um dv zunimmt, und diese Zunahme durch das Herabgleiten des schweren Punctes über die schiefe Ebene MT während der Zeit dt entstanden ist; so hat man $dv = G dt$ oder wegen (§. 187, Gleich. 3'):
$G = g \, Sin \, \alpha = g \frac{Mn}{Mm} = g \frac{dx}{ds}$ auch $dv = g \frac{dx}{ds} dt$, oder $\frac{ds}{dt} dv = g dx$, d. i. $v dv = g dx$.

Wird diese letztere Gleichung integrirt, so erhält man:
$\frac{1}{2} v^2 = gx$ oder $v^2 = 2gx$, d. i. $v = \sqrt{2gx} \ldots (s)$,
wozu keine Constante kommt, weil (indem die Bewegung von A ausgeht) für $x = 0$ auch $v = 0$ sein soll.

Aus dieser Gleichung folgt (vergl. §. 182, Form 3), dass der über die Curve AMB herabfallende schwere Punct oder Körper in was immer für einen Punct M der Curve dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er durch die entsprechende Höhe AP (als Höhenunterschied zwischen den beiden Puncten A und M) frei gefallen wäre. Ist $AC = h$ und v' die Geschwindigkeit in B, so ist

$$v' = \sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Einfacher gelangt man zu diesem Resultate nach dem in den Nrn. **124**. und **125**. Gesagten. Denn die beschleunigende Kraft nach Mm ist $g \, Sin \, \alpha = g \frac{dx}{ds}$, folglich (**124**., Gleichung 1) $g \frac{dx}{ds} = \frac{dv}{dt}$ oder $\frac{ds}{dt} dv = g dx$, d. i. $v dv = g dx$, woraus wieder $v^2 = 2gx$ folgt.

Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

(§. 191.)

129. Um die Schwingungszeit eines einfachen Pendels im leeren Raume, welches nur kleine Schwingungsbögen beschreibt, zu bestimmen, sei die Länge des Pendels $CA = r$ (Fig. 25), ABA' der dem Halbmesser r entsprechende, in einer verticalen Ebene liegende Kreisbogen, in welchem der schwere Punct A schwingt, C der Aufhängpunct des Pendels als Mittelpunct des Kreisbogens und $BD = a$ der dem Schwingungsbogen ABA' entsprechende Sinusversus. Nimmt man nun an, dass der schwere Punct, welcher seine Bewegung in A beginnt, während der Zeit t bis M gekommen sei und hier die Geschwindigkeit v erlangt habe, so ist [**128**. Gleich. (s)] $v = \sqrt{(2g . DP)}$, oder wenn man die Abscissen auf dem verticalen Durchmesser CB von B aus zählt, und für diesen Punct M die Abscisse $BP = x$ setzt, sofort: $v = \sqrt{[2g(a-x)]}$.

Da aber auch [**120.** Gleich. (α)] $v = \frac{ds}{dt}$ oder $dt = \frac{ds}{v}$ und für den Kreis $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ ist (wozu man $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung des Kreises $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ zu bestimmen hat); so hat man mit Rücksicht darauf, dass wenn t zunimmt, sofort x abnimmt, folglich dt und dx entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen, auch:

$$dt = \frac{-r\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}.\sqrt{[2g(a-x)]}} = \frac{-r}{2\sqrt{rg}}.\frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)}\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2r}\right)}}$$

diese Gleichung von $x = BD = a$ bis $x = 0$ integrirt, gibt die halbe, d. i. die Schwingungszeit für den Bogen AMB und es ist, wenn man die Grenzen der Integration umkehrt, dagegen das Zeichen ändert:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}.\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2r}\right)}},$$

oder wenn man, da sich die Integration nur durch eine unendliche Reihe ausführen lässt, den letzten Bruch in eine Reihe auflöst und

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2r}\right)}} = \left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3 + \ldots$$

setzt, auch:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax - x)^2}}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3 + \ldots\right]$$

durch Ausführung dieser Integration erhält man (Comp. §. 876, 6.):

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\pi\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^3 + \ldots\right]$$

wobei diese unendliche Reihe leicht fortzusetzen ist. Diese nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{2r}$ fortlaufende Reihe convergirt aber um so mehr, je kleiner dieser Bruch, d. h. je kleiner bei einer bestimmten Länge des Pendels der Schwingungsbogen ABA' ist. Beträgt der diesen Bogen messende Winkel ACA' (die Amplitude der Oscillationen) nur einige Grade, so kann man sich für gewöhnlich schon mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen, so dass, wenn man die gesuchte Schwingungsdauer mit T bezeichnet, wegen

$T = 2t$ sofort: $$T = \frac{r\pi}{\sqrt{rg}},$$

oder wenn man l statt r setzt und reducirt auch:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \ldots (m)$$

wird, welche Schwingungsdauer sofort von der Höhe BD oder a unabhängig ist. Behält man dagegen von der unendlichen Reihe auch noch das zweite Glied bei, so wird diese Dauer von der Höhe a abhängig und man erhält:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{a}{8l}\right).$$

Da der Quotient $\frac{a}{l}$ nichts anderes als der Sinusversus des Elongationswinkels $ACB = \alpha$ für den Halbmesser $= 1$, nämlich $\frac{a}{l} = 1 - Cos\,\alpha = 2\,Sin^2 \frac{1}{2}\alpha$ ist, so lässt sich der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der obigen Reihe stehen bleibt, sehr leicht berechnen. (§. 191, Anmerkung.)

Anmerkung. Einfacher noch lässt sich die Schwingungszeit des Kreispendels auf folgende Weise ableiten:

Es sei wieder $BCA = \alpha$ (Fig. 25) der Elongationswinkel des Pendels und für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens vom Halbmesser $CA = CB = a$ der variable Winkel $BCM = \omega$. Hat der der Schwere unterworfene Punct, dessen Masse $= 1$ sein soll, seine Bewegung in A begonnen, ist er in der Zeit t durch den Kreisbogen $AM = s$ herabgegangen und hat er in M die Geschwindigkeit v erlangt; so ist [Nr. **120.**, Relation (α)] $v = \frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\omega}{dt}$ und die beschleunigende Kraft [Nr. **124.**, Relation (1)] $p = \frac{dv}{dt} = \frac{a\,d^2\omega}{dt^2}$.

Stellt man sich aber vor, dass der schwere Punct von M durch das Curvenelement $Mm = ds$ wie über die in M an den Kreisbogen gezogene Tangente als eine schiefe Ebene (deren Winkel mit dem Horizont $= \omega$ ist) herabgleitet; so ist die Beschleunigung [§. 187, (3')] g als Mass dieser Kraft p auch gleich $g\,Sin\,\omega$, folglich wenn man zugleich berücksichtiget, dass ω abnimmt, wenn t zunimmt, also $d\omega$ und dt entgegengesetzte Zeichen haben müssen sofort: $$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{g}{a}\,Sin\,\omega.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2d\omega$ und integrirt dann, so erhält man: $$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\,Cos\,\omega + C$$

und da für $\omega = \alpha$ der Quotient $\frac{d\omega}{dt} = v = o$ ist, so erhält die Constante C den Werth: $-\frac{2g}{a}\,Cos\,\alpha$, und es ist allgemein:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha) \ldots (m),$$

oder: $$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{Cos\,\omega - Cos\,\alpha}.$$

Sind nun, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Winkel ω und α klein, so kann man näherungsweise $Cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}$ und $Cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ setzen (nämlich die höheren Potenzen von ω und α auslassen), wodurch die vorige Gleichung in folgende:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}(\alpha^2 - \omega^2)}$$

übergeht und woraus, mit Rücksicht darauf, dass wie bemerkt, $d\omega$ und dt entgegengesetzte Zeichen haben sollen, sofort:

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}$$

und daraus durch Integration $t = \sqrt{\frac{a}{g}} . arc\,Cos\frac{\omega}{\alpha}$ folgt, wozu keine Constante kommt, weil für $\omega = \alpha$ die Zeit t und auch $arc\,Cos\,1 = 0$ ist.

Für den tiefsten Punct B wird $\omega = 0$ und t geht in die halbe Schwingungszeit $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{g}}.arc\,Cos\,0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ über, so dass wieder, wie oben, $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ wird.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punctes.

(§. 195.)

130. Ist ein materieller Punct, dessen Masse gleich 1 sein soll, bei seiner Bewegung gezwungen, den Kreis AMB vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 26) zu beschreiben, so lässt sich der Druck, welchen derselbe durch diese Bewegung auf die Curve ausübt (gleich der Centrifugalkraft) auf folgende Weise bestimmen.

Zerlegt man die auf den Punct A wirkende beschleunigende Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine nach der Tangente AT, die andere nach der Normale AC des Kreises, so rührt die Bewegung des materiellen Punctes in der Richtung der Projection auf diese Normale lediglich von dieser letztgenannten Seitenkraft her. Sieht man aber diese Seitenkraft während einer unendlich kleinen Zeit dt (wie diess immer erlaubt ist) sowohl in ihrer Grösse als Richtung als constant an und ist während dieser Zeit $AM = ds$ der Weg des beweglichen Punctes und $AP = dx$ der Weg der Projection