Zweiter Abschnitt.

Dynamik.

Von der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

(§. 176.)

120. Beschreibt ein Punct bei irgend einer veränderlichen Bewegung während der Zeit t den Bogen $MN = s$ (Fig. 22), so stellt der Quotient $\frac{s}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit vor, mit welcher dieser Bogen ebenfalls, und zwar gleichförmig zurückgelegt würde; auch bezeichnet derselbe Quotient den Weg in der Zeiteinheit für den Fall, in welchem der Bogen s während der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung beschrieben würde.

Lässt man nun t ohne Ende abnehmen, so nimmt auch s ebenso ab und es nähert sich dabei dieser Quotient einer Grenze, welche nichts anders ist, als die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M, so dass, wenn man diese Geschwindigkeit mit v bezeichnet, sofort $v = \frac{ds}{dt} \ldots (\alpha)$ ist.

Anmerkung 1. Diese Geschwindigkeit ist zugleich diejenige, mit welcher das Bewegliche der Erfahrung zufolge von dem Puncte M aus gleichförmig (und nach der Tangente) fortgehen würde, wenn von diesem Puncte an jede Einwirkung auf das Bewegliche aufhörte. Zugleich folgt aus dieser Relation wegen $ds = v\,dt$ (vergleiche §. 171, Gleich. 1), dass man jede wie immer geartete Bewegung während eines Zeitelementes als eine gleichförmige ansehen kann.

Anmerkung 2. Von der Richtigkeit der Relation (α) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Hat der bewegliche Punct nach Verlauf der Zeit t den Weg s zurückgelegt und dabei die Geschwindigkeit v erlangt, so würde er, wenn von nun an jede Einwirkung auf ihn aufhörte, mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortgehen und also im nächstfolgenden Zeitelement dt den Weg

$ds = v\,dt$ zurücklegen; da jedoch diese Einwirkung nicht aufhört, so wird streng genommen dieser Weg $ds = v\,dt + z \ldots (m)$ sein, wobei z jenen Antheil bezeichnet, welcher durch diese fortwährende Einwirkung der vorhandenen Kraft während der Zeit dt entsteht. Da aber keine wie immer geartete Kraft die Geschwindigkeit des Beweglichen in einer unendlich kleinen Zeit um eine endliche Grösse verändern kann (indem dazu immer auch eine gewisse endliche Zeit erforderlich ist), so ist diese Aenderung von v am Ende der Zeit dt sofort dv, und es ist offenbar $z < dv\,dt$, weil selbst wenn diese Aenderung dv schon am Anfange des Zeitintervalles dt und nicht erst am Ende desselben eingetreten und durch diese Zeit dt constant geblieben wäre, $z = dv\,dt$ sein würde. Da nun aber auf diese Weise z in jedem Falle unendlich klein der 2ten Ordnung ist und daher gegen $v\,dt$ verschwindet, so ist in der That $ds = v\,dt$*).

121. Die in §. 176 aufgestellte Gleichung $v = ct$ bezieht sich auf den Fall, in welchem eine constante Kraft auf den ruhenden Körper einwirkt; nimmt man dagegen den allgemeineren Fall an, in welchem sich der Körper oder materielle Punct bereits mit der Geschwindigkeit k gleichförmig und geradlinig fortbewegt, bevor die constante Kraft auf denselben einwirkt, so ist diese Geschwindigkeit am Ende der Zeit t (diese von dem Augenblicke der Einwirkung der Kraft an gezählt), je nachdem die Kraft in derselben oder entgegengesetzten Richtung der ursprünglichen Bewegung wirkt, beziehungsweise:

$$v = k + ct \ldots (1),$$

oder:

$$v = k - ct \ldots (1'),$$

wobei der letztere Fall, in welchem auch v negativ werden kann (sobald nämlich $ct > k$ wird), in dem ersteren begriffen ist, wenn man dafür c negativ nimmt. Die Bewegung ist nämlich im ersteren Falle gleichförmig beschleunigt, im letzteren gleichförmig verzögert.

122. Um nun aber auch den zurückgelegten Weg oder die Position zu bestimmen, welche ein mit gleichförmig veränderter

---

*) Um den Werth von z genauer kennen zu lernen, hat man wegen $s = f(t)$ sofort $s + ds = f(t + dt)$ oder nach dem Taylor'schen Theorem (Comp. §. 662) $s + ds = s + \frac{ds}{dt}dt + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dt^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ oder mit Rücksicht auf die obige Gleichung $ds = v\,dt$ auch: $ds = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2 + \ldots$ und mit Auslassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung: $ds = v\,dt + \frac{1}{2}dv\,dt$, so dass also, diese Gleichung mit der obigen (m) verglichen, $z = \frac{1}{2}dv\,dt$ gibt.

Bewegung geradlinig fortgehender materieller Punct in einem gewissen Augenblicke besitzt, zähle man seinen Abstand auf der geraden Linie seines Weges von einem bestimmten Puncte A aus und bezeichne diesen am Ende der Zeit t mit x; so ist seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke (Gleich. α in **120.**) $= \frac{dx}{dt}$, folglich nach den beiden Gleichungen (1), (1′) der vorigen Nummer $\frac{dx}{dt} = k \pm ct$ oder $dx = k dt \pm ct dt$, woraus man durch Integration erhält: $x = C + kt \pm \frac{1}{2} ct^2 \ldots (2)$,
dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere für die gleichförmig beschleunigte, das untere für die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gezählt, in welchem sich das Bewegliche im Puncte A befindet, so wird für $t = 0$ auch $x = 0$, folglich die Constante C der Integration ebenfalls Null, und daher:

$$x = kt \pm \tfrac{1}{2} ct^2 \text{ (vergleiche §. 177).}$$

Beginnt die Bewegung von dem festen Puncte A ohne alle Geschwindigkeit, d. i. von der Ruhe aus, so ist in (2) $k = 0$ und da für $t = 0$ auch $x = 0$ sein muss, so ist auch die Constante $C = 0$ und sofort:

$$x = \tfrac{1}{2} ct^2 \ldots (3),$$

welches sofort die Gleichung (2) in §. 176 ist.

Anmerkung. Man nennt hier die Endgeschwindigkeit c nach der ersten Secunde, oder allgemeiner diese Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, die constante Beschleunigung, welche (wie aus den Gleichungen (1), (1′) und (2) zu ersehen) sowohl positiv als negativ sein kann (beschleunigte und verzögerte Bewegung) und die wir in der Regel durch den Buchstaben G bezeichnen werden.

Setzt man ferner, da die Anfangsgeschwindigkeit häufig mit v_0 bezeichnet wird, v_0 statt k, x_0 für die Entfernung des materiellen Punctes im Anfangsaugenblicke (in welchem also seine Geschwindigkeit noch $= v_0$ ist) von einem festen Puncte seines geradlinigen Weges, und sind v und x die analogen Grössen am Ende der Zeit t; so nehmen die obigen Gleichungen (1) und (2) auch die Form an:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + Gt \\ x &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} G t^2 \\ \text{woraus noch folgt:}\quad \frac{dv}{dt} &= G. \end{aligned}\right\} (4)$$