei zuerst NS (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Grösse F, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in derselben Ebene liegenden Punct A oder um eine auf dieser Ebene in A perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w umdreht.

Betrachtet man bei dieser Umdrehung einen Punct M dieser Fläche, wofür die in derselben Ebene angenommenen rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = y$ sind und die entsprechende Fläche $\mathrm{d}F$ für die Masse $\mathrm{d}M$ und umgekehrt gesetzt werden kann; so erhält man für die Centrifugalkraft $\mathrm{d}R$ des materiellen Punctes $\mathrm{d}M$ (wenn man nämlich diese Kraft für die ganze Fläche oder Masse mit R bezeichnet) nach Nr. **130**: $\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}F.z^2w^2}{z} = zw^2\mathrm{d}F$, wenn man nämlich den Abstand $AM = z$ setzt.

Zerlegt man diese nach AM wirksame Kraft in zwei nach den rechtwinkeligen Achsen AX, AY wirkende Seitenkräfte $\mathrm{d}P$ und $\mathrm{d}Q$, so wird $\mathrm{d}P = \mathrm{d}R.\frac{x}{z}$ und $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}R.\frac{y}{z}$, oder:

$$\mathrm{d}P = w^2x\,\mathrm{d}F \text{ und } \mathrm{d}Q = w^2y\,\mathrm{d}F;$$

diese Gleichungen integrirt geben:

$$P = w^2\int x\,\mathrm{d}F \text{ und } Q = w^2\int y\,\mathrm{d}F,$$

oder wenn X und Y die Coordinaten des Schwerpunctes dieser Fläche F sind (man sehe die Relationen II. in Nr. **25**):

$$P = w^2XF \text{ und } Q = w^2YF.$$

Da nun R die Mittelkraft aus diesen beiden Seitenkräften