**125.** Besitzt der bewegliche Punct statt der Masse 1 jene $m$, so wird, wenn die Bewegung mit der vorigen identisch ist, die entsprechende Kraft $P$ durch $m\frac{dv}{dt}$ gemessen, weil sich in diesem Falle die Kräfte wie die Massen verhalten, also

$$p : P = 1 : m \text{ stattfindet, oder } P = mp \text{ ist.}$$

Man nennt gewöhnlich diese letztere Kraft $P$, welche auf eine beliebige Masse $m$ wirkt und sofort durch $m\frac{dv}{dt}$ oder $m\frac{d^2x}{dt^2}$ gemessen wird, bewegende Kraft, während man die auf die Einheit der Masse wirkende Kraft $p$, welche nämlich durch $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2x}{dt^2}$ gemessen wird, beschleunigende Kraft zu nennen pflegt.

So ist z. B. für einen frei fallenden Körper im luftleeren Raume die beschleunigende Kraft $p = g = \frac{dv}{dt}$ [**123**. Anmerkung 1, und **124**. Gleichung (1)], woraus $dv = g\,dt$ oder $v = gt$ (1) und wegen $v = \frac{dx}{dt}$ auch $dx = gt\,dt$ und daher $x = \frac{1}{2}gt^2$ (2) folgt; welche Formeln (1) und (2) sofort mit jenen in §. 182 übereinstimmen. Zugleich folgt aus der letzten Gleichung (2) $g = \frac{2x}{t^2} \ldots (n)$ so, dass also bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die beschleunigende Kraft auch dem doppelten Weg, dividirt durch das Quadrat der Zeit gleich ist.

Fällt ein Körper von der Masse $M$ frei herab, so ist $Mg = P$ (gleich dem Gewichte des Körpers) die bewegende Kraft.

## Schief aufwärts geworfene Körper.

(§. 184.)

**126.** Wird ein schwerer Punct in der Richtung $AT$ (Fig. 23) mit der Geschwindigkeit $c$ aufwärts geworfen, so bleibt er, durch die Einwirkung der Schwere abwärts getrieben, fortwährend in der durch $AT$ gelegten verticalen Ebene. Nimmt man daher eine in dieser Ebene durch den Punct $A$ horizontale Gerade $AX$ zur Abscissen- und die darauf perpendikuläre der Schwere entgegengesetzte Gerade $AY$ zur Ordinatenachse, so wird die Lage des beweglichen Punctes durch die Coordinaten $x$, $y$ bestimmt.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Bewegung sind (vergleiche das Beispiel in der vorigen Nummer)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

woraus sofort folgt: $\frac{dx}{dt} = C$ und $\frac{dy}{dt} = -gt + C'$.

Um die beiden Constanten $C$ und $C'$ zu bestimmen, setze man den Winkel $TAX = \alpha$, so sind die Seitengeschwindigkeiten von $c$ für $t = 0$ (§. 178) $c' = c\,Cos\,\alpha$ nach $AX$ und $c'' = c\,Sin\,\alpha$ nach $AY$, und da die vorigen Quotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nichts anderes als eben diese Seitengeschwindigkeiten nach einer beliebigen Zeit $t$ sind (**120**. Gleichung $\alpha$), so folgt im Puncte $A$, d. i. für $t = 0$

$$C = c' = c\,Cos\,\alpha \text{ und } C' = c'' = c\,Sin\,\alpha,$$

also ist: $\frac{dx}{dt} = c\,Cos\,\alpha$ und $\frac{dy}{dt} = -gt + c\,Sin\,\alpha \ldots (h)$

oder auch $dx = c\,Cos\,\alpha\,dt$ und $dy = -gt\,dt + c\,Sin\,\alpha\,dt$, und wenn man neuerdings integrirt:

$$x = ct\,Cos\,\alpha \text{ und } y = ct\,Sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots (i),$$

wozu keine Constanten beizufügen oder diese gleich Null sind, weil für $t = 0$ sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ sein muss.

Eliminirt man endlich aus diesen beiden Gleichungen die Grösse $t$, so erhält man als gesuchte Gleichung der Wurflinie oder Trajectorie:

$$y = x\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x^2 \ldots (l),$$

und zwar ist diess die Gleichung einer gemeinen Parabel, bei welcher die Achse mit $AY$ parallel, also vertical ist, die Gerade $AT$ im Anfangspuncte $A$ eine Tangente bildet (wegen $DE = 2DC$), der Parameter den Werth $\frac{2c^2}{g}Cos\,\alpha^2$, und der Scheitel $C$ die Coordinaten: $(w) \ldots AD = x' = \frac{c^2}{2g}Sin\,2\alpha$ und $DC = y' = \frac{c^2}{2g}Sin\,\alpha^2$ besitzt; dabei ist noch $AB = 2x' = \frac{c^2}{g}Sin\,2\alpha$ die Wurfweite, welchen Werth man auch aus der obigen Gleichung (l) als zweite Wurzel von $x$ für $y = 0$ erhält.

Der Abstand der Directrix von der Abscissenachse $AX$ ist $= DC + \frac{1}{4}$ Parameter $= \frac{c^2}{2g}Sin\,\alpha^2 + \frac{c^2}{2g}Cos\,\alpha^2 = \frac{c^2}{2g}$, folglich ist die Gleichung dieser Geraden:

$$y = \frac{c^2}{2g} \ldots (m),$$

und zwar ist diess (§. 183) zugleich die Höhe, welche der schwere

Punct erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit $c$ vertical aufwärts geworfen würde.

**127.** Die Geschwindigkeit des Beweglichen ist am Ende der Zeit $t$ sofort $v = \frac{ds}{dt}$, woraus $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, oder wenn man für $dx$ und $dy$ die durch Differenziation der Gleichungen $(i)$ folgenden Werthe setzt und reducirt, oder die Werthe $dx$, $dy$ aus den Gleich. $(h)$ setzt, auch

$$v^2 = c^2 - 2cgt \, Sin \, \alpha + g^2 t^2 \ldots (k).$$

Für die Zeit, welche der bewegliche Punct braucht, um in seiner Bahn bis zu einem Puncte $M$ zu gelangen, dessen Abscisse $AP = x$ ist, folgt aus der ersten der Gleichungen $(i)$ $t = \frac{x}{c \, Cos \, \alpha}$, folglich ist die Zeit, nach welcher er im Puncte $B$ anlangt, wegen

$$x = AB = \frac{c^2}{g} Sin \, 2\alpha = \frac{2c^2}{g} Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha,$$

sofort: $$t = \frac{2c}{g} Sin \, \alpha;$$

daraus folgt $gt = 2c \, Sin \, \alpha$, und wenn man diese Gleichung mit der vorigen $(k)$ verbindet, auch $v^2 = c^2$, zum Beweis, dass die Geschwindigkeit des Mobilen im Puncte $B$ wieder ebenso gross ist, als sie in dem Puncte $A$ war. Im Scheitel ist die Geschwindigkeit $= c \, Cos \, \alpha$, gleich der horizontalen Geschwindigkeit.

Hat man es, anstatt mit einem beweglichen Punct, mit einem Körper zu thun, so muss man die Gleichungen der Bewegung auf dessen Schwerpunct beziehen.

Anmerkung. Das hier behandelte Problem eines im luftleeren Raume schief aufwärts geworfenen schweren Punctes oder Körpers gibt noch zu einigen anderen interessanten Untersuchungen Anlass, welche wir hier kurz andeuten wollen.

1. Wird der Körper mit derselben Geschwindigkeit $c$ jedoch nach und nach unter verschiedenen Neigungswinkeln $\alpha$ aufwärts geworfen, so entstehen als Wurflinien eben so viele verschiedene Parabeln, welche die nämliche Directrix besitzen (weil ihre Gleichung $(m)$ vom Winkel $\alpha$ unabhängig ist). Die Scheitelpuncte dieser Parabeln werden durch die vorigen Gleichungen $x'$, $y'$ bestimmt, wenn man darin für $\alpha$ nach und nach die entsprechenden Werthe setzt. Eliminirt man daher aus diesen beiden genannten Gleichungen den Winkel $\alpha$, so erhält man den geometrischen Ort (Lehrb. Bd. II. S. 69, Comp. §. 411) aller dieser Scheitelpuncte. Durch diese Elimination entsteht aber die Gleichung:

$$4y'^2 + x'^2 - \frac{2c^2}{g} y' = 0,$$

welche sofort (Comp. §. 486) einer **Ellipse** angehört, deren kleine Achse in die Achse der $y$ (d. i. in $AY$) und unterer Endpunct dieser Achse in den Ursprung $A$ fällt. Die kleine Achse ist $= \frac{c^2}{2g}$ und die grosse ist doppelt so gross, d. i. $= \frac{c^2}{g}$.

2. Um die Curve zu finden, welche die vorhin genannten sämmtlichen Parabeln **einhüllt**, darf man nur aus der obigen Gleichung (1) $U = 0$ und ihrer nach $\alpha$ abgeleiteten oder derivirten $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ den Winkel $\alpha$ eliminiren. Man erhält zuerst aus der nach $\alpha$ differenziirten Gleichung (1), d. i. aus $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$ und damit aus (1) oder $U = 0$ selbst:

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{gx^2}{2c^2} \ldots (n),$$

welches sofort die Gleichung der **einhüllenden Curve** ist. Bezeichnet man die zu $c$ gehörige Geschwindigkeitshöhe durch $h$, so nimmt diese Gleichung wegen $h = \frac{c^2}{2g}$ auch die Form an:

$$x^2 = 4h(h - y)$$

und in dieser Form erkennt man sogleich die Gleichung einer **Parabel**, deren Achse in jene $AY$ und Scheitel nach der positiven Seite von $y$ in den Abstand $h$ vom Ursprung fällt. Der Parameter dieser Parabel hat den Werth $4h$ und die Abscissenachse wird in zwei Puncten geschnitten, wo-für $x = -x = 2h$ ist, woraus noch folgt, dass der Brennpunct dieser Curve mit dem Ursprung $A$ zusammenfällt.

3. Soll der Neigungswinkel $\alpha$ so bestimmt werden, dass der mit der Geschwindigkeit $c$ geworfene Körper durch einen bestimmten Punct $x'$, $y'$ geht, so muss man die Gleichung $y' = x'\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x'^2$ nach $\alpha$ auflösen, wodurch man erhält:

$$tang\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{(c^4 - 2c^2gy' - g^2x'^2)}}{gx'};$$

ist nun $c^4 > 2c^2gy' + g^2x'^2$,
so gibt es **zwei** Werthe von $\alpha$, welche die Bedingung erfüllen;
ist $c^4 = 2c^2gy' + g^2x'^2$, so gibt es für $\alpha$ nur **einen** solchen Werth;
ist endlich $c^4 < 2c^2gy' + g^2x'^2$, so existirt für $\alpha$ gar kein solcher Werth.
Aus der vorletzten dieser Bedingungen folgt:

$$y' = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x'^2,$$

welche Gleichung mit der obigen $(n)$ verglichen, sofort zeigt, dass der gegebene Punct in der alle oben erwähnten Parabeln einhüllenden Curve oder Parabel liegen muss, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Liegt der Punct **innerhalb** dieser Curve, so gibt es **zwei**, liegt er **ausserhalb**, so gibt es **gar keine** Auflösung dieses Problems.

Da für den ersten Fall, in welchem nämlich $c^4 = 2c^2gy' + g^2x'^2$, also nur eine Auflösung stattfindet, sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{g x'}$ wird, so folgt, wenn man diesen Werth in der obigen Gleichung (1) und zugleich auch $x'$, $y'$ statt $x$, $y$ setzt, für die entsprechende Parabel oder Wurflinie dieselbe Gleichung, welche man auch aus der Gleichung ($n$) erhält, wenn man darin $x'$, $y'$ statt $x$, $y$ setzt; diess beweist, was sich auch von selbst versteht, dass der Körper in diesem Falle so geworfen werden müsse, dass er eine Parabel besbreibt, welche die oben gefundene einhüllende Curve in dem betreffenden Puncte $x'$, $y'$ berührt.

4. Endlich mag bei dieser Gelegenheit auch noch bemerkt werden, dass, wenn überhaupt eine constante Kraft auf einen materiellen Punct, welcher bereits durch was immer für eine Kraft eine Geschwindigkeit $c$ nach einer anderen Richtung erlangt hat einwirkt, die Bewegung immer eine krummlinigte ist und nach einer gewissen Zeit einen Bogen $AM$ beschrieben hat, welcher von der Diagonale $AM$ des Parallelogrammes $bc$ verschieden ist, welche die Resultante sein würde, wenn die Geschwindigkeit $c$ ebenfalls eine constante Kraft wäre. Es folgt also hieraus, dass die Bewegung des materiellen Punctes von $A$ nach $M$ keineswegs durch eine Resultirende aus der wirklichen (hier die Schwer-) und der früher dagewesenen Kraft, welche die Geschwindigkeit $c$ hervorgebracht oder hinterlassen hat, stattfindet; denn nur dann kann man mehrere Kräfte in eine einzige Resultirende vereinigen, wenn diese Kräfte gleichzeitig wirken und gleichartig sind.

## Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein in einer krummen Linie herabgehender schwerer Punct oder Körper erlangt.

(§. 189.)

**128.** Ist $AMB$ (Fig. 24) eine in einer verticalen Ebene liegende Curve, über welche ein bloss von der Schwere getriebener materieller Punct herabfällt, und nimmt man $A$ als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinaten-Systemes, in welchem die Verticale $AC$ die Abscissenachse sein soll, setzt für einen beliebigen Punct $M$ der Curve $AP = x$, $PM = y$, Bog. $AM = s$, sowie $Pp = dx$, $mn = dy$, $Mm = ds$ und zieht endlich in diesem Puncte an die Curve die Tangente $MT$, wofür der Neigungswinkel mit der Ordinatenachse durch $\alpha$ bezeichnet werden soll; so hat man, wenn der schwere Punct, indem er von $A$ bis $M$ gekommen, die Geschwindigkeit $v$ erlangt, und dazu die Zeit $t$ gebraucht hat (**120**, Gleichung $\alpha$) sofort $v = \frac{ds}{dt}$.

Da aber diese Geschwindigkeit bei dem weiteren Fallen des Körpers durch den Bogen $Mm = ds$, wozu er die Zeit $dt$ braucht,