$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha)\ldots(m),$$

oder: $$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{a}}\,.\,\sqrt{Cos\,\omega - Cos\,\alpha}.$$

Sind nun, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Winkel ω und α klein, so kann man näherungsweise $Cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}$ und $Cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ setzen (nämlich die höheren Potenzen von ω und α auslassen), wodurch die vorige Gleichung in folgende:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}(\alpha^2 - \omega^2)}$$

übergeht und woraus, mit Rücksicht darauf, dass wie bemerkt, $d\omega$ und dt entgegengesetzte Zeichen haben sollen, sofort:

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,.\,\frac{d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}$$

und daraus durch Integration $t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,.\,arc\,Cos\,\frac{\omega}{\alpha}$ folgt, wozu keine Constante kommt, weil für $\omega = \alpha$ die Zeit t und auch $arc\,Cos\,1 = 0$ ist.

Für den tiefsten Punct B wird $\omega = 0$ und t geht in die halbe Schwingungszeit $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{g}}\,.\,arc\,Cos\,0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ über, so dass wieder, wie oben, $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ wird.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punctes.

(§. 195.)

130. Ist ein materieller Punct, dessen Masse gleich 1 sein soll, bei seiner Bewegung gezwungen, den Kreis AMB vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 26) zu beschreiben, so lässt sich der Druck, welchen derselbe durch diese Bewegung auf die Curve ausübt (gleich der Centrifugalkraft) auf folgende Weise bestimmen.

Zerlegt man die auf den Punct A wirkende beschleunigende Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine nach der Tangente AT, die andere nach der Normale AC des Kreises, so rührt die Bewegung des materiellen Punctes in der Richtung der Projection auf diese Normale lediglich von dieser letztgenannten Seitenkraft her. Sieht man aber diese Seitenkraft während einer unendlich kleinen Zeit dt (wie diess immer erlaubt ist) sowohl in ihrer Grösse als Richtung als constant an und ist während dieser Zeit $AM = ds$ der Weg des beweglichen Punctes und $AP = dx$ der Weg der Projection dieses Punctes auf die Normale; so ist nach der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung diese nach der Normale wirkende Kraft [**125**. Beispiel, Relation (n)] $f = \frac{2\,dx}{dt^2}$, oder da der Bogen $AM = ds$ mit dessen Sehne verwechselt werden darf und nach einem bekannten geometrischen Satze dann $dx = \frac{ds^2}{2r}$ ist, auch $f = \frac{1}{r}\frac{ds^2}{dt^2}$ oder wegen $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte A bezeichnet, $f = \frac{v^2}{r} \ldots (n)$, welche Kraft (Centripedalkraft genannt) sofort der Centrifugalkraft oder dem Drucke gegen die Curve gleich aber entgegengesetzt ist. Besitzt der bewegliche Punct die Masse m, so ist (**125**.) diese Kraft:

$$F = mf = \frac{mv^2}{r}.$$

Bezeichnet M das Gewicht der Masse m, so ist (§. 123, Anmerkung 3.) $M = mg$ oder $m = \frac{M}{g}$, folglich:

$$F = \frac{Mv^2}{rg} \text{ (vergl. §. 196, Gleich. I).}$$

Anmerkung. Ist w die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punctes, folglich $v = rw$, so erhält die Gleichung (n) auch die Form $f = rw^2 \ldots (m)$.

131. Beschreibt der materielle Punct überhaupt eine gegebene Curve im Raume, so seien, um die Centrifugalkraft für diesen allgemeinen Fall zu bestimmen, M_1M und MM' (Fig. 27) zwei aufeinander folgende Elemente dieser Curve, D und D' ihre Halbirungspuncte und MT und $M'T'$ ihre Verlängerungen; so ist bekanntlich (Lehrbuch III. §. 97, Comp. §. 763) TMT' die Krümmungsebene, sowie der Winkel TMT' der Winkel der Contingenz der Curve im Puncte M, und eine in dieser Ebene gezogene Gerade MO, welche den Winkel M_1MM' halbirt, fällt sofort mit dem entsprechenden Krümmungshalbmesser zusammen, so dass der Punct O den Mittelpunct der Krümmung dieser Curve im Puncte M darstellen kann. Setzt man das Curvenelement $M_1M = DD' = ds$, den unendlich kleinen Winkel $TMT' = \delta$, sowie den Krümmungshalbmesser $OM = \varrho$; so ist, wie bekannt, $ds = \varrho\,\delta$ (weil nämlich das Curvenelement DMD' als ein Kreisbogen vom Halbmesser OM angesehen werden kann, welchem der Mittelpunctswinkel $DOD' = TMT'$ entspricht) oder $\delta = \frac{ds}{\varrho} \ldots (a)$.

Diess vorausgesetzt, komme der materielle Punct nach Verlauf der Zeit t im Puncte M mit der Geschwindigkeit v an, so dass er also, wenn er ganz frei wäre, in der Richtung MT mit derselben Geschwindigkeit fortginge (indem wir vor der Hand von allen Kräften, die auf diesen Punct einwirken können, abstrahiren); da dieser Punct jedoch nach der gemachten Voraussetzung die Curve $M_1MM'E$ zu beschreiben gezwungen ist, so ändert er im Puncte M seine Richtung von MT in MT'. Errichtet man in der genannten Krümmungsebene auf MT' das Perpendikel MN', so kann man die nach MT gerichtete Geschwindigkeit v in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten nach MT' und MN' zerlegen, wovon sofort die erstere $= v\,Cos\,\delta$ und die letztere $= v\,Sin\,\delta$ sein wird, und die Wirkung der Centripedalkraft f oder wenn man will der Curve, wird darin bestehen, diese letztere Geschwindigkeit aufzuheben, damit nur die erstere allein bestehen bleibt, oder mit andern Worten, die genannte, der Centrifugalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft f muss in dem materiellen Puncte oder dem Beweglichen eine gleiche Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$ und zwar nach entgegengesetzter Richtung von MN' erzeugen. Nimmt man nun an, dass die Kraft f diese Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$ in dem Beweglichen oder materiellen Punct, dessen Masse $= 1$ sein soll, während der Zeit dt, als derselbe das Bogenelement DMD' zurücklegt, hervorbringt; so wird diese beschleunigende Kraft (**125.**) durch diese während der unendlich kleinen Zeit dt erzeugten Geschwindigkeit $v\,Sin\,\delta$, dividirt durch die Zeit dt gemessen oder ausgedrückt, so dass man hat $f = \frac{v\,Sin\,\delta}{dt}$. Setzt man δ statt $Sin\,\delta$ (weil δ unendlich klein) und für δ den obigen Werth aus (a), so erhält man mit Rücksicht darauf, dass (**120.**) $ds = v\,dt$ ist, auch $f = \frac{v^2}{\varrho}$, oder wenn der bewegliche Punct die Masse m besitzt, für die Centrifugalkraft im Puncte M, welche sofort nach der Richtung MN wirksam ist:

$$F = \frac{mv^2}{\varrho} = m\varrho w^2 \ldots (i),$$

wenn nämlich w die Winkel-Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M ist.

Was die Geschwindigkeit $v\,Cos\,\delta$ betrifft, mit welcher das Bewegliche von M aus nach MM' in der Curve weiter geht, so bleibt diese wegen $Cos\,\delta = 1$, ungeändert $= v$.

Wirken auf das Bewegliche eine oder mehrere Kräfte, so ändert sich die Geschwindigkeit v je nach der Grösse der nach der Tangente der Curve zerlegten Seitenkraft; ebenso bringt die in der Richtung der Normale wirksame Seitenkraft einen weiteren Druck auf die Curve (welcher auch stattfände, wenn der bewegliche Punct ruhte) hervor, den man zur Centrifugalkraft noch hinzufügen muss.

Zur Uebung und um dem Anfänger überhaupt mehr Uebersicht und Gewandtheit in der Bewegungslehre zu verschaffen, geben wir hier nebst mehreren vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen und Sätzen, auch noch eine weitere Entwickelungsart der Centrifugalkraft.

1. Bei der gleichförmigen Bewegung sind die Geschwindigkeiten den in gleichen Zeittheilchen zurückgelegten Räumen, diese letzteren aber den bewegenden Kräften, folglich auch die Geschwindigkeiten diesen Kräften und umgekehrt proportional, so dass also bei dieser Bewegung Kraft und Geschwindigkeit eines für das andere als Mass dienen kann. Aus diesem Grunde lassen sich auch alle für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte aufgestellten Regeln zugleich für die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten anwenden.

2. Um die Gesetze der ungleichförmigen Bewegung auf jene der gleichförmigen zurückzuführen, kann man sich vorstellen, dass bei der Bewegung eines Punctes, welcher von einer continuirlich fortwirkenden Kraft, wie es z. B. bei der Schwerkraft der Fall, getrieben wird, diese Kraft nicht ohne Unterbrechung oder continuirlich wirkt, sondern ihre Wirkungen durch unmerklich kleine Zeiten von einander getrennt sind. Diese Vorstellungsart, welche mit den Principien der Differenzial-Rechnung besser übereinstimmt, führt zu demselben Resultate wie die Annahme von dem Wirken ohne Unterbrechung; denn stellt man die Geschwindigkeiten eines von einer continuirlich wirkenden Kraft getriebenen Körpers durch die Ordinaten einer Curve vor, so verwandelt sich diese Curve im ersteren Falle in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, welches sofort als mit der Curve zusammenfallend angesehen werden kann. Bezeichnet man daher mit dt die Dauer des unendlich kleinen Zeittheilchens, welche die successiven Wirkungen einer beliebigen bewegenden Kraft von einander trennt, so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig angesehen werden, so dass, wenn ds den in dieser Zeit zurückgelegten unendlich kleinen Raum bezeichnet, sofort $\frac{ds}{dt}$ die entsprechende Geschwindigkeit ist. Denkt man sich also die Zeit t, während welcher die bewegende Kraft bei der ungleichförmigen Bewegung auf den beweglichen Körper wirkt, in unendlich viele, unendlich kleine Theile getheilt, so zerfällt diese Bewegung in unendlich viele gleichförmige Bewegungen, deren Geschwindigkeiten in den einzelnen Intervallen constant sind und nur von einem Intervalle zum andern variiren.

3. Was die sogenannte beschleunigende Kraft betrifft, welche diese eben betrachtete Bewegung erzeugt, so müssen, da ihre Wirkung die Bewegung continuirlich zu ändern strebt, ihr auch diese augenblicklichen Aenderungen zum Masse dienen.

Da man nun während des Zeitelementes dt die Wirkung der beschleunigenden Kraft P als constant ansehen kann, so wird, wenn dv die Zunahme der Geschwindigkeit am Ende der Zeit dt bezeichnet, sofort:

$$dv = P dt, \text{ also } P = \frac{dv}{dt} \text{ und wegen } v = \frac{ds}{dt}, \text{ auch } P = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung wird daher die beschleunigende Kraft durch den Quotienten aus dem Quadrate des als constant angenommenen Zeitelementes in das zweite Differenziale des Raumes gemessen. Zugleich lässt sich auf diese Kraft auch alles das anwenden, was bei der gleichförmigen Bewegung über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gesagt wurde.

4. Auf die sogenannten bewegenden Kräfte übergehend, so ist, wenn die beschleunigende Kraft p in den materiellen Punct von der Masse m einwirkt, die entsprechende bewegende Kraft $P = pm$, oder wegen $p = \frac{dv}{dt}$ auch $P = m\frac{dv}{dt}$, wobei der Quotient $\frac{dv}{dt} = \varphi$ die durch die Kraft p in der Masse m hervorgebrachte Beschleunigung bezeichnet.

Ist P eine constante Kraft, und bringt diese in der Masse m nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit v hervor, so ist die Beschleunigung $\varphi = \frac{v}{t}$ und daher $P = \frac{mv}{t}$. Man hat daher als Mass:

$$\text{der constanten Kräfte } P = m\varphi = \frac{mv}{t},$$

$$\text{der variablen Kräfte } P = m\varphi = m\frac{dv}{dt},$$

oder es wird jede Kraft durch das Product aus der Masse, in welche sie wirkt, in die Beschleunigung der Masse gemessen oder ausgedrückt; dabei ist jene Masse zur Einheit genommen, welche durch die Einwirkung der Krafteinheit während der Zeiteinheit eine durch die Längeneinheit dargestellte Geschwindigkeit erlangt.

Aus den vorigen Relationen folgen jene (in Nr. **54.** erwähnten) $Pt = mv$ und $\int P dt = \int m dv$, in Folge welcher der Impuls einer Kraft nach einer bestimmten Zeit, der dieser Zeit entsprechenden Grösse der Bewegung des materiellen Punctes gleich ist.

5. Wirken auf einen freien materiellen Punct von der Masse m, welcher bereits irgend eine Anfangs-Geschwindigkeit besitzen mag, beliebig viele Kräfte, so kann man durch den Punct A, in welchem die Einwirkung dieser Kräfte beginnt, ein rechtwinkeliges Coordinaten-System legen, jede dieser Kräfte in 3 aufeinauder senkrechte Componenten nach den Richtungen dieser Achsen zerlegen und (Nr. **14.**) die Resultirende aus allen diesen Kräften bestimmen. Die Aufgabe der Bewegung des materiellen Punctes

im Raume besteht dann allgemein darin, 1stens nach Verlauf einer bestimmten Zeit die Lage oder Position dieses Punctes, 2. seine Geschwindigkeit und 3. die Gleichungen der von diesem Puncte beschriebenen Curve oder Trajectorie zu bestimmen.

Ist P die Resultirende aller auf den Punct einwirkenden Kräfte und bildet diese mit den 3 Achsen in der genannten Ordnung die Winkel α, β, γ; so sind P, α, β, γ bekannte Functionen der Zeit t. Ist ferner V die Geschwindigkeit und sind a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit denselben Achsen bildet; so sind $P \, Cos \, \alpha$, $P \, Cos \, \beta$, $P \, Cos \, \gamma$ die Componenten der Kraft P und zugleich auch die Projectionen derselben auf die Coordinatenachsen, sowie $V \, Cos \, a$, $V \, Cos \, b$, $V \, Cos \, c$ die Projectionen der Geschwindigkeit V auf die nämlichen Achsen.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass zwischen den Projectionen p und $\frac{dv}{dt}$ der Kraft P und Beschleunigung $\frac{dV}{dt}$ (wenn man nämlich P und V auf ein und dieselbe Gerade projicirt [m. s. Zusatz 1.]), dieselben Beziehungen wie zwischen der Kraft P und der auf den materiellen Punct m hervorgebrachten Beschleunigung bestehen; es ist daher, wenn man diesen Satz nach und nach auf die 3 Achsen bezieht, sofort:

$$P \, Cos \, \alpha = m \frac{d(V \, Cos \, a)}{dt}, \quad P \, Cos \, \beta = m \frac{d(V \, Cos \, b)}{dt}, \quad P \, Cos \, \gamma = m \frac{d(V \, Cos \, c)}{dt},$$

oder wenn man, wie es üblich, die 3 nach den Achsen der x, y, z gerichteten Componenten der Kraft P durch X, Y, Z, sowie jene der Geschwindigkeit V durch v, u, w bezeichnet, auch:

$$X = m \frac{dv}{dt}, \quad Y = m \frac{du}{dt}, \quad Z = m \frac{dw}{dt} \ldots (1),$$

wobei noch überdiess (**120.**) die 3 Relationen bestehen:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad u = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \ldots (2).$$

Auch kann man diese Werthe in (1) substituiren und setzen:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2} \ldots (3).$$

Diese 3 Gleichungen (3) oder 6 Gleichungen (1) und (2) lösen das genannte Problem vollständig auf, indem sich daraus die Grössen x, y, z, v, u, w als Functionen bekannter Grössen bestimmen oder ausdrücken lassen. Man nennt desshalb auch die drei Gleichungen (3) die allgemeinen oder Fundamental-Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punctes im Raume.

Wie man sieht, ist auf diese Weise das Problem der krummlinigen Bewegung auf jenes von drei geradlinigen Bewegungen nach den Achsen der x, y, z zurückgeführt.

Ist der bewegliche Punct frei, so geben die ersten Integrale dieser Gleichungen (3) die Geschwindigkeiten, welche er nach einer bestimmten Zeit nach den Richtungen der Achsen besitzt, sowie die zweiten oder endlichen Integrale die Coordinaten x, y, z in Functionen der Zeit t, welche die Lage desselben in diesem Augenblicke angeben. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so bleiben zwischen diesen 3 Variablen x, y, z noch

2 Gleichungen als **Gleichungen der Trajectorie**, welche von dem Puncte m im Raume beschrieben wird, und welche im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung ist.

Ist der bewegliche Punct **nicht frei**, sondern ist er z. B. gezwungen, bei seiner Bewegung beständig auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben; so eliminirt man mit Hilfe der Gleichung der Fläche oder der Gleichungen der Curve aus den durch Integration der obigen Relationen (3) für x, y, z entstehenden Gleichungen so viele Veränderliche als Gleichungen gegeben sind und erhält so für X, Y, Z die Bedingungs-Gleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn der gegebene Punct den gegebenen Anforderungen entsprechen soll.

6. Ist der bewegliche Punct gezwungen, auf einer gegebenen **krummen Fläche** zu bleiben, so werden alle auf diesen Punct gegen die Fläche normal wirkenden Kräfte durch den Widerstand der Fläche aufgehoben. Da man aber diesen Widerstand durch eine normale Kraft von unbestimmter Grösse ersetzen kann, so kann man sich auch diesen Punct als einen vollkommen freien vorstellen, wenn man nur zu den vorhandenen auf den materiellen Punct wirkenden äusseren Kräften noch eine Kraft von unbestimmter Grösse hinzufügt, welche in jeder Position des Punctes gegen die krumme Fläche normal ist. Obschon nun durch Einführung dieser Kraft eine neue Unbekannte, nämlich ihre Grösse (ihre Lage ist aus der Bedingung, dass sie auf die Fläche normal sein muss, bestimmt) hinzukommt, so fällt doch wieder Eine hinaus, indem die Coordinaten des materiellen Punctes fortwährend untereinander durch die Gleichung der krummen Fläche verbunden oder der letzteren Genüge leisten müssen. Es treten daher hier genau wieder eben so viele Unbekannte auf, als in jenem Falle, in welchem der bewegliche Punct vollkommen frei ist.

Es seien nun wieder, wie vorhin X, Y, Z die nach den drei Coordinatenachsen gerichteten Seitenkräfte der Resultirenden aus allen gegebenen äusseren Kräften und F die der Grösse nach unbekannte Kraft, welche den Widerstand der krummen Fläche repräsentirt, sowie λ, μ, ν die Winkel ihrer Richtung mit den 3 Achsen, welche, wie bemerkt, bekannte Functionen der Coordinaten x, y, z sind.

Diess vorausgesetzt sind die drei **allgemeinen** oder **Fundamental-Gleichungen** der Bewegung:

$$X + F\,Cos\,\lambda = m\frac{dv}{dt},\quad Y + F\,Cos\,\mu = m\frac{du}{dt},\quad Z + F\,Cos\,\nu = m\frac{dw}{dt} \ldots (4),$$

zu welchen noch wie gewöhnlich die 3 folgenden, auf die Geschwindigkeiten sich beziehenden:

$$v = \frac{dx}{dt},\quad u = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt} \ldots (5)$$

hinzukommen und wohl auch, wie es oben geschehen, mit den vorigen (4) verbunden werden könnten.

Mit Hilfe dieser 6 Gleichungen ist das hier gegebene Problem vollkommen gelöst, indem, wenn die äusseren Kräfte gegeben sind, die Bewegung bestimmt werden kann und umgekehrt, wenn die Bewegung bekannt ist, die äusseren Kräfte gefunden werden können.

Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche, so sind, wie bekannt, die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen der x, y, z bilden, beziehungsweise (Comp. §. 757, Anmerkung):

$$Cos\,\lambda = A\left(\frac{df}{dx}\right),\quad Cos\,\mu = A\left(\frac{df}{dy}\right),\quad Cos\,\nu = A\left(\frac{df}{dz}\right),$$

wenn man nämlich Kürze halber

$$(k)\ldots \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = A \text{ setzt.}$$

Setzt man diese Werthe für $Cos\,\lambda$, $Cos\,\mu$, $Cos\,\nu$ in die obigen Gleichungen (4) und eliminirt dann aus den 3 entstehenden das Product AF, so erhält man die 3 folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} X\left(\frac{df}{dy}\right) - Y\left(\frac{df}{dx}\right) &= m\left[\frac{dv}{dt}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{du}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] \\ X\left(\frac{df}{dz}\right) - Z\left(\frac{df}{dx}\right) &= m\left[\frac{dv}{dt}.\left(\frac{df}{dz}\right) - \frac{dw}{dt}.\left(\frac{df}{dx}\right)\right] \end{aligned}\right\}\ldots(6).$$

Diese Gleichungen enthalten die Kraft F nicht mehr und wenn man denselben noch die gegebene Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ hinzufügt, erhält man 3 Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z, welche sich sonach als Functionen der Zeit t ausdrücken lassen.

7. Ist der bewegliche Punct genöthigt, auf einer gegebenen Curve zu bleiben, so wird man wieder, wie im vorigen Falle, den materiellen Punct als einen freien betrachten können, wenn man zu den gegebenen äusseren Kräften noch eine von unbestimmter Grösse hinzufügt, welche auf der Curve perpendiculär steht, d. h. (weil jetzt die Richtung nicht wie vorhin bestimmt, sondern unbestimmt ist) welche in der auf der Curve im betreffenden Puncte normalen Ebene liegt.

Obschon wir dadurch 2 neue Unbekannte erhalten, nämlich die Grösse dieser Kraft und einen ihrer Winkel (indem aus einem Winkel und der Bedingung, dass die Kraft auf der Curve, d. i. auf der Tangente, deren Richtung bekannt, normal steht, ihre Richtung vollkommen gegeben ist); so entfallen doch wieder andererseits 2 unbekannte Grössen, indem die Coordinaten des beweglichen Punctes fortwährend in einer bestimmten Beziehung zu den beiden gegebenen Gleichungen der Curve stehen und damit verbunden sind.

Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen hat man hier als allgemeine Bewegungs-Gleichungen:

$$X + F\,Cos\,\lambda = m\frac{dv}{dt},\quad Y + F\,Cos\,\mu = m\frac{du}{dt},\quad Z + F\,Cos\,\nu = m\frac{dw}{dt}\ldots(7),$$

und wieder: $$v = \frac{dx}{dt},\quad u = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt}\ldots(8),$$

zu welchen man noch die Bedingungs-Gleichung hinzufügen muss, welche ausdrückt, dass die Kraft F perpendiculär auf der betreffenden Tangente der Curve steht; diese Bedingungs-Gleichung ist bekanntlich:

$$\frac{dx}{ds}Cos\,\lambda + \frac{dy}{ds}Cos\,\mu + \frac{dz}{ds}Cos\,\nu = 0\ldots(9).$$

Mittelst dieser und der beiden Gleichungen der gegebenen Curve ist das Problem der Bewegung wieder vollkommen gelöst.

Eliminirt man auch hier aus diesen Gleichungen die Kraft F und die Cosinus $Cos\,\lambda$, $Cos\,\mu$, $Cos\,v$ (am einfachsten, wenn man die Gleich. (7) beziehungsweise mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und dann addirt, wobei der Factor von F wegen (9) Null und jener von m das nach s genommene Differentiale von $\frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$, d. i. von $\frac{1}{2}V^2$ ist) so erhält man statt der 3 Gleichungen (7) die einzige:

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\,\tfrac{1}{2}mV^2\ldots(10),$$

welche mit den 2 Gleichungen der gegebenen Curve verbunden, sofort 3 Relationen für die Coordinaten x, y, z, und zwar in Functionen der Zeit t liefern, wodurch alle bezüglichen Probleme der Bewegung aufgelöst werden können.

8 Nach der allgemeinen Definition sind Kräfte auf einen Körper oder ein System von Körpern oder materiellen Puncten im Gleichgewichte, wenn sie absolut ohne Einfluss auf die Bewegung desselben sind, mithin ohne dass dadurch die Bewegung im geringsten modificirt wird, diese Kräfte nach Belieben hinzugefügt oder weggelassen werden können.

Da nun für das Gleichgewicht der vorhin betrachteten auf den materiellen Punct m wirksamen Kräfte die ersten Glieder der vorigen Gleich. (3) der Bewegung Null sein oder verschwinden müssen, weil sonst die (durch doppelte Integration erhaltenen) Coordinaten x, y, z nicht dieselben oder ungeändert bleiben könnten, wenn man jene Kräfte (P_1, $P_2\ldots$ in $X=\Sigma(P_1\,Cos\,\alpha_1)$ u. s. w.), welche sich das Gleichgewicht halten sollen, hinzufügen oder wegnehmen wollte. Man kommt also durch diese Betrachtungen aus den Gleichungen der Bewegung genau wieder auf dieselben Bedingungs-Gleichungen für das Gleichgewicht $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, wie in Nr. **14**. der Statik.

Da übrigens diese Bedingungs-Gleichungen, wie die obigen Relationen (1) zeigen, jene $v=const.$, $u=const.$, $w=const.$ mit involviren, so folgt, dass für das Gleichgewicht dieser Kräfte der Punct m eine geradlinige, gleichförmige Bewegung annimmt oder besitzt, was nach dem sogenannten Trägheitsgesetz (15.) auch nicht anders sein kann.

9. Für das Gleichgewicht eines materiellen Punctes, welcher gezwungen ist, fortwährend auf einer gegebenen krummen Fläche zu bleiben, ist es nicht mehr nothwendig, dass die Resultante aus den einwirkenden Kräften Null sei, sondern es genügt, dass dieselbe stets mit der Normale der Fläche in dem betreffenden Puncte zusammenfalle und gegen die Fläche gerichtet sei, indem der Widerstand der Fläche einer normalen Kraft von unbestimmter Grösse gleich gesetzt werden kann, die jedenfalls die genannte Resultirende aufhebt oder mit ihr im Gleichgewichte steht.

Bildet die Normale irgend eines Punctes x, y, z der gegebenen krummen Fläche mit den 3 Coordinatenachsen die Winkel λ, μ, v, so hat man bekanntlich [Nr. **13**., Relat. (2)]:

$$\frac{X}{Cos\,\lambda} = \frac{Y}{Cos\,\mu},\ \frac{X}{Cos\,\lambda} = \frac{Z}{Cos\,\nu} \ldots (11),$$

oder da, wenn $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche ist, sofort:

$$Cos\,\lambda = A\left(\frac{df}{dx}\right),\ Cos\,\mu = A\left(\frac{df}{dy}\right),\ Cos\,\nu = A\left(\frac{df}{dz}\right)$$

ist, wobei A den oben in (k) angegebenen Werth besitzt, auch:

$$X\left(\frac{df}{dy}\right) - Y\left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \text{ und } X\left(\frac{df}{dz}\right) - Z\left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \ldots (12).$$

Uebrigens erhält man diese beiden Bedingungs-Gleichungen auch unmittelbar aus den obigen Gleichungen (6) der Bewegung, wenn man die ersten Theile derselben gleich Null setzt, um nämlich wieder auszudrücken, dass die Kräfte ohne Einfluss auf die Bewegung des materiellen Punctes weggenommen werden können.

10. Sollen in dem in 7. behandelten Falle die Kräfte auf den materiellen Punct im Gleichgewichte sein, so genügt es wieder, dass ihre Resultirende P auf der gegebenen Curve im betreffenden Puncte normal stehe, ihre Grösse und Lage mag übrigens in der bezüglichen Normalebene wie immer sein, indem diese Kraft in allen Fällen von dem Widerstande der Curve aufgehoben wird.

Diese hier ausgesprochene Bedingung wird aber ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{X}{P}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\cdot\frac{dz}{ds} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch jene:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \ldots (13).$$

11. Um jetzt gleich auf die Eingangs erwähnte Centrifugalkraft eines in einer Curve sich bewegenden materiellen Punctes zu kommen, gehen wir auf die Gleichungen (7) und (8) zurück, nehmen aber an, dass nach Verlauf der Zeit t die auf den Punct wirkenden äusseren Kräfte entfernt werden oder zu wirken aufhören, und sonach von diesem Momente an die Bewegung des materiellen Punctes gleichförmig geworden; so hat man wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sofort:

$$F\,Cos\,\lambda = m\frac{d^2x}{dt^2},\ F\,Cos\,\mu = m\frac{d^2y}{dt^2},\ F\,Cos\,\nu = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

oder wegen $dt = \frac{ds}{V}$ auch:

$$F\,Cos\,\lambda = mV^2\frac{d^2x}{ds^2},\ F\,Cos\,\mu = mV^2\frac{d^2y}{ds^2},\ F\,Cos\,\nu = mV^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Werden diese letztern Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Relation von $Cos\,\lambda^2 + Cos\,\mu^2 + Cos\,\nu^2 = 1$, sofort für den normalen Druck auf die krumme Linie:

$$F = mV^2\frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{ds^2}.$$

Ist aber ϱ der Krümmungshalbmesser dieser Curve für irgend einen Punct x, y, z derselben, so ist unter der Voraussetzung, dass ds constant:

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

mithin mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung der Druck oder die Centrifugalkraft:

$$F = \frac{mV^2}{\varrho}.$$

Muss der bewegliche materielle Punct anstatt auf einer Curve, auf einer gegebenen krummen Fläche bleiben, so ist die Centrifugalkraft, wie aus der vorigen Relation erhellt, gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punctes, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Trajectorie. Da aber die Ebene, in welcher der Krümmungskreis liegt, d. h. die Krümmungsebene, beständig oder überall auf der gegebenen Fläche perpendiculär oder normal steht, welche Eigenschaft im Allgemeinen der zwischen 2 Puncten der Oberfläche möglichen kürzesten Linie zukommt, so beschreibt dieser Punct oder das Mobile zugleich diese kürzeste Linie, eine Eigenschaft, welche dem sogenannten Principe der kleinsten Wirkung entspricht.

12. Eliminirt man aus den beiden Fundamental-Gleichungen der geradlinigen Bewegung:

$$P = m\frac{dv}{dt} \text{ und } v = \frac{ds}{dt}$$

die Zeit t, dividirt nämlich die erste durch die zweite Gleichung, so erhält man:

$$\frac{P}{v} = m\frac{dv}{ds},$$

wobei, wie bekannt, da v und s explicite Functionen von t sind, in den Quotienten $\frac{dv}{ds}$ aus den Differential-Quotienten $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}$ diese Grössen v und s nunmehr als implicite Functionen von t erscheinen.

Die vorige Gleichung ist in einer andern Form:

$$P ds = mv dv,$$

und wenn man integrirt:

$$\int_0^s P ds = \tfrac{1}{2}mv^2 \ldots (14),$$

in welcher Gleichung die Zeit t nicht mehr explicit erscheint und überall dort von Wichtigkeit ist, wo sich die Kraft P als Function (anstatt wie gewöhnlich der Zeit) des Weges s ausdrücken lässt. Man nennt das nach s genommene Integrale $\int P ds$ die Arbeit der Kraft P, und da wir mv^2 die lebendige Kraft des materiellen Punctes nennen, so folgt, dass die Arbeit der halben lebendigen Kraft gleich ist.

Ist P constant, so ist $\int P ds = Ps$. Ist P veränderlich, so ist $\int P ds$ die Summe aller Producte, die entstehen, wenn man die einzelnen Werthe der Kraft mit den betreffenden unendlich kleinen Wegen multiplicirt. Ueberall erscheint die Arbeit unabhängig von der Zeit.

Da die sogenannte lebendige Kraft nichts anderes als eine Arbeit, welche nothwendig ist, um in der Masse m die Geschwindigkeit v zu erzeugen, so wäre es zufolge der Relation (14) wohl folgerichtiger und logischer, unter der lebendigen Kraft (Arbeit in Bewegung) nicht mv^2, sondern $\frac{1}{2}mv^2$ zu verstehen.

Diese Relation (14) besitzt eine gewisse Analogie mit jener $\int P dt = \int m dv$ (oben in 4. entwickelt), nach welcher der Impuls einer Kraft auf einen materiellen Punct gleich ist der Grösse der Bewegung, so dass also die Arbeit zur lebendigen Kraft dieselbe Beziehung wie der Impuls zur Grösse der Bewegung hat, oder mit anderen Worten, es misst von den beiden Grössen mv und $\frac{1}{2}mv^2$ die erstere die Wirkung der Kraft in der Zeit und die letztere im Raume.

Sind s_0 und s_1 zwei Wege, vom Momente der Bewegung an gezählt, und dabei $s_1 > s_0$; so ist nach der obigen Relation:

$$\int_0^{s_0} P ds = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{und} \quad \int_0^{s_1} P ds = \tfrac{1}{2} m v_1^2,$$

mithin auch, wenn man subtrahirt:

$$\int_{s_0}^{s_1} P ds = \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 \ldots (15).$$

Würde die lebendige Kraft, anstatt zu wachsen, abnehmen, so würde der 2te, folglich auch der 1ste Theil dieser Gleichung negativ, zum Beweis, dass die Kraft P der ursprünglichen Richtung der Bewegung entgegenwirken und dadurch eine Verzögerung hervorbringen würde.

Die vorige Gleichung (15) zeigt, dass die Arbeit einer Kraft zwischen zwei beliebigen Positionen gleich ist der Veränderung der lebendigen Kraft zwischen denselben beiden Positionen. Ist daher die Geschwindigkeit des Mobilen in zwei verschiedenen Puncten dieselbe, so ist die Aenderung der lebendigen Kraft zwischen diesen beiden Puncten gleich Null. Diess bedingt aber, dass die Kraft P in irgend einem zwischen liegenden Puncte ihr Zeichen geändert habe, weil sonst das Integrale, welches die Arbeit ausdrückt, nicht Null werden könnte. Hieraus folgt ferner, dass die Arbeit der Kraft während der zweiten Periode ihres Weges gleich und entgegengesetzt der Arbeit der ersten Periode ist; dass daher, um irgend eine lebendige Kraft zu zerstören, genau dieselbe Arbeit erforderlich ist, als um dieselbe zu erzeugen.

13. Unter einem Systeme von materiellen Puncten versteht man eine Verbindung derselben in solcher Weise, dass keiner derselben für sich eine Bewegung annehmen kann, ohne dadurch auch die Bewegung der übrigen Puncte mit zu afficiren. Jenachdem diese gegenseitige Abhängigkeit durch sogenannte innere Kräfte bedingt, oder mittelst sogenannter geometrischer Verbindungen (wie durch vollkommen biegsame Fäden, steife Drähte u. s. w.) bewirkt wird, heisst das System ein dynamisches oder geometrisches. In beiden Fällen kann aber das System wenigstens insoweit ein freies sein, als wohl die Puncte untereinander nach gewissen Beziehungen verbunden sind, dabei aber keiner derselben noch ausserdem gezwungen ist, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben.

Offenbar muss im dynamischen Systeme jeder materielle Punct durch irgend eine innere Kraft afficirt werden, welche als Function der Coordinaten der übrigen Puncte erscheint und schon *a priori* gegeben ist, d. h. es muss für jeden Punct wenigstens Eine Gleichung von der Form $F = \varphi(x, y, z, x', y' \ldots)$ bestehen, wo F eine der Kräfte darstellt, welche von den Coordinaten der verschiedenen materiellen Puncte abhängig ist. Ein solches System von n Puncten bedingt daher zum wenigsten n solcher Gleichungen.

Alle dieser Kraft F analoge Kräfte kann man mit Freycinet sehr passend innere Kräfte nennen, zum Unterschiede aller übrigen äusseren auf die Puncte wirkenden Kräfte, welche zu ihrer gegenseitigen Verbindung nichts beitragen.

Es kann bemerkt werden, dass in einem freien (d. i. unabhängig von der Bedingung, dass ein oder mehrere Puncte auf einer krummen Fläche oder Linie zu bleiben gezwungen sind) dynamischen Systeme demselben durch Anbringung von passenden äusseren Kräften jede beliebige Bewegung ertheilt werden kann. Denn es lässt sich jeder Punct als ein freier ansehen, auf welchen äussere und innere Kräfte wirken, die zusammen eine einzige Resultirende haben; verbindet man nun mit dieser Resultirenden eine neue passende äussere Kraft, so kann man eine neue Mittelkraft erhalten, welche sofort im Stande ist, die beabsichtigte Bewegung hervorzubringen.

In der Natur oder Wirklichkeit kommt jedoch dieser ganz allgemeine Fall nicht vor, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht.

Man kann nämlich alle Körper als Aggregate von materiellen Puncten ansehen, auf welche fortwährend zwei Arten von Kräften in Thätigkeit sind, und zwar sind diese entweder äussere (wie z. B. die Schwere), oder innere, und diese letzteren bestehen in den wechselseitigen Wirkungen, welche die materiellen Puncte des Körpers oder Systemes selbst aufeinander ausüben. Empfängt nämlich eines dieser Elemente, dessen Masse wir mit m bezeichnen wollen, eine Kraftäusserung von Seite eines anderen Elementes von der Masse m', und bezeichnen wir diese Kraft durch p, so empfängt ebenso das Element m' von jenem m eine Kraft p' und das Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung besteht nun in Folgendem:

1. Die Richtungen dieser beiden Kräfte liegen in der Geraden, welche die beiden Elemente verbindet.
2. Beide Kräfte haben numerisch die nämliche Intensität, und
3. sie sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt, wirken also beide anziehend oder beide abstossend.

Obschon von den Gesetzen dieser inneren Kräfte nichts weiter bekannt ist als die erwähnte Gleichheit der wechselseitigen Wirkungen, so kann man sich über die Art, wie die Elemente der Körper auf einander wirken, gleichwohl eine ziemlich klare Vorstellung machen, wenn man die von mehreren Gelehrten aufgestellte Hypothese zu Hilfe nimmt. Nach dieser erstreckt sich das Gesetz der allgemeinen Gravitation auch auf die kleinsten Theile der Materie, so dass sich diese um so stärker anziehen, je näher sie sich kommen; ausserdem aber besteht (nach dieser Hypothese) zwischen zwei benachbarten Massentheilchen eine abstossende Kraft, welche von der Wärme oder von ähnlichen Ursachen abhängt und welche sich mit der Entfernung ändert, jedoch nach einem anderen Gesetze als die Gravitation.

Demnach wäre jede von den beiden genannten Kräften p und p' die Differenz oder Resultante zweier Kräfte, nämlich 1. der wechselseitigen Gravitation zwischen den beiden Elementen m und m', dann 2. der wechselseitigen Abstossung in Folge von Ursachen, welche der Wärme analog sind.

Diese Resultante würde anziehend, abstossend oder null sein, je nachdem die Intensität der ersteren Kraft grösser, kleiner, oder gleich der Intensität der letzteren wäre.

Was das geometrische System betrifft, so kann die Verbindung der materiellen Puncte entweder 1. durch biegsame, unausdehnsame Fäden, 2. durch steife Drähte von unveränderlicher Länge und 3. mittelst biegsamer Fäden, an denen die materiellen Puncte (wie in Ringen) hin- und hergleiten können, hergestellt sein; dabei muss aber im letzteren Falle jeder Faden zugleich an zwei materiellen Puncten befestigt sein, weil sonst der hin- und hergleitende Punct in dem Faden keinerlei Widerstand hervorrufen würde.

Auch für dieses System gelten in Beziehung auf die algebraische Darstellung die vorigen Bemerkungen und es muss für ein geometrisches System wenigstens Eine Gleichung von der Form $\delta = \varphi(x, y, z, x, y' \ldots)$ existiren, wobei δ eine constante Grösse und nach Umständen die Länge des Fadens oder Drahtes zwischen den beiden materiellen Puncten bezeichnet; zugleich müssen in dieser Gleichung sämmtliche Puncte des Systemes durch ihre Coordinaten vertreten sein, weil ohne dieses der nicht vertretene Punct auch kein Punct des Systemes sein könnte.

Dynamisches System.

Bilden die materiellen Puncte von den Massen $m, m', m'' \ldots$ ein solches System, so seien P die Resultirende aller auf den Punct m einwirkenden äusseren Kräfte und X, Y, Z die 3 Componenten (oder Projectionen) derselben nach den Achsen des willkürlich gewählten rechtwinkeligen Coordinaten-Systemes; ferner seien ebenso S die Resultante aller inneren auf diesen materiellen Punct m wirkenden Kräfte, so wie K, L, M die Componenten derselben nach denselben Achsen, wobei in S zugleich auch jene Kraft enthalten sein soll, welche den Widerstand der krummen Flächen oder Linien repräsentirt, auf denen dieser Punct etwa zu bleiben genöthigt sein kann.

Offenbar kann man sich aber diesen Punct m als vollkommen frei und vom Systeme losgetrennt vorstellen, sobald man zu der äusseren bewegenden Kraft P die innere Kraft S hinzufügt, denn es verhält sich dann dieser Punct genau so, wie ein vollkommen freier, auf welchen die Kräfte P und S wirken. Mit Rücksicht darauf kann man daher auch auf diesen Punct m die allgemeinen Bewegungs-Gleichungen anwenden und diese sind:

$$X + K = m\frac{dv}{dt}, \quad Y + L = m\frac{du}{dt}, \quad Z + M = m\frac{dw}{dt} \ldots (a),$$