Zweiter Abschnitt.

Dynamik.

Von der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

(§. 176.)

120. Beschreibt ein Punct bei irgend einer veränderlichen Bewegung während der Zeit t den Bogen $MN = s$ (Fig. 22), so stellt der Quotient $\frac{s}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit vor, mit welcher dieser Bogen ebenfalls, und zwar gleichförmig zurückgelegt würde; auch bezeichnet derselbe Quotient den Weg in der Zeiteinheit für den Fall, in welchem der Bogen s während der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung beschrieben würde.

Lässt man nun t ohne Ende abnehmen, so nimmt auch s ebenso ab und es nähert sich dabei dieser Quotient einer Grenze, welche nichts anders ist, als die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M, so dass, wenn man diese Geschwindigkeit mit v bezeichnet, sofort $v = \frac{ds}{dt} \ldots (\alpha)$ ist.

Anmerkung 1. Diese Geschwindigkeit ist zugleich diejenige, mit welcher das Bewegliche der Erfahrung zufolge von dem Puncte M aus gleichförmig (und nach der Tangente) fortgehen würde, wenn von diesem Puncte an jede Einwirkung auf das Bewegliche aufhörte. Zugleich folgt aus dieser Relation wegen $ds = v\,dt$ (vergleiche §. 171, Gleich. 1), dass man jede wie immer geartete Bewegung während eines Zeitelementes als eine gleichförmige ansehen kann.

Anmerkung 2. Von der Richtigkeit der Relation (α) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Hat der bewegliche Punct nach Verlauf der Zeit t den Weg s zurückgelegt und dabei die Geschwindigkeit v erlangt, so würde er, wenn von nun an jede Einwirkung auf ihn aufhörte, mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortgehen und also im nächstfolgenden Zeitelement dt den Weg

$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$ zurücklegen; da jedoch diese Einwirkung nicht aufhört, so wird streng genommen dieser Weg $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t + z \ldots (m)$ sein, wobei z jenen Antheil bezeichnet, welcher durch diese fortwährende Einwirkung der vorhandenen Kraft während der Zeit $\mathrm{d}t$ entsteht. Da aber keine wie immer geartete Kraft die Geschwindigkeit des Beweglichen in einer unendlich kleinen Zeit um eine endliche Grösse verändern kann (indem dazu immer auch eine gewisse endliche Zeit erforderlich ist), so ist diese Aenderung von v am Ende der Zeit $\mathrm{d}t$ sofort $\mathrm{d}v$, und es ist offenbar $z < \mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$, weil selbst wenn diese Aenderung $\mathrm{d}v$ schon am Anfange des Zeitintervalles $\mathrm{d}t$ und nicht erst am Ende desselben eingetreten und durch diese Zeit $\mathrm{d}t$ constant geblieben wäre, $z = \mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$ sein würde. Da nun aber auf diese Weise z in jedem Falle unendlich klein der 2ten Ordnung ist und daher gegen $v\,\mathrm{d}t$ verschwindet, so ist in der That $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$*).

121. Die in §. 176 aufgestellte Gleichung $v = ct$ bezieht sich auf den Fall, in welchem eine constante Kraft auf den ruhenden Körper einwirkt; nimmt man dagegen den allgemeineren Fall an, in welchem sich der Körper oder materielle Punct bereits mit der Geschwindigkeit k gleichförmig und geradlinig fortbewegt, bevor die constante Kraft auf denselben einwirkt, so ist diese Geschwindigkeit am Ende der Zeit t (diese von dem Augenblicke der Einwirkung der Kraft an gezählt), je nachdem die Kraft in derselben oder entgegengesetzten Richtung der ursprünglichen Bewegung wirkt, beziehungsweise:

$$v = k + ct \ldots (1),$$

oder:

$$v = k - ct \ldots (1'),$$

wobei der letztere Fall, in welchem auch v negativ werden kann (sobald nämlich $ct > k$ wird), in dem ersteren begriffen ist, wenn man dafür c negativ nimmt. Die Bewegung ist nämlich im ersteren Falle gleichförmig beschleunigt, im letzteren gleichförmig verzögert.

122. Um nun aber auch den zurückgelegten Weg oder die Position zu bestimmen, welche ein mit gleichförmig veränderter

*) Um den Werth von z genauer kennen zu lernen, hat man wegen $s = f(t)$ sofort $s + \mathrm{d}s = f(t + \mathrm{d}t)$ oder nach dem Taylor'schen Theorem (Comp. §. 662) $s + \mathrm{d}s = s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ oder mit Rücksicht auf die obige Gleichung $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$ auch: $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t^2 + \ldots$ und mit Auslassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung: $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$, so dass also, diese Gleichung mit der obigen (m) verglichen, $z = \frac{1}{2}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$ gibt.

Bewegung geradlinig fortgehender materieller Punct in einem gewissen Augenblicke besitzt, zähle man seinen Abstand auf der geraden Linie seines Weges von einem bestimmten Puncte A aus und bezeichne diesen am Ende der Zeit t mit x; so ist seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke (Gleich. α in **120.**) $= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, folglich nach den beiden Gleichungen (1), (1′) der vorigen Nummer $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k \pm ct$ oder $\mathrm{d}x = k\mathrm{d}t \pm ct\mathrm{d}t$, woraus man durch Integration erhält:
$$x = C + kt \pm \tfrac{1}{2}ct^2 \ldots (2),$$
dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere für die gleichförmig beschleunigte, das untere für die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gezählt, in welchem sich das Bewegliche im Puncte A befindet, so wird für $t = 0$ auch $x = 0$, folglich die Constante C der Integration ebenfalls Null, und daher:
$$x = kt \pm \tfrac{1}{2}ct^2 \text{ (vergleiche §. 177).}$$

Beginnt die Bewegung von dem festen Puncte A ohne alle Geschwindigkeit, d. i. von der Ruhe aus, so ist in (2) $k = 0$ und da für $t = 0$ auch $x = 0$ sein muss, so ist auch die Constante $C = 0$ und sofort:
$$x = \tfrac{1}{2}ct^2 \ldots (3),$$
welches sofort die Gleichung (2) in §. 176 ist.

Anmerkung. Man nennt hier die Endgeschwindigkeit c nach der ersten Secunde, oder allgemeiner diese Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, die constante Beschleunigung, welche (wie aus den Gleichungen (1), (1′) und (2) zu ersehen) sowohl positiv als negativ sein kann (beschleunigte und verzögerte Bewegung) und die wir in der Regel durch den Buchstaben G bezeichnen werden.

Setzt man ferner, da die Anfangsgeschwindigkeit häufig mit v_0 bezeichnet wird, v_0 statt k, x_0 für die Entfernung des materiellen Punctes im Anfangsaugenblicke (in welchem also seine Geschwindigkeit noch $= v_0$ ist) von einem festen Puncte seines geradlinigen Weges, und sind v und x die analogen Grössen am Ende der Zeit t; so nehmen die obigen Gleichungen (1) und (2) auch die Form an:
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + Gt \\ x &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}Gt^2 \\ \text{woraus noch folgt: } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= G. \end{aligned}\right\} (4)$$

Mass der constanten Kräfte.

(§. 173.)

123. Wirkt die constante Kraft P auf einen Körper von der Masse M, so kommt auf die Einheit der Masse die wirkende Kraft $\frac{P}{M}$. Ist ebenso P' eine in die Masse M' wirkende constante Kraft, so entfällt davon auf die Einheit der Masse die Kraft $\frac{P'}{M'}$. Da sich nun diese beiden Körper oder Massen genau so, wie jeder ihrer einzelnen Theile bewegen, und die Geschwindigkeiten, welche gleiche Massen am Ende einer bestimmten Zeit erlangen, den Kräften proportional sind, welche sie erzeugen; so hat man, wenn diese Geschwindigkeiten mit v und v' bezeichnet werden, sofort:

$$v:v' = \frac{P}{M}:\frac{P'}{M'} \text{ oder } P:P' = Mv:M'v',$$

d. h. zwei constante Kräfte verhalten sich wie die Grössen der Bewegungen oder Bewegungsmomente, welche sie in einerlei Zeit hervorbringen. Nimmt man P' zur Einheit der constanten Kräfte, M' als Einheit der Massen und v' zur Einheit der Geschwindigkeit; so ist auch $P:1 = Mv:1$ oder $P = Mv \ldots (\beta)$ (was auch aus $\frac{P}{P'} = \frac{M}{M'} \cdot \frac{v}{v'}$ folgt), d. h. jede constante Kraft wird gemessen durch die Grösse der Bewegung oder durch das Bewegungsmoment, welches sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Anmerkung 1. Setzt man gleiche Massen oder die Masse $= 1$ voraus, so kann die Kraft P auch bloss durch die Endgeschwindigkeit v gemessen werden, welche in der Masse während der Zeiteinheit erzeugt wird.

Anmerkung 2. Wie aus der Vergleichung mit §. 173 hervorgeht, so wird eine constante Kraft durch dieselbe Grösse wie eine sogenannte momentan wirkende Kraft gemessen. Es muss übrigens hier bemerkt werden, dass momentan wirkende oder sogenannte Stoss-Kräfte mehr in der Idee als in der Wirklichkeit bestehen, weil keine auch noch so grosse Kraft in einem untheilbaren Augenblicke oder einer unendlich kleinen Zeit eine endliche Geschwindigkeit zu erzeugen im Stande ist; aus diesem Grunde werden auch in der neueren Zeit von den meisten Gelehrten mit Recht (da in der Natur alle Wirkungen stetig sind) keine Momentankräfte mehr zugelassen, sondern nur beschleunigende Kräfte vorausgesetzt.

Da wir unter Kraft (als nothwendige, aber auch hinreichende Ursache zur Abänderung der Geschwindigkeit eines materiellen Punctes der Grösse oder Richtung nach) immer etwas dem Drucke Analoges verstehen, den wir auf einen Körper ausüben, um seine Bewegung zu veranlassen oder zu modificiren; so hat diese, wenn sie auf einen Körper einwirkt, nothwendiger Weise eine gewisse Dauer, während welcher sie jedoch ihre Intensität auch ändern kann.

Belanger nennt, wenn eine Kraft F von constanter Intensität während einer gewissen Zeit t wirkt, das Product Ft aus der Intensität der Kraft in ihre Wirkungsdauer die Impulsion dieser Kraft F in der Zeit t. Hat die Kraft eine veränderliche Intensität, so ist ihre Impulsion während eines bestimmten Zeitraumes das Integral $\int F dt$ des Productes aus der Kraft in das Differenzial der Zeit, zwischen den Grenzen jenes Zeitraumes genommen.

Diese Grösse ist übrigens unabhängig von der Geschwindigkeit des Angriffspunctes der Kraft.

Um den Nutzen von der Einführung dieser Grösse, welche man kurz den Impuls der Kraft F nennen kann, zu zeigen, so wirke eine constante Kraft F in eine dem Gewichte nach ausgedrückte Masse M; dann ist (§. 186) die constante Beschleunigung $G = \frac{F}{M} g$, wobei $g = 31$ Fuss die Beschleunigung der Schwere ist. Wird dieser Werth in der ersten der Gleichungen (4) in Nr. 122. Anmerk. substituirt, so erhält man:

$$v = v_0 + \frac{F}{M} g t, \text{ woraus } \frac{M}{g} v - \frac{M}{g} v_0 = Ft \text{ folgt.}$$

Da nun nach der neueren Art die Massen auszudrücken (§. 35 und die darauf folgende Anmerk.) der Quotient $\frac{M}{g} = m$ nichts anderes als die träge Masse (vom Gewichte dabei abstrahirt) bezeichnet, so kann man sagen, dass wenn sich ein materieller Punct von der Masse m durch die Einwirkung einer constanten Kraft geradlinig fortbewegt und man berechnet für zwei beliebige Augenblicke das Product aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit (d. i. die Grösse der Bewegung), so hat die Grösse, um welche sich dieses Product während dieser Zeit ändert, erstlich dasselbe Zeichen wie die Kraft und dann denselben numerischen Werth wie das Product aus der Kraft in die zwischen diesen beiden Augenblicken liegende Zeit, d. i. wie der vorhin sogenannte Impuls oder die Einwirkung der Kraft.

Hat z. B. eine 2pfündige Kanonenkugel durch die Einwirkung einer constanten Kraft während einer unbestimmten (allenfalls ausserordentlich kleinen) Zeit eine Geschwindigkeit von 1200 Fuss erlangt, so hat man nach der vorigen Gleichung, wegen $v_0 = 0$ (indem die Kraft F auf die ruhende Kugel wirken soll), $v = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ sofort $Ft = 77 \cdot 42$.

Je nachdem also die Wirkung oder der Impuls der Kraft 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ oder nur $\frac{1}{1000}$ Secunde gedauert hat, musste die Intensität derselben

77·42, 774·2, 7742 oder 77420 Pfund gewesen sein u. s. w.

Trifft diese Kugel mit der erlangten Geschwindigkeit auf einen anderen Körper, welcher diese Geschwindigkeit vernichtet, indem er ihr eine constante Kraft entgegensetzt, so gibt dieselbe Gleichung die Widerstands-

Wirkung, wenn man $v = 0$, $v_0 = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ setzt, und zwar erhält man $Ft = -77{\cdot}42$. Dieses Product ist negativ, weil die Richtung der Kraft im entgegengesetzten Sinne der zu vernichtenden Geschwindigkeit v_0 ist.

Anmerkung 3. Es ist hier der Ort, um noch einmal auf den Begriff der Masse eines Körpers und die Art, diese in Rechnung zu bringen, oder in den Calcül einzuführen, zurückzukommen; wir bemerken daher hierüber Folgendes:

Zwei Körper oder materielle Puncte haben einerlei oder gleiche Massen, wenn sie durch die Einwirkung von zwei ganz gleichen constanten Kräften eine vollkommen gleiche Bewegung annehmen, d. h. nach einer gewissen Zeit, nach einerlei Richtung die nämliche Geschwindigkeit erhalten. Erfordern sie aber zur Erlangung derselben Geschwindigkeit und zwar in einerlei Zeit constante Kräfte von verschiedener Grösse, so sind die Massen diesen Kräften proportional, ein Satz, dessen Richtigkeit sich sogleich ergibt, wenn man bedenkt, dass ein aus n Masseneinheiten bestehender Körper durch die Einwirkung einer $n$fachen Kraft genau ebenso bewegt wird, wie die Masseneinheit durch die gleiche Einwirkung der einfachen Kraft, indem sich die $n$fache Kraft auf die $n$fache Masse so vertheilt, dass auf die Masse $= 1$ auch die Kraft $= 1$ entfällt und es offenbar ganz dasselbe ist, ob die n Masseneinheiten als von einander getrennt, oder als eine einzige Masse vereint angenommen werden.

Kann nun irgend eine constante Kraft in einer beliebigen Masse in der Zeiteinheit eine gewisse Geschwindigkeit, also eine bestimmte Beschleunigung erzeugen; so ist die Beschleunigung, welche dieselbe Kraft in einer n Mal grösseren Masse (natürlich wieder in der Zeiteinheit) hervorbringt, n Mal kleiner, und zwar nicht, wie man sich öfter ausdrückt, weil die grössere Masse einen grösseren Widerstand entgegensetzt, sondern weil jetzt auf eine der ersteren ganz gleiche Masse nur der n^{te} Theil der Kraft entfällt, deren Wirkung daher auch n Mal kleiner sein muss.

Hieraus folgt aber auch wieder umgekehrt, dass die Wirkung einer constanten Kraft nicht bloss aus der Geschwindigkeit, die sie in einem Körper von gegebener Masse in einer gewissen Zeit hervorbringen kann, sondern nach dem Producte dieser Geschwindigkeit in die betreffende Masse des Körpers, nämlich wie bereits oben angeführt, nach der Grösse der Bewegung (oder dem Bewegungsmoment) beurtheilt werden darf.

Um nun die Massen (oder Stoffmengen, wovon wir jedoch nur eine unklare Vorstellung haben) als Rechnungsgrössen behandeln zu können, muss man irgend eine Masse zur Einheit annehmen und bei jeder anderen Masse angeben, wie oft diese Masseneinheit in dieser letzteren enthalten ist. Eine $n$fache Masse ist dann jene, welche sich in n gleiche Theile, wovon jeder der Masseneinheit gleich ist, zerlegen lässt. Anstatt jedoch diese nur selten ausführbare Zerlegung vorzunehmen, kann man einfacher die Kraft suchen, welche in dieser Masse dieselbe Beschleunigung, wie etwa die Krafteinheit in der Masseneinheit hervorbringt; die Vergleichung der numerischen Werthe dieser beiden Kräfte gibt auch das directe Verhältniss zwischen diesen beiden Massen; auf diese Weise wird also die Vergleichung der Massen auf jene der Kräfte zurückgeführt.

Man ist jetzt so ziemlich allgemein darin überein gekommen, als Einheit jene Masse zu nehmen, welche bei der Einwirkung der Krafteinheit während der Zeiteinheit die durch die Längeneinheit dargestellte Geschwindigkeit erlangt. Bei unserem Mass- und Gewicht-System wird man also jene Masse zur Einheit wählen, welche durch das Einwirken einer constanten Kraft von 1 Pfund nach unveränderlicher Richtung, während 1 Secunde die Geschwindigkeit von 1 Fuss erlangt, eine Masse, die natürlich nur durch Versuche gefunden werden kann.

Betrachtet man die Schwere innerhalb der für unsere Rechnungen zulässigen Grenzen als eine constante, d. i. eine unveränderliche Intensität besitzende Kraft, so folgt, da die Versuche für alle uns bekannten Körper die nämliche Beschleunigung nachweisen, dass die Gewichte der Körper (als die einwirkenden Kräfte) den Massen derselben also auch umgekehrt die Massen den Gewichten der Körper proportional sind.

Ist nun g die Beschleunigung frei fallender Körper im leeren Raume (auch Action der Schwerkraft genannt), P das Gewicht und M die Masse eines Körpers, so ist nach dem obigen Satze über das Mass constanter Kräfte [Gleichung (β)]:

$$P = Mg.$$

Hieraus folgt aber, dass für $M = 1$ sofort $P = g$ ist, mithin jene Masse zur Einheit genommen wird, deren Gewicht $= g$ (für Wien also $= 31{\cdot}03$ Pfund, für Paris $= 9{\cdot}8088$ Kilogramm u. s. w.) ist. Und in der That, lässt man in der Breite von Wien einen Körper von 31 Wr. Pfund im Gewichte im luftleeren Raume frei fallen, so erlangt derselbe am Ende der 1sten Secunde (wie den Versuchen zufolge jeder andere Körper auch) eine Geschwindigkeit von 31 Wr. Fuss. Da nun aber dabei die constante oder bewegende Kraft 31 Pfund beträgt, so wird eine 31 Mal kleinere Kraft, d. i. jene von 1 Pfund, in derselben Masse (da sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen verhalten) auch eine 31 Mal kleinere Geschwindigkeit, d. i. jene von 1 Fuss während dieser Zeit von 1 Secunde hervorbringen; Alles der vorigen Definition gemäss.

Ausdruck für die veränderliche Kraft bei irgend einer geradlinigen Bewegung.

(§. 174.)

124. Wie aus der vorigen Nummer folgt, so kann eine constante Kraft durch die Grösse der Bewegung gemessen werden, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt, wenn man dabei jene Kraft zur Einheit nimmt, welche in der Masseneinheit während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit gleich Eins erzeugt. Um nun auch das Mass einer variablen Kraft auf diesen Fall zurückzuführen, kommt es darauf an, die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche sie in der Masse gleich Eins in der Zeiteinheit erzeugen würde, wenn sie jene Intensität constant beibehielte, welche sie in dem Augenblicke, den man eben betrachtet, besitzt.

Es sei nun bei irgend einer geradlinigen Bewegung eines mit der Masse gleich Eins behafteten Punctes, am Ende der von irgend einer Periode aus gezählten Zeit t der Abstand dieses Punctes vom Ursprung $= x$, die Geschwindigkeit $= v$ und die Intensität der variablen Kraft in diesem Augenblicke $= p$. Wäre p constant, so würde der Quotient $\frac{v}{t}$ die von p in der Zeiteinheit erzeugte Geschwindigkeit, folglich auch (**123**. Anmerkung 1) das Mass der Kraft p sein. Im gegenwärtigen Falle nimmt jedoch die Kraft p während der Zeit $\varDelta t$ um $\varDelta p$ und die Geschwindigkeit um $\varDelta v$ zu (oder ab, was hier ganz gleichgiltig ist) und diese Zunahme der Geschwindigkeit kann so angesehen werden, als wäre sie durch eine zwischen p und $p + \varDelta p$ liegende Kraft hervorgebracht worden, welche während der Zeit $\varDelta t$ mit constanter Stärke gewirkt hat. Bezeichnet man diese Kraft durch p', so ist sofort $p' = \frac{\varDelta v}{\varDelta t}$ und zwar für jeden auch noch so kleinen Werth der Zeit $\varDelta t$.

Da sich aber p' ohne Ende der Intensität der Kraft p, welche sie am Ende der Zeit t besitzt, nähert, wenn $\varDelta t$ ohne Ende abnimmt, indem sich dabei auch ebenso $\varDelta p$ der Nulle nähert, so hat man, auf die Grenzen übergehend:

$$p = \frac{dv}{dt} \cdots (1),$$

dabei hat p dasselbe Zeichen wie dv, so dass man diese Kraft als positiv oder negativ ansieht, je nachdem dieselbe die Geschwindigkeit v zu vermehren oder zu vermindern strebt; da ferner diese Geschwindigkeit (Gleich. α, Nr. **120**.) $v = \frac{dx}{dt}$ zu- oder abnimmt, je nachdem die Bewegung im positiven oder negativen Sinne von x stattfindet, so ist auch die Kraft p positiv oder negativ, je nachdem sie im ersteren oder letzteren Sinne, d. i. beschleunigend oder verzögernd wirkt.

Setzt man in der obigen Gleichung (1) für v den vorigen Werth, so erhält man auch:

$$p = \frac{d^2x}{dt^2} \cdots (2).$$

125. Besitzt der bewegliche Punct statt der Masse 1 jene m, so wird, wenn die Bewegung mit der vorigen identisch ist, die entsprechende Kraft P durch $m\frac{dv}{dt}$ gemessen, weil sich in diesem Falle die Kräfte wie die Massen verhalten, also

$$p : P = 1 : m \text{ stattfindet, oder } P = mp \text{ ist.}$$

Man nennt gewöhnlich diese letztere Kraft P, welche auf eine beliebige Masse m wirkt und sofort durch $m\frac{dv}{dt}$ oder $m\frac{d^2x}{dt^2}$ gemessen wird, bewegende Kraft, während man die auf die Einheit der Masse wirkende Kraft p, welche nämlich durch $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2x}{dt^2}$ gemessen wird, beschleunigende Kraft zu nennen pflegt.

So ist z. B. für einen frei fallenden Körper im luftleeren Raume die beschleunigende Kraft $p = g = \frac{dv}{dt}$ [**123**. Anmerkung 1, und **124**. Gleichung (1)], woraus $dv = g\,dt$ oder $v = gt$ (1) und wegen $v = \frac{dx}{dt}$ auch $dx = gt\,dt$ und daher $x = \frac{1}{2}gt^2$ (2) folgt; welche Formeln (1) und (2) sofort mit jenen in §. 182 übereinstimmen. Zugleich folgt aus der letzten Gleichung (2) $g = \frac{2x}{t^2} \ldots (n)$ so, dass also bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die beschleunigende Kraft auch dem doppelten Weg, dividirt durch das Quadrat der Zeit gleich ist.

Fällt ein Körper von der Masse M frei herab, so ist $Mg = P$ (gleich dem Gewichte des Körpers) die bewegende Kraft.

Schief aufwärts geworfene Körper.

(§. 184.)

126. Wird ein schwerer Punct in der Richtung AT (Fig. 23) mit der Geschwindigkeit c aufwärts geworfen, so bleibt er, durch die Einwirkung der Schwere abwärts getrieben, fortwährend in der durch AT gelegten verticalen Ebene. Nimmt man daher eine in dieser Ebene durch den Punct A horizontale Gerade AX zur Abscissen- und die darauf perpendikuläre der Schwere entgegengesetzte Gerade AY zur Ordinatenachse, so wird die Lage des beweglichen Punctes durch die Coordinaten x, y bestimmt.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Bewegung sind (vergleiche das Beispiel in der vorigen Nummer)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

woraus sofort folgt: $\frac{dx}{dt} = C$ und $\frac{dy}{dt} = -gt + C'$.

Um die beiden Constanten C und C' zu bestimmen, setze man den Winkel $TAX = \alpha$, so sind die Seitengeschwindigkeiten von c für $t = 0$ (§. 178) $c' = c\,Cos\,\alpha$ nach AX und $c'' = c\,Sin\,\alpha$ nach AY, und da die vorigen Quotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nichts anderes als eben diese Seitengeschwindigkeiten nach einer beliebigen Zeit t sind (**120**. Gleichung α), so folgt im Puncte A, d. i. für $t = 0$

$$C = c' = c\,Cos\,\alpha \text{ und } C' = c'' = c\,Sin\,\alpha,$$

also ist: $\frac{dx}{dt} = c\,Cos\,\alpha$ und $\frac{dy}{dt} = -gt + c\,Sin\,\alpha \ldots (h)$

oder auch $dx = c\,Cos\,\alpha\,dt$ und $dy = -gt\,dt + c\,Sin\,\alpha\,dt$, und wenn man neuerdings integrirt:

$$x = ct\,Cos\,\alpha \text{ und } y = ct\,Sin\,\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots (i),$$

wozu keine Constanten beizufügen oder diese gleich Null sind, weil für $t = 0$ sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ sein muss.

Eliminirt man endlich aus diesen beiden Gleichungen die Grösse t, so erhält man als gesuchte Gleichung der Wurflinie oder Trajectorie:

$$y = x\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x^2 \ldots (l),$$

und zwar ist diess die Gleichung einer gemeinen Parabel, bei welcher die Achse mit AY parallel, also vertical ist, die Gerade AT im Anfangspuncte A eine Tangente bildet (wegen $DE = 2DC$), der Parameter den Werth $\frac{2c^2}{g}Cos\,\alpha^2$, und der Scheitel C die Coordinaten: $(w) \ldots AD = x' = \frac{c^2}{2g}Sin\,2\alpha$ und $DC = y' = \frac{c^2}{2g}Sin\,\alpha^2$ besitzt; dabei ist noch $AB = 2x' = \frac{c^2}{g}Sin\,2\alpha$ die Wurfweite, welchen Werth man auch aus der obigen Gleichung (l) als zweite Wurzel von x für $y = 0$ erhält.

Der Abstand der Directrix von der Abscissenachse AX ist $= DC + \frac{1}{4}$ Parameter $= \frac{c^2}{2g}Sin\,\alpha^2 + \frac{c^2}{2g}Cos\,\alpha^2 = \frac{c^2}{2g}$, folglich ist die Gleichung dieser Geraden:

$$y = \frac{c^2}{2g} \ldots (m),$$

und zwar ist diess (§. 183) zugleich die Höhe, welche der schwere

Punct erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit c vertical aufwärts geworfen würde.

127. Die Geschwindigkeit des Beweglichen ist am Ende der Zeit t sofort $v = \frac{ds}{dt}$, woraus $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, oder wenn man für dx und dy die durch Differenziation der Gleichungen (i) folgenden Werthe setzt und reducirt, oder die Werthe dx, dy aus den Gleich. (h) setzt, auch

$$v^2 = c^2 - 2cgt\,Sin\,\alpha + g^2t^2 \ldots (k).$$

Für die Zeit, welche der bewegliche Punct braucht, um in seiner Bahn bis zu einem Puncte M zu gelangen, dessen Abscisse $AP = x$ ist, folgt aus der ersten der Gleichungen (i) $t = \frac{x}{c\,Cos\,\alpha}$, folglich ist die Zeit, nach welcher er im Puncte B anlangt, wegen

$$x = AB = \frac{c^2}{g}\,Sin\,2\,\alpha = \frac{2c^2}{g}\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha,$$

sofort: $$t = \frac{2c}{g}\,Sin\,\alpha;$$

daraus folgt $gt = 2c\,Sin\,\alpha$, und wenn man diese Gleichung mit der vorigen (k) verbindet, auch $v^2 = c^2$, zum Beweis, dass die Geschwindigkeit des Mobilen im Puncte B wieder ebenso gross ist, als sie in dem Puncte A war. Im Scheitel ist die Geschwindigkeit $= c\,Cos\,\alpha$, gleich der horizontalen Geschwindigkeit.

Hat man es, anstatt mit einem beweglichen Punct, mit einem Körper zu thun, so muss man die Gleichungen der Bewegung auf dessen Schwerpunct beziehen.

Anmerkung. Das hier behandelte Problem eines im luftleeren Raume schief aufwärts geworfenen schweren Punctes oder Körpers gibt noch zu einigen anderen interessanten Untersuchungen Anlass, welche wir hier kurz andeuten wollen.

1. Wird der Körper mit derselben Geschwindigkeit c jedoch nach und nach unter verschiedenen Neigungswinkeln α aufwärts geworfen, so entstehen als Wurflinien eben so viele verschiedene Parabeln, welche die nämliche Directrix besitzen (weil ihre Gleichung (m) vom Winkel α unabhängig ist). Die Scheitelpuncte dieser Parabeln werden durch die vorigen Gleichungen x', y' bestimmt, wenn man darin für α nach und nach die entsprechenden Werthe setzt. Eliminirt man daher aus diesen beiden genannten Gleichungen den Winkel α, so erhält man den geometrischen Ort (Lehrb. Bd. II. S. 69, Comp. §. 411) aller dieser Scheitelpuncte. Durch diese Elimination entsteht aber die Gleichung:

$$4y'^2 + x'^2 - \frac{2c^2}{g}y' = 0,$$

welche sofort (Comp. §. 486) einer **Ellipse** angehört, deren kleine Achse in die Achse der y (d. i. in AY) und unterer Endpunct dieser Achse in den Ursprung A fällt. Die kleine Achse ist $= \frac{c^2}{2g}$ und die grosse ist doppelt so gross, d. i. $= \frac{c^2}{g}$.

2. Um die Curve zu finden, welche die vorhin genannten sämmtlichen Parabeln **einhüllt**, darf man nur aus der obigen Gleichung (1) $U = 0$ und ihrer nach α abgeleiteten oder derivirten $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ den Winkel α eliminiren. Man erhält zuerst aus der nach α differenziirten Gleichung (1), d. i. aus $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$ und damit aus (1) oder $U = 0$ selbst:

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{gx^2}{2c^2} \ldots (n),$$

welches sofort die Gleichung der **einhüllenden Curve** ist. Bezeichnet man die zu c gehörige Geschwindigkeitshöhe durch h, so nimmt diese Gleichung wegen $h = \frac{c^2}{2g}$ auch die Form an:

$$x^2 = 4h(h - y)$$

und in dieser Form erkennt man sogleich die Gleichung einer **Parabel**, deren Achse in jene AY und Scheitel nach der positiven Seite von y in den Abstand h vom Ursprung fällt. Der Parameter dieser Parabel hat den Werth $4h$ und die Abscissenachse wird in zwei Puncten geschnitten, wofür $x = -x = 2h$ ist, woraus noch folgt, dass der Brennpunct dieser Curve mit dem Ursprung A zusammenfällt.

3. Soll der Neigungswinkel α so bestimmt werden, dass der mit der Geschwindigkeit c geworfene Körper durch einen bestimmten Punct x', y' geht, so muss man die Gleichung $y' = x'\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x'^2$ nach α auflösen, wodurch man erhält:

$$tang\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{(c^4 - 2c^2gy' - g^2x'^2)}}{gx'};$$

ist nun

$$c^4 > 2c^2gy' + g^2x'^2,$$

so gibt es **zwei** Werthe von α, welche die Bedingung erfüllen; ist $c^4 = 2c^2gy' + g^2x'^2$, so gibt es für α nur **einen** solchen Werth; ist endlich $c^4 < 2c^2gy' + g^2x'^2$, so existirt für α gar kein solcher Werth. Aus der vorletzten dieser Bedingungen folgt:

$$y' = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x'^2,$$

welche Gleichung mit der obigen (n) verglichen, sofort zeigt, dass der gegebene Punct in der alle oben erwähnten Parabeln einhüllenden Curve oder Parabel liegen muss, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Liegt der Punct **innerhalb** dieser Curve, so gibt es **zwei**, liegt er **ausserhalb**, so gibt es **gar keine** Auflösung dieses Problems.

Da für den ersten Fall, in welchem nämlich $c^4 = 2c^2gy' + g^2x'^2$, also nur eine Auflösung stattfindet, sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{gx'}$ wird, so folgt, wenn man diesen Werth in der obigen Gleichung (1) und zugleich auch x', y' statt x, y setzt, für die entsprechende Parabel oder Wurflinie dieselbe Gleichung, welche man auch aus der Gleichung (n) erhält, wenn man darin x', y' statt x, y setzt; diess beweist, was sich auch von selbst versteht, dass der Körper in diesem Falle so geworfen werden müsse, dass er eine Parabel besbreibt, welche die oben gefundene einhüllende Curve in dem betreffenden Puncte x', y' berührt.

4. Endlich mag bei dieser Gelegenheit auch noch bemerkt werden, dass, wenn überhaupt eine constante Kraft auf einen materiellen Punct, welcher bereits durch was immer für eine Kraft eine Geschwindigkeit c nach einer anderen Richtung erlangt hat einwirkt, die Bewegung immer eine krummlinigte ist und nach einer gewissen Zeit einen Bogen AM beschrieben hat, welcher von der Diagonale AM des Parallelogrammes bc verschieden ist, welche die Resultante sein würde, wenn die Geschwindigkeit c ebenfalls eine constante Kraft wäre. Es folgt also hieraus, dass die Bewegung des materiellen Punctes von A nach M keineswegs durch eine Resultirende aus der wirklichen (hier die Schwer-) und der früher dagewesenen Kraft, welche die Geschwindigkeit c hervorgebracht oder hinterlassen hat, stattfindet; denn nur dann kann man mehrere Kräfte in eine einzige Resultirende vereinigen, wenn diese Kräfte gleichzeitig wirken und gleichartig sind.

Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein in einer krummen Linie herabgehender schwerer Punct oder Körper erlangt.

(§. 189.)

128. Ist AMB (Fig. 24) eine in einer verticalen Ebene liegende Curve, über welche ein bloss von der Schwere getriebener materieller Punct herabfällt, und nimmt man A als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinaten-Systemes, in welchem die Verticale AC die Abscissenachse sein soll, setzt für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$, Bog. $AM = s$, sowie $Pp = \mathrm{d}x$, $mn = \mathrm{d}y$, $Mm = \mathrm{d}s$ und zieht endlich in diesem Puncte an die Curve die Tangente MT, wofür der Neigungswinkel mit der Ordinatenachse durch α bezeichnet werden soll; so hat man, wenn der schwere Punct, indem er von A bis M gekommen, die Geschwindigkeit v erlangt, und dazu die Zeit t gebraucht hat (**120**, Gleichung α) sofort $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

Da aber diese Geschwindigkeit bei dem weiteren Fallen des Körpers durch den Bogen $Mm = \mathrm{d}s$, wozu er die Zeit $\mathrm{d}t$ braucht, um dv zunimmt, und diese Zunahme durch das Herabgleiten des schweren Punctes über die schiefe Ebene MT während der Zeit dt entstanden ist; so hat man $\mathrm{d}v = G\mathrm{d}t$ oder wegen (§. 187, Gleich. 3′): $G = g\,Sin\,\alpha = g\frac{Mn}{Mm} = g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ auch $\mathrm{d}v = g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}t$, oder $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}x$, d. i. $v\,\mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}x$.

Wird diese letztere Gleichung integrirt, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gx \text{ oder } v^2 = 2gx, \text{ d. i. } v = \sqrt{2gx}\ldots(s),$$

wozu keine Constante kommt, weil (indem die Bewegung von A ausgeht) für $x = 0$ auch $v = 0$ sein soll.

Aus dieser Gleichung folgt (vergl. §. 182, Form 3), dass der über die Curve AMB herabfallende schwere Punct oder Körper in was immer für einen Punct M der Curve dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er durch die entsprechende Höhe AP (als Höhenunterschied zwischen den beiden Puncten A und M) frei gefallen wäre. Ist $AC = h$ und v' die Geschwindigkeit in B, so ist

$$v' = \sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Einfacher gelangt man zu diesem Resultate nach dem in den Nrn. **124.** und **125.** Gesagten. Denn die beschleunigende Kraft nach Mm ist $g\,Sin\,\alpha = g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, folglich (**124.**, Gleichung 1) $g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ oder $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}x$, d. i. $v\,\mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}x$, woraus wieder $v^2 = 2gx$ folgt.

Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

(§. 191.)

129. Um die Schwingungszeit eines einfachen Pendels im leeren Raume, welches nur kleine Schwingungsbögen beschreibt, zu bestimmen, sei die Länge des Pendels $CA = r$ (Fig. 25), ABA' der dem Halbmesser r entsprechende, in einer verticalen Ebene liegende Kreisbogen, in welchem der schwere Punct A schwingt, C der Aufhängpunct des Pendels als Mittelpunct des Kreisbogens und $BD = a$ der dem Schwingungsbogen ABA' entsprechende Sinusversus. Nimmt man nun an, dass der schwere Punct, welcher seine Bewegung in A beginnt, während der Zeit t bis M gekommen sei und hier die Geschwindigkeit v erlangt habe, so ist [**128.** Gleich. (s)] $v = \sqrt{(2g.DP)}$, oder wenn man die Abscissen auf dem verticalen Durchmesser CB von B aus zählt, und für diesen Punct M die Abscisse $BP = x$ setzt, sofort: $v = \sqrt{[2g(a-x)]}$.

Da aber auch [**120.** Gleich. (α)] $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ oder $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}$ und für den Kreis $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} = \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ ist (wozu man $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ aus der Gleichung des Kreises $y = \sqrt{(2rx-x^2)}$ zu bestimmen hat); so hat man mit Rücksicht darauf, dass wenn t zunimmt, sofort x abnimmt, folglich $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}x$ entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen, auch:

$$\mathrm{d}t = \frac{-r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(2rx-x^2)}.\sqrt{[2g(a-x)]}} = \frac{-r}{2\sqrt{rg}}.\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}}$$

diese Gleichung von $x = BD = a$ bis $x = 0$ integrirt, gibt die halbe, d. i. die Schwingungszeit für den Bogen AMB und es ist, wenn man die Grenzen der Integration umkehrt, dagegen das Zeichen ändert:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}}.\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}},$$

oder wenn man, da sich die Integration nur durch eine unendliche Reihe ausführen lässt, den letzten Bruch in eine Reihe auflöst und

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}} = \left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\ldots$$

setzt, auch:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x)^2}}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\ldots\right]$$

durch Ausführung dieser Integration erhält man (Comp. §. 876, 6.):

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\pi\left[1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\ldots\right]$$

wobei diese unendliche Reihe leicht fortzusetzen ist. Diese nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{2r}$ fortlaufende Reihe convergirt aber um so mehr, je kleiner dieser Bruch, d. h. je kleiner bei einer bestimmten Länge des Pendels der Schwingungsbogen ABA' ist. Beträgt der diesen Bogen messende Winkel ACA' (die Amplitude der Oscillationen) nur einige Grade, so kann man sich für gewöhnlich schon mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen, so dass, wenn man die gesuchte Schwingungsdauer mit T bezeichnet, wegen

$T = 2t$ sofort: $T = \frac{r\pi}{\sqrt{rg}}$,

oder wenn man l statt r setzt und reducirt auch:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \ldots (m)$$

wird, welche Schwingungsdauer sofort von der Höhe BD oder a unabhängig ist. Behält man dagegen von der unendlichen Reihe auch noch das zweite Glied bei, so wird diese Dauer von der Höhe a abhängig und man erhält:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{a}{8l}\right).$$

Da der Quotient $\frac{a}{l}$ nichts anderes als der Sinusversus des Elongationswinkels $ACB = \alpha$ für den Halbmesser $= 1$, nämlich $\frac{a}{l} = 1 - Cos\,\alpha = 2\,Sin^2 \frac{1}{2}\alpha$ ist, so lässt sich der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der obigen Reihe stehen bleibt, sehr leicht berechnen. (§. 191, Anmerkung.)

Anmerkung. Einfacher noch lässt sich die Schwingungszeit des Kreispendels auf folgende Weise ableiten:

Es sei wieder $BCA = \alpha$ (Fig. 25) der Elongationswinkel des Pendels und für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens vom Halbmesser $CA = CB = a$ der variable Winkel $BCM = \omega$. Hat der der Schwere unterworfene Punct, dessen Masse $= 1$ sein soll, seine Bewegung in A begonnen, ist er in der Zeit t durch den Kreisbogen $AM = s$ herabgegangen und hat er in M die Geschwindigkeit v erlangt; so ist [Nr. **120.**, Relation (α)] $v = \frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\omega}{dt}$ und die beschleunigende Kraft [Nr. **124.**, Relation (1)] $p = \frac{dv}{dt} = \frac{a\,d^2\omega}{dt^2}$.

Stellt man sich aber vor, dass der schwere Punct von M durch das Curvenelement $Mm = ds$ wie über die in M an den Kreisbogen gezogene Tangente als eine schiefe Ebene (deren Winkel mit dem Horizont $= \omega$ ist) herabgleitet; so ist die Beschleunigung [§. 187, (3')] g als Mass dieser Kraft p auch gleich $g\,Sin\,\omega$, folglich wenn man zugleich berücksichtiget, dass ω abnimmt, wenn t zunimmt, also $d\omega$ und dt entgegengesetzte Zeichen haben müssen sofort: $\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{g}{a} Sin\,\omega$.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2d\omega$ und integrirt dann, so erhält man: $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a} Cos\,\omega + C$

und da für $\omega = \alpha$ der Quotient $\frac{d\omega}{dt} = v = o$ ist, so erhält die Constante C den Werth: $-\frac{2g}{a} Cos\,\alpha$, und es ist allgemein:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha) \ldots (m),$$

oder: $$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{Cos\,\omega - Cos\,\alpha}.$$

Sind nun, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Winkel ω und α klein, so kann man näherungsweise $Cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}$ und $Cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ setzen (nämlich die höheren Potenzen von ω und α auslassen), wodurch die vorige Gleichung in folgende:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}(\alpha^2 - \omega^2)}$$

übergeht und woraus, mit Rücksicht darauf, dass wie bemerkt, $d\omega$ und dt entgegengesetzte Zeichen haben sollen, sofort:

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}$$

und daraus durch Integration $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot arc\,Cos\,\frac{\omega}{\alpha}$ folgt, wozu keine Constante kommt, weil für $\omega = \alpha$ die Zeit t und auch $arc\,Cos\,1 = 0$ ist.

Für den tiefsten Punct B wird $\omega = 0$ und t geht in die halbe Schwingungszeit $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot arc\,Cos\,0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ über, so dass wieder, wie oben, $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ wird.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punctes.

(§. 195.)

130. Ist ein materieller Punct, dessen Masse gleich 1 sein soll, bei seiner Bewegung gezwungen, den Kreis AMB vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 26) zu beschreiben, so lässt sich der Druck, welchen derselbe durch diese Bewegung auf die Curve ausübt (gleich der Centrifugalkraft) auf folgende Weise bestimmen.

Zerlegt man die auf den Punct A wirkende beschleunigende Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine nach der Tangente AT, die andere nach der Normale AC des Kreises, so rührt die Bewegung des materiellen Punctes in der Richtung der Projection auf diese Normale lediglich von dieser letztgenannten Seitenkraft her. Sieht man aber diese Seitenkraft während einer unendlich kleinen Zeit dt (wie diess immer erlaubt ist) sowohl in ihrer Grösse als Richtung als constant an und ist während dieser Zeit $AM = ds$ der Weg des beweglichen Punctes und $AP = dx$ der Weg der Projection dieses Punctes auf die Normale; so ist nach der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung diese nach der Normale wirkende Kraft [**125**. Beispiel, Relation (n)] $f = \frac{2\,dx}{dt^2}$, oder da der Bogen $AM = ds$ mit dessen Sehne verwechselt werden darf und nach einem bekannten geometrischen Satze dann $dx = \frac{ds^2}{2r}$ ist, auch $f = \frac{1}{r}\frac{ds^2}{dt^2}$ oder wegen $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte A bezeichnet, $f = \frac{v^2}{r} \ldots (n)$, welche Kraft (Centripedalkraft genannt) sofort der Centrifugalkraft oder dem Drucke gegen die Curve gleich aber entgegengesetzt ist. Besitzt der bewegliche Punct die Masse m, so ist (**125.**) diese Kraft:

$$F = mf = \frac{mv^2}{r}.$$

Bezeichnet M das Gewicht der Masse m, so ist (§. 123, Anmerkung 3.) $M = mg$ oder $m = \frac{M}{g}$, folglich:

$$F = \frac{Mv^2}{rg} \text{ (vergl. §. 196, Gleich. I).}$$

Anmerkung. Ist w die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punctes, folglich $v = rw$, so erhält die Gleichung (n) auch die Form $f = rw^2 \ldots (m)$.

131. Beschreibt der materielle Punct überhaupt eine gegebene Curve im Raume, so seien, um die Centrifugalkraft für diesen allgemeinen Fall zu bestimmen, M_1M und MM' (Fig. 27) zwei aufeinander folgende Elemente dieser Curve, D und D' ihre Halbirungspuncte und MT und $M'T'$ ihre Verlängerungen; so ist bekanntlich (Lehrbuch III. §. 97, Comp. §. 763) TMT' die Krümmungsebene, sowie der Winkel TMT' der Winkel der Contingenz der Curve im Puncte M, und eine in dieser Ebene gezogene Gerade MO, welche den Winkel M_1MM' halbirt, fällt sofort mit dem entsprechenden Krümmungshalbmesser zusammen, so dass der Punct O den Mittelpunct der Krümmung dieser Curve im Puncte M darstellen kann. Setzt man das Curvenelement $M_1M = DD' = ds$, den unendlich kleinen Winkel $TMT' = \delta$, sowie den Krümmungshalbmesser $OM = \varrho$; so ist, wie bekannt, $ds = \varrho\,\delta$ (weil nämlich das Curvenelement DMD' als ein Kreisbogen vom Halbmesser OM angesehen werden kann, welchem der Mittelpunctswinkel $DOD' = TMT'$ entspricht) oder $\delta = \frac{ds}{\varrho} \ldots (a)$.

Diess vorausgesetzt, komme der materielle Punct nach Verlauf der Zeit t im Puncte M mit der Geschwindigkeit v an, so dass er also, wenn er ganz frei wäre, in der Richtung MT mit derselben Geschwindigkeit fortginge (indem wir vor der Hand von allen Kräften, die auf diesen Punct einwirken können, abstrahiren); da dieser Punct jedoch nach der gemachten Voraussetzung die Curve $M_1MM'E$ zu beschreiben gezwungen ist, so ändert er im Puncte M seine Richtung von MT in MT'. Errichtet man in der genannten Krümmungsebene auf MT' das Perpendikel MN', so kann man die nach MT gerichtete Geschwindigkeit v in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten nach MT' und MN' zerlegen, wovon sofort die erstere $= v \, Cos \, \delta$ und die letztere $= v \, Sin \, \delta$ sein wird, und die Wirkung der Centripedalkraft f oder wenn man will der Curve, wird darin bestehen, diese letztere Geschwindigkeit aufzuheben, damit nur die erstere allein bestehen bleibt, oder mit andern Worten, die genannte, der Centrifugalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft f muss in dem materiellen Puncte oder dem Beweglichen eine gleiche Geschwindigkeit $v \, Sin \, \delta$ und zwar nach entgegengesetzter Richtung von MN' erzeugen. Nimmt man nun an, dass die Kraft f diese Geschwindigkeit $v \, Sin \, \delta$ in dem Beweglichen oder materiellen Punct, dessen Masse $= 1$ sein soll, während der Zeit dt, als derselbe das Bogenelement DMD' zurücklegt, hervorbringt; so wird diese beschleunigende Kraft (**125.**) durch diese während der unendlich kleinen Zeit dt erzeugten Geschwindigkeit $v \, Sin \, \delta$, dividirt durch die Zeit dt gemessen oder ausgedrückt, so dass man hat $f = \frac{v \, Sin \, \delta}{dt}$. Setzt man δ statt $Sin \, \delta$ (weil δ unendlich klein) und für δ den obigen Werth aus (a), so erhält man mit Rücksicht darauf, dass (**120.**) $ds = v \, dt$ ist, auch $f = \frac{v^2}{\varrho}$, oder wenn der bewegliche Punct die Masse m besitzt, für die Centrifugalkraft im Puncte M, welche sofort nach der Richtung MN wirksam ist:

$$F = \frac{mv^2}{\varrho} = m \varrho w^2 \ldots (i),$$

wenn nämlich w die Winkel-Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M ist.

Was die Geschwindigkeit $v \, Cos \, \delta$ betrifft, mit welcher das Bewegliche von M aus nach MM' in der Curve weiter geht, so bleibt diese wegen $Cos \, \delta = 1$, ungeändert $= v$.

Wirken auf das Bewegliche eine oder mehrere Kräfte, so ändert sich die Geschwindigkeit v je nach der Grösse der nach der Tangente der Curve zerlegten Seitenkraft; ebenso bringt die in der Richtung der Normale wirksame Seitenkraft einen weiteren Druck auf die Curve (welcher auch stattfände, wenn der bewegliche Punct ruhte) hervor, den man zur Centrifugalkraft noch hinzufügen muss.

Zur Uebung und um dem Anfänger überhaupt mehr Uebersicht und Gewandtheit in der Bewegungslehre zu verschaffen, geben wir hier nebst mehreren vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen und Sätzen, auch noch eine weitere Entwickelungsart der Centrifugalkraft.

1. Bei der gleichförmigen Bewegung sind die Geschwindigkeiten den in gleichen Zeittheilchen zurückgelegten Räumen, diese letzteren aber den bewegenden Kräften, folglich auch die Geschwindigkeiten diesen Kräften und umgekehrt proportional, so dass also bei dieser Bewegung Kraft und Geschwindigkeit eines für das andere als Mass dienen kann. Aus diesem Grunde lassen sich auch alle für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte aufgestellten Regeln zugleich für die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten anwenden.

2. Um die Gesetze der ungleichförmigen Bewegung auf jene der gleichförmigen zurückzuführen, kann man sich vorstellen, dass bei der Bewegung eines Punctes, welcher von einer continuirlich fortwirkenden Kraft, wie es z. B. bei der Schwerkraft der Fall, getrieben wird, diese Kraft nicht ohne Unterbrechung oder continuirlich wirkt, sondern ihre Wirkungen durch unmerklich kleine Zeiten von einander getrennt sind. Diese Vorstellungsart, welche mit den Principien der Differenzial-Rechnung besser übereinstimmt, führt zu demselben Resultate wie die Annahme von dem Wirken ohne Unterbrechung; denn stellt man die Geschwindigkeiten eines von einer continuirlich wirkenden Kraft getriebenen Körpers durch die Ordinaten einer Curve vor, so verwandelt sich diese Curve im ersteren Falle in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, welches sofort als mit der Curve zusammenfallend angesehen werden kann. Bezeichnet man daher mit dt die Dauer des unendlich kleinen Zeittheilchens, welche die successiven Wirkungen einer beliebigen bewegenden Kraft von einander trennt, so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig angesehen werden, so dass, wenn ds den in dieser Zeit zurückgelegten unendlich kleinen Raum bezeichnet, sofort $\frac{ds}{dt}$ die entsprechende Geschwindigkeit ist. Denkt man sich also die Zeit t, während welcher die bewegende Kraft bei der ungleichförmigen Bewegung auf den beweglichen Körper wirkt, in unendlich viele, unendlich kleine Theile getheilt, so zerfällt diese Bewegung in unendlich viele gleichförmige Bewegungen, deren Geschwindigkeiten in den einzelnen Intervallen constant sind und nur von einem Intervalle zum andern variiren.

3. Was die sogenannte beschleunigende Kraft betrifft, welche diese eben betrachtete Bewegung erzeugt, so müssen, da ihre Wirkung die Bewegung continuirlich zu ändern strebt, ihr auch diese augenblicklichen Aenderungen zum Masse dienen.

Da man nun während des Zeitelementes dt die Wirkung der beschleunigenden Kraft P als constant ansehen kann, so wird, wenn dv die Zunahme der Geschwindigkeit am Ende der Zeit dt bezeichnet, sofort:

$$dv = P\,dt, \text{ also } P = \frac{dv}{dt} \text{ und wegen } v = \frac{ds}{dt}, \text{ auch } P = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung wird daher die beschleunigende Kraft durch den Quotienten aus dem Quadrate des als constant angenommenen Zeitelementes in das zweite Differenziale des Raumes gemessen. Zugleich lässt sich auf diese Kraft auch alles das anwenden, was bei der gleichförmigen Bewegung über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gesagt wurde.

4. Auf die sogenannten bewegenden Kräfte übergehend, so ist, wenn die beschleunigende Kraft p in den materiellen Punct von der Masse m einwirkt, die entsprechende bewegende Kraft $P = pm$, oder wegen $p = \frac{dv}{dt}$ auch $P = m\frac{dv}{dt}$, wobei der Quotient $\frac{dv}{dt} = \varphi$ die durch die Kraft p in der Masse m hervorgebrachte Beschleunigung bezeichnet.

Ist P eine constante Kraft, und bringt diese in der Masse m nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit v hervor, so ist die Beschleunigung $\varphi = \frac{v}{t}$ und daher $P = \frac{mv}{t}$. Man hat daher als Mass:

$$\text{der constanten Kräfte } P = m\varphi = \frac{mv}{t},$$

$$\text{der variablen Kräfte } P = m\varphi = m\frac{dv}{dt},$$

oder es wird jede Kraft durch das Product aus der Masse, in welche sie wirkt, in die Beschleunigung der Masse gemessen oder ausgedrückt; dabei ist jene Masse zur Einheit genommen, welche durch die Einwirkung der Krafteinheit während der Zeiteinheit eine durch die Längeneinheit dargestellte Geschwindigkeit erlangt.

Aus den vorigen Relationen folgen jene (in Nr. **54**. erwähnten) $Pt = mv$ und $\int P\,dt = \int m\,dv$, in Folge welcher der Impuls einer Kraft nach einer bestimmten Zeit, der dieser Zeit entsprechenden Grösse der Bewegung des materiellen Punctes gleich ist.

5. Wirken auf einen freien materiellen Punct von der Masse m, welcher bereits irgend eine Anfangs-Geschwindigkeit besitzen mag, beliebig viele Kräfte, so kann man durch den Punct A, in welchem die Einwirkung dieser Kräfte beginnt, ein rechtwinkeliges Coordinaten-System legen, jede dieser Kräfte in 3 aufeinauder senkrechte Componenten nach den Richtungen dieser Achsen zerlegen und (Nr. **14**.) die Resultirende aus allen diesen Kräften bestimmen. Die Aufgabe der Bewegung des materiellen Punctes

im Raume besteht dann allgemein darin, 1stens nach Verlauf einer bestimmten Zeit die Lage oder Position dieses Punctes, 2. seine Geschwindigkeit und 3. die Gleichungen der von diesem Puncte beschriebenen Curve oder Trajectorie zu bestimmen.

Ist P die Resultirende aller auf den Punct einwirkenden Kräfte und bildet diese mit den 3 Achsen in der genannten Ordnung die Winkel α, β, γ; so sind P, α, β, γ bekannte Functionen der Zeit t. Ist ferner V die Geschwindigkeit und sind a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit denselben Achsen bildet; so sind $P\,Cos\,\alpha$, $P\,Cos\,\beta$, $P\,Cos\,\gamma$ die Componenten der Kraft P und zugleich auch die Projectionen derselben auf die Coordinatenachsen, sowie $V\,Cos\,a$, $V\,Cos\,b$, $V\,Cos\,c$ die Projectionen der Geschwindigkeit V auf die nämlichen Achsen.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass zwischen den Projectionen p und $\frac{dv}{dt}$ der Kraft P und Beschleunigung $\frac{dV}{dt}$ (wenn man nämlich P und V auf ein und dieselbe Gerade projicirt [m. s. Zusatz 1.]), dieselben Beziehungen wie zwischen der Kraft P und der auf den materiellen Punct m hervorgebrachten Beschleunigung bestehen; es ist daher, wenn man diesen Satz nach und nach auf die 3 Achsen bezieht, sofort:

$$P\,Cos\,\alpha = m\frac{d(V\,Cos\,a)}{dt},\quad P\,Cos\,\beta = m\frac{d(V\,Cos\,b)}{dt},\quad P\,Cos\,\gamma = m\frac{d(V\,Cos\,c)}{dt},$$

oder wenn man, wie es üblich, die 3 nach den Achsen der x, y, z gerichteten Componenten der Kraft P durch X, Y, Z, sowie jene der Geschwindigkeit V durch v, u, w bezeichnet, auch:

$$X = m\frac{dv}{dt},\quad Y = m\frac{du}{dt},\quad Z = m\frac{dw}{dt}\ldots(1),$$

wobei noch überdiess (**120**.) die 3 Relationen bestehen:

$$v = \frac{dx}{dt},\quad u = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt}\ldots(2).$$

Auch kann man diese Werthe in (1) substituiren und setzen:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}\ldots(3).$$

Diese 3 Gleichungen (3) oder 6 Gleichungen (1) und (2) lösen das genannte Problem vollständig auf, indem sich daraus die Grössen x, y, z, v, u, w als Functionen bekannter Grössen bestimmen oder ausdrücken lassen. Man nennt desshalb auch die drei Gleichungen (3) die allgemeinen oder Fundamental-Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punctes im Raume.

Wie man sieht, ist auf diese Weise das Problem der krummlinigen Bewegung auf jenes von drei geradlinigen Bewegungen nach den Achsen der x, y, z zurückgeführt.

Ist der bewegliche Punct frei, so geben die ersten Integrale dieser Gleichungen (3) die Geschwindigkeiten, welche er nach einer bestimmten Zeit nach den Richtungen der Achsen besitzt, sowie die zweiten oder endlichen Integrale die Coordinaten x, y, z in Functionen der Zeit t, welche die Lage desselben in diesem Augenblicke angeben. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so bleiben zwischen diesen 3 Variablen x, y, z noch

2 Gleichungen als Gleichungen der Trajectorie, welche von dem Puncte m im Raume beschrieben wird, und welche im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung ist.

Ist der bewegliche Punct nicht frei, sondern ist er z. B. gezwungen, bei seiner Bewegung beständig auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben; so eliminirt man mit Hilfe der Gleichung der Fläche oder der Gleichungen der Curve aus den durch Integration der obigen Relationen (3) für x, y, z entstehenden Gleichungen so viele Veränderliche als Gleichungen gegeben sind und erhält so für X, Y, Z die Bedingungs-Gleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn der gegebene Punct den gegebenen Anforderungen entsprechen soll.

6. Ist der bewegliche Punct gezwungen, auf einer gegebenen krummen Fläche zu bleiben, so werden alle auf diesen Punct gegen die Fläche normal wirkenden Kräfte durch den Widerstand der Fläche aufgehoben. Da man aber diesen Widerstand durch eine normale Kraft von unbestimmter Grösse ersetzen kann, so kann man sich auch diesen Punct als einen vollkommen freien vorstellen, wenn man nur zu den vorhandenen auf den materiellen Punct wirkenden äusseren Kräften noch eine Kraft von unbestimmter Grösse hinzufügt, welche in jeder Position des Punctes gegen die krumme Fläche normal ist. Obschon nun durch Einführung dieser Kraft eine neue Unbekannte, nämlich ihre Grösse (ihre Lage ist aus der Bedingung, dass sie auf die Fläche normal sein muss, bestimmt) hinzukommt, so fällt doch wieder Eine hinaus, indem die Coordinaten des materiellen Punctes fortwährend untereinander durch die Gleichung der krummen Fläche verbunden oder der letzteren Genüge leisten müssen. Es treten daher hier genau wieder eben so viele Unbekannte auf, als in jenem Falle, in welchem der bewegliche Punct vollkommen frei ist.

Es seien nun wieder, wie vorhin X, Y, Z die nach den drei Coordinatenachsen gerichteten Seitenkräfte der Resultirenden aus allen gegebenen äusseren Kräften und F die der Grösse nach unbekannte Kraft, welche den Widerstand der krummen Fläche repräsentirt, sowie λ, μ, ν die Winkel ihrer Richtung mit den 3 Achsen, welche, wie bemerkt, bekannte Functionen der Coordinaten x, y, z sind.

Diess vorausgesetzt sind die drei allgemeinen oder Fundamental-Gleichungen der Bewegung:

$$X + F\,Cos\,\lambda = m\frac{dv}{dt},\; Y + F\,Cos\,\mu = m\frac{du}{dt},\; Z + F\,Cos\,\nu = m\frac{dw}{dt}\;\ldots(4),$$

zu welchen noch wie gewöhnlich die 3 folgenden, auf die Geschwindigkeiten sich beziehenden:

$$v = \frac{dx}{dt},\; u = \frac{dy}{dt},\; w = \frac{dz}{dt}\ldots(5)$$

hinzukommen und wohl auch, wie es oben geschehen, mit den vorigen (4) verbunden werden könnten.

Mit Hilfe dieser 6 Gleichungen ist das hier gegebene Problem vollkommen gelöst, indem, wenn die äusseren Kräfte gegeben sind, die Bewegung bestimmt werden kann und umgekehrt, wenn die Bewegung bekannt ist, die äusseren Kräfte gefunden werden können.

Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche, so sind, wie bekannt, die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen der x, y, z bilden, beziehungsweise (Comp. §. 757, Anmerkung):

$$Cos\,\lambda = A\left(\frac{df}{dx}\right),\quad Cos\,\mu = A\left(\frac{df}{dy}\right),\quad Cos\,v = A\left(\frac{df}{dz}\right),$$

wenn man nämlich Kürze halber

$$(k)\ldots\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = A \text{ setzt.}$$

Setzt man diese Werthe für $Cos\,\lambda$, $Cos\,\mu$, $Cos\,v$ in die obigen Gleichungen (4) und eliminirt dann aus den 3 entstehenden das Product AF, so erhält man die 3 folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} X\left(\frac{df}{dy}\right) - Y\left(\frac{df}{dx}\right) &= m\left[\frac{dv}{dt}\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{du}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right)\right] \\ X\left(\frac{df}{dz}\right) - Z\left(\frac{df}{dx}\right) &= m\left[\frac{dv}{dt}.\left(\frac{df}{dz}\right) - \frac{dw}{dt}.\left(\frac{df}{dx}\right)\right] \end{aligned}\right\}\ldots(6).$$

Diese Gleichungen enthalten die Kraft F nicht mehr und wenn man denselben noch die gegebene Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ hinzufügt, erhält man 3 Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z, welche sich sonach als Functionen der Zeit t ausdrücken lassen.

7. Ist der bewegliche Punct genöthigt, auf einer gegebenen Curve zu bleiben, so wird man wieder, wie im vorigen Falle, den materiellen Punct als einen freien betrachten können, wenn man zu den gegebenen äusseren Kräften noch eine von unbestimmter Grösse hinzufügt, welche auf der Curve perpendiculär steht, d. h. (weil jetzt die Richtung nicht wie vorhin bestimmt, sondern unbestimmt ist) welche in der auf der Curve im betreffenden Puncte normalen Ebene liegt.

Obschon wir dadurch 2 neue Unbekannte erhalten, nämlich die Grösse dieser Kraft und einen ihrer Winkel (indem aus einem Winkel und der Bedingung, dass die Kraft auf der Curve, d. i. auf der Tangente, deren Richtung bekannt, normal steht, ihre Richtung vollkommen gegeben ist); so entfallen doch wieder andererseits 2 unbekannte Grössen, indem die Coordinaten des beweglichen Punctes fortwährend in einer bestimmten Beziehung zu den beiden gegebenen Gleichungen der Curve stehen und damit verbunden sind.

Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen hat man hier als allgemeine Bewegungs-Gleichungen:

$$X + F Cos\,\lambda = m\frac{dv}{dt},\quad Y + F Cos\,\mu = m\frac{du}{dt},\quad Z + F Cos\,v = m\frac{dw}{dt}\ldots(7),$$

und wieder: $$v = \frac{dx}{dt},\quad u = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt}\ldots(8),$$

zu welchen man noch die Bedingungs-Gleichung hinzufügen muss, welche ausdrückt, dass die Kraft F perpendiculär auf der betreffenden Tangente der Curve steht; diese Bedingungs-Gleichung ist bekanntlich:

$$\frac{dx}{ds}Cos\,\lambda + \frac{dy}{ds}Cos\,\mu + \frac{dz}{ds}Cos\,v = 0\ldots(9).$$

Mittelst dieser und der beiden Gleichungen der gegebenen Curve ist das Problem der Bewegung wieder vollkommen gelöst.

Eliminirt man auch hier aus diesen Gleichungen die Kraft F und die Cosinus $Cos\,\lambda$, $Cos\,\mu$, $Cos\,v$ (am einfachsten, wenn man die Gleich. (7) beziehungsweise mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und dann addirt, wobei der Factor von F wegen (9) Null und jener von m das nach s genommene Differentiale von $\frac{1}{2}\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$, d. i. von $\frac{1}{2}V^2$ ist) so erhält man statt der 3 Gleichungen (7) die einzige:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\,\tfrac{1}{2}mV^2 \ldots (10),$$

welche mit den 2 Gleichungen der gegebenen Curve verbunden, sofort 3 Relationen für die Coordinaten x, y, z, und zwar in Functionen der Zeit t liefern, wodurch alle bezüglichen Probleme der Bewegung aufgelöst werden können.

8 Nach der allgemeinen Definition sind Kräfte auf einen Körper oder ein System von Körpern oder materiellen Puncten im Gleichgewichte, wenn sie absolut ohne Einfluss auf die Bewegung desselben sind, mithin ohne dass dadurch die Bewegung im geringsten modificirt wird, diese Kräfte nach Belieben hinzugefügt oder weggelassen werden können.

Da nun für das Gleichgewicht der vorhin betrachteten auf den materiellen Punct m wirksamen Kräfte die ersten Glieder der vorigen Gleich. (3) der Bewegung Null sein oder verschwinden müssen, weil sonst die (durch doppelte Integration erhaltenen) Coordinaten x, y, z nicht dieselben oder ungeändert bleiben könnten, wenn man jene Kräfte (P_1, P_2.... in $X = \Sigma(P_1 Cos\,\alpha_1)$ u. s. w.), welche sich das Gleichgewicht halten sollen, hinzufügen oder wegnehmen wollte. Man kommt also durch diese Betrachtungen aus den Gleichungen der Bewegung genau wieder auf dieselben Bedingungs-Gleichungen für das Gleichgewicht $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, wie in Nr. **14**. der Statik.

Da übrigens diese Bedingungs-Gleichungen, wie die obigen Relationen (1) zeigen, jene $v = const.$, $u = const.$, $w = const.$ mit involviren, so folgt, dass für das Gleichgewicht dieser Kräfte der Punct m eine geradlinige, gleichförmige Bewegung annimmt oder besitzt, was nach dem sogenannten Trägheitsgesetz (15.) auch nicht anders sein kann.

9. Für das Gleichgewicht eines materiellen Punctes, welcher gezwungen ist, fortwährend auf einer gegebenen krummen Fläche zu bleiben, ist es nicht mehr nothwendig, dass die Resultante aus den einwirkenden Kräften Null sei, sondern es genügt, dass dieselbe stets mit der Normale der Fläche in dem betreffenden Puncte zusammenfalle und gegen die Fläche gerichtet sei, indem der Widerstand der Fläche einer normalen Kraft von unbestimmter Grösse gleich gesetzt werden kann, die jedenfalls die genannte Resultirende aufhebt oder mit ihr im Gleichgewichte steht.

Bildet die Normale irgend eines Punctes x, y, z der gegebenen krummen Fläche mit den 3 Coordinatenachsen die Winkel λ, μ, v, so hat man bekanntlich [Nr. **13**., Relat. (2)]:

$$\frac{X}{Cos\,\lambda} = \frac{Y}{Cos\,\mu}, \quad \frac{X}{Cos\,\lambda} = \frac{Z}{Cos\,\nu} \ldots (11),$$

oder da, wenn $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche ist, sofort:

$$Cos\,\lambda = A\left(\frac{df}{dx}\right), \quad Cos\,\mu = A\left(\frac{df}{dy}\right), \quad Cos\,\nu = A\left(\frac{df}{dz}\right)$$

ist, wobei A den oben in (k) angegebenen Werth besitzt, auch:

$$X\left(\frac{df}{dy}\right) - Y\left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \text{ und } X\left(\frac{df}{dz}\right) - Z\left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \ldots (12).$$

Uebrigens erhält man diese beiden Bedingungs-Gleichungen auch unmittelbar aus den obigen Gleichungen (6) der Bewegung, wenn man die ersten Theile derselben gleich Null setzt, um nämlich wieder auszudrücken, dass die Kräfte ohne Einfluss auf die Bewegung des materiellen Punctes weggenommen werden können.

10. Sollen in dem in 7. behandelten Falle die Kräfte auf den materiellen Punct im Gleichgewichte sein, so genügt es wieder, dass ihre Resultirende P auf der gegebenen Curve im betreffenden Puncte normal stehe, ihre Grösse und Lage mag übrigens in der bezüglichen Normalebene wie immer sein, indem diese Kraft in allen Fällen von dem Widerstande der Curve aufgehoben wird.

Diese hier ausgesprochene Bedingung wird aber ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{X}{P} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P} \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch jene:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \ldots (13).$$

11. Um jetzt gleich auf die Eingangs erwähnte Centrifugalkraft eines in einer Curve sich bewegenden materiellen Punctes zu kommen, gehen wir auf die Gleichungen (7) und (8) zurück, nehmen aber an, dass nach Verlauf der Zeit t die auf den Punct wirkenden äusseren Kräfte entfernt werden oder zu wirken aufhören, und sonach von diesem Momente an die Bewegung des materiellen Punctes gleichförmig geworden; so hat man wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sofort:

$$F\,Cos\,\lambda = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F\,Cos\,\mu = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad F\,Cos\,\nu = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

oder wegen $dt = \frac{ds}{V}$ auch:

$$F\,Cos\,\lambda = mV^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad F\,Cos\,\mu = mV^2\frac{d^2y}{ds^2}, \quad F\,Cos\,\nu = mV^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Werden diese letztern Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Relation von $Cos\,\lambda^2 + Cos\,\mu^2 + Cos\,\nu^2 = 1$, sofort für den normalen Druck auf die krumme Linie:

$$F = mV^2\frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{ds^2}.$$

Ist aber ϱ der Krümmungshalbmesser dieser Curve für irgend einen Punct x, y, z derselben, so ist unter der Voraussetzung, dass ds constant:

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

mithin mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung der Druck oder die Centrifugalkraft:

$$F = \frac{mV^2}{\varrho}.$$

Muss der bewegliche materielle Punct anstatt auf einer Curve, auf einer gegebenen krummen Fläche bleiben, so ist die Centrifugalkraft, wie aus der vorigen Relation erhellt, gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punctes, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Trajectorie. Da aber die Ebene, in welcher der Krümmungskreis liegt, d. h. die Krümmungsebene, beständig oder überall auf der gegebenen Fläche perpendiculär oder normal steht, welche Eigenschaft im Allgemeinen der zwischen 2 Puncten der Oberfläche möglichen kürzesten Linie zukommt, so beschreibt dieser Punct oder das Mobile zugleich diese kürzeste Linie, eine Eigenschaft, welche dem sogenannten Principe der kleinsten Wirkung entspricht.

12. Eliminirt man aus den beiden Fundamental-Gleichungen der geradlinigen Bewegung:

$$P = m\frac{dv}{dt} \text{ und } v = \frac{ds}{dt}$$

die Zeit t, dividirt nämlich die erste durch die zweite Gleichung, so erhält man:

$$\frac{P}{v} = m\frac{dv}{ds},$$

wobei, wie bekannt, da v und s explicite Functionen von t sind, in den Quotienten $\frac{dv}{ds}$ aus den Differential-Quotienten $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}$ diese Grössen v und s nunmehr als implicite Functionen von t erscheinen.

Die vorige Gleichung ist in einer andern Form:

$$P ds = mv dv,$$

und wenn man integrirt:

$$\int_0^s P ds = \tfrac{1}{2}mv^2 \ldots (14),$$

in welcher Gleichung die Zeit t nicht mehr explicit erscheint und überall dort von Wichtigkeit ist, wo sich die Kraft P als Function (anstatt wie gewöhnlich der Zeit) des Weges s ausdrücken lässt. Man nennt das nach s genommene Integrale $\int P ds$ die Arbeit der Kraft P, und da wir mv^2 die lebendige Kraft des materiellen Punctes nennen, so folgt, dass die Arbeit der halben lebendigen Kraft gleich ist.

Ist P constant, so ist $\int P ds = Ps$. Ist P veränderlich, so ist $\int P ds$ die Summe aller Producte, die entstehen, wenn man die einzelnen Werthe der Kraft mit den betreffenden unendlich kleinen Wegen multiplicirt. Ueberall erscheint die Arbeit unabhängig von der Zeit.

Da die sogenannte lebendige Kraft nichts anderes als eine Arbeit, welche nothwendig ist, um in der Masse m die Geschwindigkeit v zu erzeugen, so wäre es zufolge der Relation (14) wohl folgerichtiger und logischer, unter der lebendigen Kraft (Arbeit in Bewegung) nicht mv^2, sondern $\frac{1}{2}mv^2$ zu verstehen.

Diese Relation (14) besitzt eine gewisse Analogie mit jener $\int P dt = \int m dv$ (oben in 4. entwickelt), nach welcher der Impuls einer Kraft auf einen materiellen Punct gleich ist der Grösse der Bewegung, so dass also die Arbeit zur lebendigen Kraft dieselbe Beziehung wie der Impuls zur Grösse der Bewegung hat, oder mit anderen Worten, es misst von den beiden Grössen mv und $\frac{1}{2}mv^2$ die erstere die Wirkung der Kraft in der Zeit und die letztere im Raume.

Sind s_0 und s_1 zwei Wege, vom Momente der Bewegung an gezählt, und dabei $s_1 > s_0$; so ist nach der obigen Relation:

$$\int_0^{s_0} P ds = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{und} \quad \int_0^{s_1} P ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2,$$

mithin auch, wenn man subtrahirt:

$$\int_{s_0}^{s_1} P ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 \ldots (15).$$

Würde die lebendige Kraft, anstatt zu wachsen, abnehmen, so würde der 2te, folglich auch der 1ste Theil dieser Gleichung negativ, zum Beweis, dass die Kraft P der ursprünglichen Richtung der Bewegung entgegenwirken und dadurch eine Verzögerung hervorbringen würde.

Die vorige Gleichung (15) zeigt, dass die Arbeit einer Kraft zwischen zwei beliebigen Positionen gleich ist der Veränderung der lebendigen Kraft zwischen denselben beiden Positionen. Ist daher die Geschwindigkeit des Mobilen in zwei verschiedenen Puncten dieselbe, so ist die Aenderung der lebendigen Kraft zwischen diesen beiden Puncten gleich Null. Diess bedingt aber, dass die Kraft P in irgend einem zwischen liegenden Puncte ihr Zeichen geändert habe, weil sonst das Integrale, welches die Arbeit ausdrückt, nicht Null werden könnte. Hieraus folgt ferner, dass die Arbeit der Kraft während der zweiten Periode ihres Weges gleich und entgegengesetzt der Arbeit der ersten Periode ist; dass daher, um irgend eine lebendige Kraft zu zerstören, genau dieselbe Arbeit erforderlich ist, als um dieselbe zu erzeugen.

13. Unter einem Systeme von materiellen Puncten versteht man eine Verbindung derselben in solcher Weise, dass keiner derselben für sich eine Bewegung annehmen kann, ohne dadurch auch die Bewegung der übrigen Puncte mit zu afficiren. Jenachdem diese gegenseitige Abhängigkeit durch sogenannte innere Kräfte bedingt, oder mittelst sogenannter geometrischer Verbindungen (wie durch vollkommen biegsame Fäden, steife Drähte u. s. w.) bewirkt wird, heisst das System ein dynamisches oder geometrisches. In beiden Fällen kann aber das System wenigstens insoweit ein freies sein, als wohl die Puncte untereinander nach gewissen Beziehungen verbunden sind, dabei aber keiner derselben noch ausserdem gezwungen ist, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben.

Offenbar muss im dynamischen Systeme jeder materielle Punct durch irgend eine innere Kraft afficirt werden, welche als Function der Coordinaten der übrigen Puncte erscheint und schon *a priori* gegeben ist, d. h. es muss für jeden Punct wenigstens Eine Gleichung von der Form $F = \varphi(x, y, z, x', y' \ldots)$ bestehen, wo F eine der Kräfte darstellt, welche von den Coordinaten der verschiedenen materiellen Puncte abhängig ist. Ein solches System von n Puncten bedingt daher zum wenigsten n solcher Gleichungen.

Alle dieser Kraft F analoge Kräfte kann man mit Freycinet sehr passend innere Kräfte nennen, zum Unterschiede aller übrigen äusseren auf die Puncte wirkenden Kräfte, welche zu ihrer gegenseitigen Verbindung nichts beitragen.

Es kann bemerkt werden, dass in einem freien (d. i. unabhängig von der Bedingung, dass ein oder mehrere Puncte auf einer krummen Fläche oder Linie zu bleiben gezwungen sind) dynamischen Systeme demselben durch Anbringung von passenden äusseren Kräften jede beliebige Bewegung ertheilt werden kann. Denn es lässt sich jeder Punct als ein freier ansehen, auf welchen äussere und innere Kräfte wirken, die zusammen eine einzige Resultirende haben; verbindet man nun mit dieser Resultirenden eine neue passende äussere Kraft, so kann man eine neue Mittelkraft erhalten, welche sofort im Stande ist, die beabsichtigte Bewegung hervorzubringen.

In der Natur oder Wirklichkeit kommt jedoch dieser ganz allgemeine Fall nicht vor, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht.

Man kann nämlich alle Körper als Aggregate von materiellen Puncten ansehen, auf welche fortwährend zwei Arten von Kräften in Thätigkeit sind, und zwar sind diese entweder äussere (wie z. B. die Schwere), oder innere, und diese letzteren bestehen in den wechselseitigen Wirkungen, welche die materiellen Puncte des Körpers oder Systemes selbst aufeinander ausüben. Empfängt nämlich eines dieser Elemente, dessen Masse wir mit m bezeichnen wollen, eine Kraftäusserung von Seite eines anderen Elementes von der Masse m', und bezeichnen wir diese Kraft durch p, so empfängt ebenso das Element m' von jenem m eine Kraft p' und das Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung besteht nun in Folgendem:

1. Die Richtungen dieser beiden Kräfte liegen in der Geraden, welche die beiden Elemente verbindet.
2. Beide Kräfte haben numerisch die nämliche Intensität, und
3. sie sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt, wirken also beide anziehend oder beide abstossend.

Obschon von den Gesetzen dieser inneren Kräfte nichts weiter bekannt ist als die erwähnte Gleichheit der wechselseitigen Wirkungen, so kann man sich über die Art, wie die Elemente der Körper auf einander wirken, gleichwohl eine ziemlich klare Vorstellung machen, wenn man die von mehreren Gelehrten aufgestellte Hypothese zu Hilfe nimmt. Nach dieser erstreckt sich das Gesetz der allgemeinen Gravitation auch auf die kleinsten Theile der Materie, so dass sich diese um so stärker anziehen, je näher sie sich kommen; ausserdem aber besteht (nach dieser Hypothese) zwischen zwei benachbarten Massentheilchen eine abstossende Kraft, welche von der Wärme oder von ähnlichen Ursachen abhängt und welche sich mit der Entfernung ändert, jedoch nach einem anderen Gesetze als die Gravitation.

Demnach wäre jede von den beiden genannten Kräften p und p' die Differenz oder Resultante zweier Kräfte, nämlich 1. der wechselseitigen Gravitation zwischen den beiden Elementen m und m', dann 2. der wechselseitigen Abstossung in Folge von Ursachen, welche der Wärme analog sind.

Diese Resultante würde anziehend, abstossend oder null sein, je nachdem die Intensität der ersteren Kraft grösser, kleiner, oder gleich der Intensität der letzteren wäre.

Was das geometrische System betrifft, so kann die Verbindung der materiellen Puncte entweder 1. durch biegsame, unausdehnsame Fäden, 2. durch steife Drähte von unveränderlicher Länge und 3. mittelst biegsamer Fäden, an denen die materiellen Puncte (wie in Ringen) hin- und hergleiten können, hergestellt sein; dabei muss aber im letzteren Falle jeder Faden zugleich an zwei materiellen Puncten befestigt sein, weil sonst der hin- und hergleitende Punct in dem Faden keinerlei Widerstand hervorrufen würde.

Auch für dieses System gelten in Beziehung auf die algebraische Darstellung die vorigen Bemerkungen und es muss für ein geometrisches System wenigstens Eine Gleichung von der Form $\delta = \varphi(x, y, z, x, y' \ldots)$ existiren, wobei δ eine constante Grösse und nach Umständen die Länge des Fadens oder Drahtes zwischen den beiden materiellen Puncten bezeichnet; zugleich müssen in dieser Gleichung sämmtliche Puncte des Systemes durch ihre Coordinaten vertreten sein, weil ohne dieses der nicht vertretene Punct auch kein Punct des Systemes sein könnte.

Dynamisches System.

Bilden die materiellen Puncte von den Massen $m, m', m'' \ldots$ ein solches System, so seien P die Resultirende aller auf den Punct m einwirkenden äusseren Kräfte und X, Y, Z die 3 Componenten (oder Projectionen) derselben nach den Achsen des willkürlich gewählten rechtwinkeligen Coordinaten-Systemes; ferner seien ebenso S die Resultante aller inneren auf diesen materiellen Punct m wirkenden Kräfte, so wie K, L, M die Componenten derselben nach denselben Achsen, wobei in S zugleich auch jene Kraft enthalten sein soll, welche den Widerstand der krummen Flächen oder Linien repräsentirt, auf denen dieser Punct etwa zu bleiben genöthigt sein kann.

Offenbar kann man sich aber diesen Punct m als vollkommen frei und vom Systeme losgetrennt vorstellen, sobald man zu der äusseren bewegenden Kraft P die innere Kraft S hinzufügt, denn es verhält sich dann dieser Punct genau so, wie ein vollkommen freier, auf welchen die Kräfte P und S wirken. Mit Rücksicht darauf kann man daher auch auf diesen Punct m die allgemeinen Bewegungs-Gleichungen anwenden und diese sind:

$$X + K = m\frac{dv}{dt}, \quad Y + L = m\frac{du}{dt}, \quad Z + M = m\frac{dw}{dt} \ldots (a),$$

wozu noch jene kommen, die sich auf die Geschwindigkeiten beziehen, d. i.:

$$v = \frac{dx}{dt},\quad u = \frac{dy}{dt},\quad w = \frac{dz}{dt} \ldots (b).$$

Genau ebenso erhält man für den 2. Punct m' die analogen Gleichungen:

$$X' + K' = m' \frac{dv'}{dt},\ Y' + L' = \ldots (a') \text{ und } v' = \frac{dx'}{dt},\ u' = \ldots (b'),$$

und so auch für die noch übrigen Puncte m'', m''' . . des Systemes die ähnlichen Gleichungen (a''), (b'') etc.

Ist nun das System ein gegebenes, so kennt man K, L, M. . in Functionen der Coordinaten des Systemes und man kann, wenn auch die äusseren Kräfte bekannt sind, die Bewegung jedes einzelnen Punctes mit Hilfe der vorigen Gleichungen (a), (a')..., sowie umgekehrt, wenn die Bewegung bekannt, d. i. die Coordinaten der einzelnen Puncte gegeben sind, die äusseren Kräfte bestimmen. Hier ist übrigens nur von der theoretischen Möglichkeit die Rede, da sich der wirklichen Ausführung oft unübersteigliche Schwierigkeiten entgegensetzen.

Geometrisches System.

Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung und mit Rücksicht, dass hier unter S die Resultante aus den sogenannten Verbindungskräften (wieder eventuell jene inbegriffen, welche von dem Widerstande der krummen Flächen oder Linien herrühren) zu verstehen ist, gelten auch hier wieder die obigen allgemeinen Gleichungen der Bewegung (a), (b), (a'), (b')..

Ist nun das System ein bestimmtes oder gegebenes, so ist die Anzahl der Verbindungs-Gleichungen ebenso gross, als die Anzahl der wirklich Unbekannten und man kann, wie eine einfache Betrachtung zeigt, in den genannten Gleichungen die Verbindungskräfte K, L, M, K'... als bekannte Grössen ansehen; denn obschon durch die Verbindung eines Punctes mit einem anderen in diese Grössen K, L... eine neue Unbekannte, nämlich die Intensität der betreffenden Verbindungskraft gebracht wird, so liefert doch auch wieder dieselbe Verbindung andererseits eine neue Verbindungs-Gleichung zwischen denselben unbekannten Coordinaten, wodurch schliesslich die ursprüngliche Anzahl von Gleichungen, folglich auch die Anzahl der Unbekannten, ungeändert bleibt, geradeso, als ob in den erwähnten Bewegungs-Gleichungen alle inneren, d. i. Verbindungskräfte unmittelbar gegeben wären.

Auf solche Weise hat man immer so viele Gleichungen als nothwendig sind, um entweder, wenn die äusseren Kräfte (und die Verbindungen) gegeben sind, die Coordinaten der materiellen Puncte in Functionen dieser äusseren Kräfte, oder umgekehrt, wenn die Bewegung, d. i. die Coordinaten gegeben sind, die äusseren Kräfte als Functionen dieser Coordinaten auszudrücken.

Ist auf diese Weise die Aufgabe gelöst, d. h. sind sowohl die Coordinaten der materiellen Puncte, als auch die äusseren Kräfte bekannt; so unterliegt es auch keinem Anstande, die Intensität der Verbindungskräfte p, p'..., q, q'... (Spannungen der Fäden, Normaldrücke gegen die Flächen oder Linien u. s. w.) zu finden; denn man darf dazu nur für $P, x, y, z \ldots$ die Werthe in Functionen der Zeit ausgedrückt, in die ursprünglichen Gleichungen $(a) \ldots$ setzen.

Um dieses Verfahren durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehmen wir den in §. 115, Beisp. 2 (Fig. 113) bebandelten Fall, in welchem auf einer doppelten schiefen Ebene zwei durch einen Faden mit einander verbundenen Körper oder materiellen Puncte m, m' vom Gewichte $P = mg$ und $P' = m'g$ liegen oder sich bewegen, wobei die Flächen als absolut glatt angenommen werden (d. i. von jedem Widerstande wie Reibung u. s. w. abstrahirt wird).

Bilden die beiden Ebenen AC, BC mit der Horizontalen AB die Winkel α, α' und legt man durch A in der verticalen Ebene ACB das rechtwinkelige Achsensystem, bei welchem die Abscissenachse mit AB zusammenfällt, und die positiven Ordinaten nach aufwärts, also der Schwerkraft entgegen gezählt werden; bezeichnet bei irgend einer Position der beiden Puncte m, m', nämlich nach Verlauf der Zeit t, vom Beginn der Bewegung an gezählt, die Coordinaten derselben beziehungsweise durch x, y, x', y', ferner durch p, p' die Spannungen der an m und m' befestigten Fadenstücke, sowie durch q, q' die Normaldrücke dieser Puncte gegen die Ebenen AC und BC; so ist, wie leicht zu sehen:

$$K = -q \, Sin\, \alpha + p \, Cos\, \alpha, \qquad K' = q' \, Sin\, \alpha' - p' \, Cos\, \alpha',$$
$$L = q \, Cos\, \alpha + p \, Sin\, \alpha, \qquad L' = q' \, Cos\, \alpha' + p' \, Sin\, \alpha'.$$

Da ferner die auf diese Körper oder materiellen Puncte m, m' einwirkenden äusseren Kräfte keine anderen sind als die aus der Schwerkraft herrührenden Kräfte $gm = P$ und $gm' = P'$ und diese parallel mit der Ordinatenachse wirken; so ist dafür:

$$X = 0, \quad Y = -P \quad \text{und} \quad X' = 0, \quad Y' = -P'.$$

Für den vorliegenden Fall gehen daher die obigen Bewegungs-Gleichungen, wenn man gleich (a) mit (b), (a') mit (b') verbindet, über in:

$$-q \, Sin\, \alpha + p \, Cos\, \alpha = m \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad q' \, Sin\, \alpha' - p' \, Cos\, \alpha' = m' \frac{d^2x'}{dt^2},$$
$$-P + q \, Cos\, \alpha + p \, Sin\, \alpha = m \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad -P' + q' \, Cos\, \alpha' + p' \, Sin\, \alpha' = m' \frac{d^2y'}{dt^2}.$$

Wegen der unveränderlichen Länge des Fadens zwischen den beiden Befestigungspuncten und der Bedingung, dass die Puncte m, m' die Ebenen AC, BC nicht verlassen können, hat man zuerst $ds' = ds$, d. i. $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$, oder wenn man Kürze halber $tang\, \alpha = a$, $tang\, \alpha = a'$, $\frac{Cos\, \alpha'}{Cos\, \alpha} = A$, $\frac{Sin\, \alpha'}{Sin\, \alpha} = A'$ setzt und berücksichtiget, dass y' zunimmt, wenn y abnimmt und umgekehrt, auch:

$$dx' = A\, dx \ldots (1'), \quad dy' = -A\, dy \ldots (2') \quad \text{und} \quad y = ax \ldots (3')$$

als die 3 gegebenen Verbindungs-Gleichungen, während die 4te $y' = -a'x'$ nur eine Folge der beiden ersteren ist.

Setzt man auch noch Kürze halber:

$\frac{d^2x}{dt^2} = B$, wodurch $\frac{d^2x'}{dt^2} = AP$, $\frac{d^2y}{dt^2} = aB$ und $\frac{d^2y'}{dt^2} = -aA'B$, und berücksichtiget endlich, dass $p' = p$ ist, so nehmen die vorigen 4 Bewegungs-Gleichungen die einfachere Form an:

$$(1)\quad -q\,Sin\,\alpha + p\,Cos\,\alpha = mB, \qquad (3)\quad q'Sin\,\alpha' - p\,Cos\,\alpha' = m'AB,$$
$$(2)\quad q\,Cos\,\alpha + p\,Sin\,\alpha = P + maB, \quad (4)\quad q'Cos\,\alpha' + p\,Sin\,\alpha' = P' - m'aA'B.$$

Eliminirt man nun aus diesen 4 Gleichungen p, so erhält man 3 Gleichungen mit den 2 Unbekannten q, q'; wird aus diesen Gleichungen q eliminirt, so bleiben noch 2 Gleichungen mit der Unbekannten q', und wenn man endlich aus diesen Gleichungen auch noch q' eliminirt, so entsteht eine von p, q, q' befreite Gleichung, welche mit den gegebenen 3 Verbindungs-Gleichungen (1'), (2'), (3') combinirt die zur Bestimmung der Coordinaten x, y, x', y' nöthigen 4 Gleichungen liefert.

Ohne uns übrigens an diese Ordnung zu halten, eliminiren wir zuerst aus den Gleichungen (1) und (2) die Unbekannte p und erhalten nach Herstellung der Werthe von a, A, A' und einer einfachen Reduction:

$q = P\,Cos\,\alpha$, und ebenso aus (3) und (4) $q' = P'\,Cos\,\alpha'$.

Diese Werthe für q und q' in die Gleichungen (1) und (3) gesetzt und dann daraus mB und $m'AB$ eliminirt, erhält man nach Herstellung des Werthes von A und gehöriger Reduction:

$$p = \frac{Pm'Sin\,\alpha + P'm\,Sin\,\alpha'}{m + m'},$$

oder wegen $m = \frac{P}{g}$ und $m' = \frac{P'}{g}$ auch:

$$p = \frac{PP'}{P + P'}(Sin\,\alpha + Sin\,\alpha') \ldots (b).$$

Aus den Verbindungs-Gleichungen (1'), (2'), (3') folgen die Beziehungen:

$$x' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}x, \quad y' = -\frac{Sin\,\alpha'}{Sin\,\alpha}y, \quad y = tang\,\alpha . x, \quad y' = -\,tang\,\alpha' . x'.$$

Haben also die Coordinaten des materiellen Punctes m in irgend einem Momente die Coordinaten $x = a$ und $y = b$, so sind jene des Punctes m':

$$x' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}a \quad \text{und} \quad y' = -\frac{Sin\,\alpha'}{Sin\,\alpha}b.$$

Die Gleichungen (b) geben, wenn man integrirt: $x = vt$, $y = ut$ jene (b') ebenso: $x' = v't$, $y' = u't$; also ist auch:

$$v't = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}vt, \text{ d. i. } v' = \frac{Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha}v \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (a) geben, wenn man für q und p die gefundenen Werthe substituirt und berücksichtiget, dass (Nr. **122.**, Relat. 4) $\frac{dv}{dt} = G'$ und $\frac{du}{dt} = G''$ die Beschleunigungen nach den Achsen der x und y bezeichnen, und wenn man für m den Werth $\frac{P}{g}$ setzt und gehörig abkürzt:

$$G' = \frac{P'Sin\,\alpha' - P\,Sin\,\alpha}{P + P'}g\,Cos\,\alpha,$$

$$G'' = \frac{P'Sin\,\alpha' - P\,Sin\,\alpha}{P + P'}g\,Sin\,\alpha;$$

folglich ist die Beschleunigung des Körpers auf der schiefen Ebene AC, d. i. $G = \sqrt{G'^2 + G''^2}$, wegen $Sin\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2 = 1$ sofort:

$$G = \frac{P'\,Sin\,\alpha' - P\,Sin\,\alpha}{P + P'}\,g \ldots (c),$$

wie diess Alles ohnehin bekannt ist.

Auf ähnliche Weise könnte man auch die Beschleunigung des materiellen Punctes m' finden.

Für das Gleichgewicht ist $G = 0$, daher $P\,Sin\,\alpha = P'\,Sin\,\alpha'$ und die Spannung des Fadens (aus b) $p = P\,Sin\,\alpha = P'\,Sin\,\alpha'$.

Geht der Faden, an dessen Enden die Gewichte P und P' befestigt sind, über eine feste Rolle und haben die Fadenstücke die lothrechte Richtung, so folgt wegen $\alpha = \alpha' = 90^0$ aus (b) und (c) beziehungsweise:

$$p = \frac{2PP'}{P + P'} \text{ und } G = \frac{P' - P}{P + P'}\,g \text{ u. s. w.}$$

14. Betrachtet man endlich die Körper, deren Bewegung untersucht wird, als materielle Puncte, so bildet ganz einfach der Quotient aus der in einer gegebenen Zeit erzeugten Geschwindigkeit dividirt durch diese Zeit das Mass der bewegenden Kraft. Um aber Kräfte mit einander zu vergleichen, die auf verschiedene Körper wirken, muss man auch auf die Massen dieser Körper Rücksicht nehmen, und in diesem Falle dient bei der gleichförmigen Bewegung (§. 173) das Product aus der Masse des Körpers in seine Geschwindigkeit, d. i. die Grösse der Bewegung, dagegen bei der ungleichförmigen Bewegung, das Product aus der Masse in den Quotienten, welcher entsteht, wenn man die in dem Elemente der Zeit erlangte unendlich kleine Geschwindigkeit durch dieses Zeitelement dividirt, als Mass der bewegenden Kraft (Nr. **124**).

Betrachtet man ein System von Körpern oder materiellen Puncten, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, im Zustande der Bewegung, so ist klar, dass die Bewegung jedes einzelnen Körpers das Resultat sein muss aus der auf ihn einwirkenden Kraft und der Reaction der übrigen Körper des Systemes, welche auf ihn stattfindet. Daraus folgt aber, dass keiner dieser Körper im Allgemeinen jene Bewegung annehmen wird, die er vermöge des ursprünglich erhaltenen Impulses und der ihn treibenden beschleunigenden Kräfte angenommen hätte, wenn er frei wäre. Um nun diese von dem Systeme, wovon er einen Theil ausmacht, herrührende Veränderung in der Bewegung zu bestimmen, und die wirklich stattfindende Bewegung zu erhalten, hat D'Alembert ein allgemeines Bewegungsprincip aufgestellt, mittelst welchem man im Stande sein sollte, alle auf die Bewegung sich beziehenden Aufgaben in Gleichungen zu bringen oder auf Aufgaben der Statik zurückzuführen. Dieses Princip ist folgendes:

„Theilt man den Körpern eines Systemes Bewegungen mit, welche durch „ihre gegenseitigen Verbindungen modificirt werden, so kann man diese „Bewegungen so ansehen, als beständen sie aus denjenigen, welche die „Körper wirklich annehmen und aus anderen Bewegungen, welche vernichtet werden; diese letzteren Bewegungen müssen daher so beschaffen

„sein, dass wenn die Körper des Systemes von diesen allein afficirt wür-„den, diese sofort im Gleichgewichte wären."

Dieses D'Alembert'sche Princip gilt sowohl für die nach der älteren Annahme (jedoch nicht existirenden) momentan, als continuirlich wirkenden Kräfte; da jedoch die Bestimmung der Kräfte, welche vernichtet werden und für sich im Gleichgewicht stehen müssen, oft sehr weitläufig und schwierig wird; so wurde dieses Princip später modificirt und in folgender Weise ausgesprochen:

„Gibt man jedem Körper eines Systemes eine Bewegung, die derjenigen, „welche er annehmen muss, gleich, aber direct entgegengesetzt ist, so wird „das ganze System ruhen; diese Bewegungen vernichten daher diejenigen, „welche die Körper angenommen hätten, wenn sie frei gewesen wären, folg-„lich muss zwischen diesen verschiedenen Bewegungen oder den sie erzeu-„genden Kräften Gleichgewicht vorhanden sein."

Es seien nun m, m', m'' ... die Massen der verschiedenen Körper eines solchen Systemes, x, y, z, x', y' z' ... die rechtwinkeligen Coordinaten ihrer Schwerpuncte nach Verlauf der Zeit t, und X, Y, Z, X', Y', Z' ... die auf die Masseneinheit der Körper m, m' ... nach den Richtungen der Coordinatenachsen (d. i. mit diesen parallel) wirkenden beschleunigenden Kräfte, folglich mX, mY, mZ, $m'X'$, $m'Y'$, $m'Z'$ u. s. w. die bewegenden Kräfte, welche beziehungsweise die Körper m, m' u. s. w. nach den genannten Richtungen treiben; endlich soll das Element der Zeit dt als constant angesehen werden. Diess vorausgesetzt sind die den Körper m am Ende des folgenden Zeitelementes nach den Richtungen der Coordinatenachsen afficirenden Geschwindigkeiten $= \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, folglich (Nr. 125.) die ihn nach diesen Richtungen treibenden bewegenden Kräfte $= m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$. Diese Kräfte gehen im nächstfolgenden Zeitelemente wegen der Wirkung der beschleunigenden Kräfte über in

$$m\frac{dx}{dt} + mXdt,\ m\frac{dy}{dt} + mYdt,\ m\frac{dz}{dt} + mZdt$$

(weil wenn $X = \frac{dv}{dt}$ gesetzt wird, $Xdt = dv$ die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dt bezeichnet, daher die beschleunigende Kraft $\frac{dx}{dt}$ in $\frac{dx}{dt} + Xdt$ übergeht). Die wirklichen Zunahmen aber, welche die Geschwindigkeiten des Körpers m parallel zu den Coordinatenachsen zufolge seiner Verbindung mit den übrigen Körpern des Systemes erhalten und auf deren Bestimmung es hier eigentlich ankommt, sind:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt},\ \frac{d^2y}{dt},\ \frac{d^2z}{dt},$$

folglich die wirklichen bewegenden Kräfte, welche den Körper m am Ende der Zeit dt nach den genannten Richtungen treiben:

$$m\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt},\ m\frac{dy}{dt} + m\frac{d^2y}{dt},\ m\frac{dz}{dt} + m\frac{d^2z}{dt}.$$

Bringt man also diese mit den drei vorigen Kräften auf den Körper m in direct entgegengesetzter Richtung an, so bleiben für die auf diesen Körper oder materiellen Punct wirkenden bewegenden Kräfte:

$$m\left(X\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\right),\ m\left(Y\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t}\right),\ m\left(Z\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t}\right)\ldots(a).$$

Um die ähnlichen Ausdrücke für die übrigen Körper m', m'' ... des Systemes zu erhalten, darf man die Buchstaben m, x, y, z, X, Y, Z dieses Ausdruckes (a) nur mit einem, zwei u. s. w. Accente versehen.

Da nun aber dem D'Alembert'schen Principe zufolge das System unter der vereinten Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewichte sein muss, so braucht man in den allgemeinen Gleichungen (s) von Nr. **20.** (Anmerkung 2) nur statt der Seitenkräfte $P\,Cos\,\alpha$, $P\,Cos\,\beta$, $P\,Cos\,\gamma$ beziehungsweise die vorigen Kräfte (a) zu substituiren. Man erhält dadurch:

$$\Sigma m\left(X\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\right)=0,\ \text{oder}$$

$$(t)\left\{\begin{array}{l}\Sigma(mX)=\Sigma\left(m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\ \text{und ebenso}\\[2ex] \Sigma(mY)=\Sigma\left(m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\\[2ex] \Sigma(mZ)=\Sigma\left(m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right),\ \text{ferner}\\[2ex] \Sigma(m[Xy-Yx])=\Sigma\left(m\left[\dfrac{y\,\mathrm{d}^2x-x\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\[2ex] \Sigma(m[Xz-Zx])=\Sigma\left(m\left[\dfrac{x\,\mathrm{d}^2z-z\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\\[2ex] \Sigma(m[Yz-Zy])=\Sigma\left(m\left[\dfrac{y\,\mathrm{d}^2z-z\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\right)\end{array}\right.$$

diess sind sonach die Gleichungen der Bewegung für ein beliebiges freies System von Körpern m, m', m''..., von welchen sich wieder die 3 ersten auf die progressive Bewegung des Systemes oder dessen Schwerpunct, und die 3 letzten auf die Rotation desselben um dessen Schwerpunct, oder um eine durch den Schwerpunct gehende Axe beziehen. Wäre einer dieser Körper gezwungen, auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben, so müsste man den auf ihn wirkenden Kräften noch den Widerstand (als neue Kraft) hinzufügen, welchen der Körper von der Fläche oder Curve erleidet, um dann auch diesen Körper wieder als völlig frei betrachten zu können. (Eine specielle Anwendung des D'Alembert'schen Principes oder Lehrsatzes kommt weiter unten beim Ausfluss aus einem Gefässe, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt, in der Anmerkung mit weiteren Erläuterungen vor.)

Diese 6 Gleichungen enthalten mehrere allgemeine Bewegungsgesetze oder Lehrsätze, wovon wir hier jedoch nur einen der wichtigsten anführen wollen.

15. Sind nämlich nach Verlauf der Zeit t diese von dem Augenblicke an gezählt, als die Bewegung beginnt, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunctes des Systemes der Körper oder materiellen Puncte m, m'.., so ist

(Nr. **16**, [3]), wenn man Kürze halber die Gesammtmasse des Systemes $\Sigma(m) = M$ setzt:

$$Mx_1 = \Sigma(mx),\quad My_1 = \Sigma(my),\quad Mz_1 = \Sigma(mz),$$

und wenn man diese Gleichungen zweimal nach t differentiirt:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right),\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die 3 ersten der vorigen Gleichungen (t), so erhält man:

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma(mX),\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma(mY),\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma(mZ)\ldots(\alpha);$$

diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung des Schwerpunctes eines freien Systemes von materiellen Puncten oder Körpern im Raume genau so stattfindet, als wenn die sämmtlichen Massen m, m'... in diesem Puncte vereinigt und alle ihre bewegenden Kräfte durch parallele Verschiebungen ihrer Richtungen auf diesen Punct angebracht wären.

Da nun auf diese Weise alle jene Kräfte, deren Componenten oder Seitenkräfte (parallel mit den Achsen) einander gleich und entgegengesetzt sind, aus den Differenzial-Gleichungen dieser Bewegung hinausfallen, dieser Fall aber dann eintritt, wenn die bewegenden Kräfte keine äusseren sind, sondern aus den wechselseitigen Wirkungen entstehen, welche die materiellen Puncte des Systemes auf einander ausüben, indem sich diese nach dem allgemeinen Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wenn diese Kräfte auf den Schwerpunct des Systemes übertragen werden, zu zwei und zwei aufheben; so bewegt sich, sobald auf die materiellen Puncte des gänzlich freien Systemes ausser ihrer eigenen gegenseitigen Einwirkung (durch Anziehung oder Abstossung) keine anderen Kräfte wirken, der Schwerpunct desselben gleichförmig und geradlinig und behält beständig die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit bei, weshalb man diesen Lehrsatz das Princip von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung genannt hat.

Denn zufolge der Annahme von $\Sigma(mX) = 0$, $\Sigma(mY) = 0$, $\Sigma(mZ) = 0$ geben die vorigen Gleichungen (α) nach der ersten Integration:

$$M\frac{dx_1}{dt} = const.,\quad M\frac{dy_1}{dt} = const.,\quad M\frac{dz_1}{dt} = const.,$$

sowie, wenn man noch einmal integrirt, die Gleichungen:

$$x_1 = ct + C,\quad y_1 = c't + C',\quad z_1 = c''t + C''.$$

Die 3 ersten dieser 6 Gleichungen zeigen nun deutlich, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunctes constant sei, während die 3 letzten Gleichungen, in welchen c, c'.. C, C'.. lauter constante Grössen sind, offenbar die Gleichungen einer geraden Linie im Raume sind.

Insofern dieses Princip, oder wenn man will, Axiom der Gleichheit zwischen Action und Reaction, nichts anderes als die Art und Weise ausdrücken soll, in welcher wir uns die Fortpflanzung oder Uebertragung irgend einer Action (Kraft oder Anstrengung) auf ein Object vorstellen, ist wohl die von Professor Decher gerügte Begriffs-Verwirrung oder die

Meinung, als ob ein Körper gleichsam in sich selbst einen Widerwillen gegen jede Veränderung empfände und desshalb sich der Bewegung oder Aenderung derselben widersetze und dagegen eine Reaction ausübe, nicht zu besorgen.

Wirkt z. B. eine Kraft gegen einen festen, unbeweglichen Punct, so wird dieselbe zerstört oder aufgehoben, und der Erfolg ist genau so, oder es hat den Anschein, als ob dieser feste Punct eine Kraft entwickele, welche der ersteren gleich und entgegengesetzt wäre. Sind ebenso zwei Körper A und B miteinander (wie z. B. durch eine steife Linie) unveränderlich verbunden und übt der erstere A, durch die Einwirkung einer Kraft p in Bewegung gesetzt, auf den zweiten B einen Druck oder Zug aus, so erhält dadurch auch dieser eine Bewegung und es hat dabei für den ersten Körper A den Anschein, oder es befindet sich dieser in derselben Lage, als ob der zweite Körper B gar nicht existirte, dafür aber gegen A unmittelbar eine Kraft thätig oder wirksam wäre, welcher jener p gleich, ihr aber gerade entgegengesetzt ist.

Prof. Decher bemerkt hierüber (in einer Abhandlung über Trägheit, Reaction und Kraft): „dass man bei den durch materielle Verbindungen „übertragenen Kräften jede Kraft wie eine durch Zug oder Druck gespannte „Feder betrachten könne, die mit ihren beiden Enden an die betreffenden „materiellen Puncte befestigt ist, und diese entweder einander zu nähern, „oder von einander zu entfernen strebt, dabei aber beide in Bewegung „setzt; dass ferner die Spannung der Feder nur eine und dieselbe Kraft „bilde, welche auf beide Puncte gleichzeitig und in gleicher Weise wirke „und ihnen Geschwindigkeiten ertheile, die ihren Massen umgekehrt proportional sind. Es gibt also in allen Fällen zwischen zwei materiellen Puncten nur eine einzige Wirkung und nicht für den einen eine Action und „für den anderen eine Reaction.“

Es muss hier übrigens bemerkt werden, dass das oben ausgesprochene Axiom, nach welchem jede Kraftäusserung oder Anstrengung (so oft wir nämlich einen Körper in Bewegung setzen, kommt in uns eine gewisse Kraftanstrengung, die wir eine Zeitlang gegen denselben ausüben, zum Bewusstsein) dem Widerstand gleich und entgegengesetzt ist, ein logischer Begriff, und mit dem von Newton entdeckten Naturgesetze, nach welchem sich zwei Körper oder materielle Puncte gegen einander so verhalten, als ob zwischen ihnen eine gleiche, entgegengesetzte Action und Reaction stattfände, nicht zu verwechseln ist. Ersteres beruht auf einem logischen Schluss und gilt selbst für ideelle Körper, während letzteres ein auf Thatsachen beruhendes Gesetz für wirklich bestehende Körper ist.

Das Gesetz der Reaction besteht nämlich allgemein in der Thatsache, dass so oft in der Natur irgend wo ein Bewegungsact stattfindet, sich immer auch gleichzeitig an einem anderen Orte ein dem ersteren gleicher und entgegengesetzter Act der Bewegung geltend macht, welcher nur oft durch Reibung, feste Widerstände u. s. w. aufgehoben, jedoch sogleich bemerkbar wird, sobald diese Hindernisse beseitigt werden.

Tausend Thatsachen beweisen, dass wenn sich ein Körper einem 2ten nähert oder von diesem entfernt, sich auch dieser 2te Körper dem 1sten gerade so nähert oder von ihm entfernt, als ob in diesem eine anziehende oder abstossende Kraft thätig wäre, und dass man mit Recht sagen kann: es verhalten sich beide Körper gegen einander gerade so, als ob zwischen beiden eine Action und Reaction gleich und entgegengesetzt stattfände. Der Umstand, dass man sich später erlaubt hat, diese Erklärung abzukürzen und einfach zu sagen, dass zwischen zwei Körpern die Reaction immer gleich und entgegengesetzt der Action sei, mag allerdings bei Einigen zu der von Prof. Decher gerügten Begriffsverwirrung Anlass gegeben haben.

Offenbar hängt der unrichtige Begriff, welchen man öfter mit der Benennung Reaction der Körper verbindet, mit dem eben so falschen Ausdrucke der Trägheitskraft („*force d'inertie*") zusammen. Es dürfte hier nicht am unrechten Orte sein, das Gesetz der Trägheit kurz zu wiederholen; es besteht dasselbe nämlich darin, dass von dem Augenblicke an, als die auf einen beweglichen Körper einwirkenden Kräfte zu wirken aufhören, dieser (natürlich bei Abwesenheit jedes äusseren Widerstandes) eine gleichförmige Bewegung nach gerader Linie, nämlich (wenn derselbe in einen einzigen Punct concentrirt gedacht wird) nach der Tangente der von ihm bis dahin beschriebenen Curve mit Beibehaltung jener Geschwindigkeit, welche er im Augenblicke des Verschwindens dieser Kräfte erlangt hat, annimmt.

Dieses von Keppler entdeckte Naturgesetz (welches sich keineswegs, wie man gewöhnlich annimmt, *a priori* beweisen lässt) erweist sich in allen Fällen als vollkommen richtig und berechtigt uns zugleich zu der Annahme, dass überall, wo wir eine gleichförmige Bewegung wahrnehmen, diese ohne Einwirkung irgend einer Kraft (wie wir diese in der Mechanik verstehen) stattfinde, oder dass für unseren Calcül diese Kraft gleich Null sei.

Die Körper, welche wir in Bewegung setzen und wobei wir einer gewissen Anstrengung bedürfen, widerstehen dieser letzteren keineswegs in der Art, wie diess ein festes Hinderniss thut; denn die Körper weichen, wenn keine äusseren Hindernisse vorhanden sind, selbst der allerkleinsten Kraftanstrengung.

Bekanntlich werden in der Mechanik diese Kraftanstrengungen durch abstracte Zahlen oder Kräfte ersetzt, deren Einheit die Kraftanstrengung ausdrückt, um ein Gewicht von 1 Pfund, 1 Kilogramm u. s. w. schwebend zu erhalten.

Alle in der Natur vorkommenden Bewegungen, deren Ursachen uns im Allgemeinen unbekannt sind, könnten immer auch durch solche Kräfte hervorgebracht werden, welche wir in der Mechanik zu Grunde legen, und es ist eben mit die Aufgabe der Mechanik, die Grösse der Kraft zu bestimmen, welche im Stande ist, irgend eine vor Augen habende Erscheinung oder Bewegung in der Natur genau ebenso hervorzubringen.

Um auf den hier entwickelten Satz der sogenannten Erhaltung des Schwerpunctes zurückzukommen, so folgt daraus 1stens, dass alle für den materiellen Punct geltenden und entwickelten Gesetze, welche aus der Einwirkung beliebiger Kräfte hervorgehen, auch ohne Ausnahme für den Schwerpunct eines jeden materiellen Systemes gelten, wenn man sich nur die Gesammtmasse des Systemes in diesem Schwerpuncte concentrirt, und alle äusseren Kräfte nach ihrer Grösse und Richtung in diesen Punct verlegt denkt; und dass 2tens die inneren Kräfte, welche höchstens die Gestalt oder Form des Systemes ändern können, im Falle dasselbe nicht starr ist, auf diese Bewegung des Schwerpunctes nicht den geringsten Einfluss haben.

So können z. B. die Muskelkräfte der Menschen und Thiere, als innere Kräfte, durchaus keine Fortbewegung ihres Schwerpunctes hervorbringen, wenn sie nicht nach dem vorhin erwähnten Gesetze der Reaction äussere Kräfte in der Art hervorrufen, dass wenn sie den Schwerpunct oder sich selbst nach irgend einer Richtung hin bewegen wollen, sie einen Stützpunct finden, welcher eine Reaction nach entgegengesetzter Richtung erzeugt.

Steht ein Mensch z. B. auf einem festen Boden, so kann er sich, wobei die horizontale Ebene eine verticale Reaction entwickelt, erheben oder niederlassen. Ebenso kann er sich vor- oder rückwärts bewegen, so lange der Boden durch seine Rauhigkeit auch eine Reaction in horizontaler Richtung darbietet. (Auf einer absolut glatten horizontalen Ebene wäre jede seitliche Fortbewegung unmöglich.)

Springt ein Mensch in die Höhe, so nimmt der Druck gegen den Stützpunct (also auch dessen Reaction) momentan und zwar insolange zu, als der Schwerpunct mit Beschleunigung aufwärts steigt; das Gegentheil findet statt, wenn er sich niederlässt.

Bei einem in Bewegung befindlichen Eisenbahnzuge bilden die Schienen die Stützpuncte für die Locomotiv-Räder und es entwickelt sich in diesen in jedem Augenblicke die nöthige Reaction zur Fortbewegung des Zuges, so dass also hier die Schienen dieselbe Rolle spielen, wie der Boden beim Gehen oder Laufen der Menschen und Thiere.

Bei einem sich gleichförmig fortbewegenden Dampfschiffe würden sich die Pressungen, welche einerseits auf den Kiel und die Schiffsschale und andererseits gegen die Radschaufeln stattfinden, vollkommen aufheben, wenn sie durch parallele Verschiebungen in den Schwerpunct (oder überhaupt in irgend einen Punct) angebracht oder verlegt würden.

Hängt am Deckel eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefässes, welches auf einer Wagschale im Gleichgewicht steht, ein dichterer Körper, z. B. eine Stahlkugel an einem Faden, so wird in dem Augenblicke, als der Faden reisst, also die Kugel mit beschleunigter Bewegung in der Flüssigkeit herabsinkt, diese Schale leichter oder gehoben und erst wenn die Bewegung der Kugel (durch den Widerstand der Flüssigkeit) etwa gleichförmig geworden, würde sich das Gleigewicht wieder herstellen. Fällt die Kugel auf den Boden des Gefässes und prallt sie von diesem zurück, so wird in diesem Momente die Schale schwerer oder zum Sinken gebracht.

Zerspringt eine in die Luft geworfene Bombe, so verfolgt der Schwerpunct derselben, so lange die Trümmer nicht auf andere Körper treffen, seinen Weg gerade so, als ob die Bombe ganz geblieben wäre; nur werden in der Bewegung Modificationen durch den Widerstand der Luft herbeigeführt.

Und so liessen sich über die Reaction und Bewegung des Schwerpunctes eines Systemes noch sehr viele Beispiele anführen.

16. Um von diesem wichtigen Satze ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier Kugeln betrachten, welche aufeinander stossen.

Es seien am Ende der Zeit t x und x' die Abstände ihrer Mittelpuncte von einem festen Punct der Geraden, auf welcher sich die Kugeln m und m' bewegen, sowie x_1 (in demselben Augenblicke) der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieser Körper von demselben Puncte; so hat man (Nr. **32**):

$$(m + m')x_1 = mx + m'x'$$

oder wenn man nach t differenziirt:

$$(m + m')\frac{dx_1}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} \ldots (\alpha),$$

wodurch die den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ der beiden Kugeln entsprechende Geschwindigkeit $\frac{dx_1}{dt}$ des Schwerpunctes gegeben ist. Nun hat man aber vor dem Stoss $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dx'}{dt} = v'$, und nach dem Stoss, wenn die Kugeln unelastisch sind (§. 241) $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = V$, und wenn sie vollkommen elastisch sind (§. 244): $\frac{dx}{dt} = 2V - v$, $\frac{dx'}{dt} = 2V - v'$. Es ist also die Geschwindigkeit des Schwerpunctes vor dem Stoss, wenn man in die Gleichung (α) substituirt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

und nach dem Stoss, mit Rücksicht auf die Relation von $V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$ für beide Fälle (wenn man wieder in (α) gehörig substituirt):

$$\frac{dx_1}{dt} = V = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

welches genau derselbe Werth wie vor dem Stosse ist; der Stoss dieser beiden Körper ändert also durchaus nichts in der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes (da er sich überdiess auch auf der ursprünglichen Geraden gleichförmig fortbewegt).

17. Sind die mit den Massen $m, m', m'' \ldots$ behafteten materiellen Puncte in Bewegung, so seien für einen bestimmten Augenblick $x, x', x'' \ldots$ ihre Abscissen auf eine beliebige Achse bezogen und X die Abscisse des Schwerpunctes dieses Systemes für denselben Augenblick; so ist (Nr. **32**.) $(m + m' + \ldots)X = mx + m'x' + \ldots$, d. h. $X\Sigma(m) = \Sigma(mx)$. Während des folgenden Zeitelementes dt nehmen die Abscissen um $dx, dx' \ldots dX$ zu und man hat $\frac{dX}{dt}\Sigma(m) = \Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) \ldots (u)$, d. h. die auf eine Achse projicirte Grösse der Bewegung der Gesammtmasse des Systemes, diese im Schwerpunct desselben vereinigt gedacht, ist gleich der Summe der Bewegungsgrössen sämmtlicher einzelner Massen projicirt auf die nämliche Achse. Zwei ähn-

liche Gleichungen mit (u) erhält man auch für die beiden übrigen Coordinatenachsen. Ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und sind v, $v'\ldots$ jene der Puncte m, $m'\ldots$, so kann man, wenn V_x die Projection der Geschwindigkeit auf die Achse der x bezeichnet und damit analog auch die übrigen Projectionen bezeichnet werden, diese Gleichungen so schreiben:

$$V_x \Sigma(m) = \Sigma(m v_x), \quad V_y \Sigma(m) = \Sigma(m v_y), \quad V_z \Sigma(m) = \Sigma(m v_z).$$

18. Um schliesslich noch das Problem der Rotation um eine feste Achse zu behandeln, drehe sich das Element dm irgend eines Körpers um die feste Achse AZ (Fig. 28), welche zugleich von den 3 rechtwinkeligen Achsen AX, AY, AZ, worauf dieser Körper bezogen wird, die Achse der z bilden soll. Sei N die Projection dieses Elementes dm auf die Ebene der xy, dann ist $AN = r$ der Halbmesser jenes Kreises, welchen das Element bei der Rotation des Körpers um die Achse AZ beschreibt; ferner ziehe man in der Ebene der xy durch diesen Punct N die Gerade DE senkrecht auf AN. Diess vorausgesetzt denke man sich wieder die auf das Körperelement dm wirkenden beschleunigenden Kräfte in 3 Componenten X, Y, Z, beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z parallel zerlegt, so verschwinden, da die Rotation bloss um die Achse der z stattfinden soll, von den 3 letzten auf Rotation sich beziehenden Gleichungen in (t) sofort die beiden letzten von selbst und es bleibt, wenn man gleich statt der Summenzeichen die Integralzeichen setzt, bloss die Gleichung:

$$\int \left(\frac{y\, d^2x - x\, d^2y}{dt^2} \right) dm = \int (Xy - Yx)\, dm \ldots (1),$$

wobei sich die Integration auf die ganze Masse des rotirenden Körpers bezieht.

Ist u die Winkelgeschwindigkeit jedes Elementes des Körpers am Ende der Zeit t, also $v = ru$ die absolute Geschwindigkeit des genannten Elementes dm, und nimmt man u positiv oder negativ, je nachdem die Rotation in der Richtung DNE oder in der entgegengesetzten END statt hat; so sind, wenn man noch den W. $XDE = \omega$ setzt, die Seitengeschwindigkeiten nach AX und AY beziehungsweise:

$$\frac{dx}{dt} = -v\, Cos\, \omega = -v \frac{y}{r} \text{ und } \frac{dy}{dt} = v\, Sin\, \omega = v \frac{x}{r},$$

oder wegen $\quad v = ru$ auch $\dfrac{dx}{dt} = -uy, \ \dfrac{dy}{dt} = ux,$

woraus sofort $\quad u(x^2 + y^2)\, dt = x\, dy - y\, dx,$

oder wegen $x^2 + y^2 = r^2$ auch:

$$r^2 u\, dt = x\, dy - y\, dx \ldots (2)$$

folgt.

Diese Gleichung differenzirt gibt, da r und dt constant sind:

$$x\, d^2y - y\, d^2x = r^2\, du\, dt.$$

Mit Rücksicht auf diese letzte Gleichung, sowie darauf, dass du für alle Puncte des rotirenden Körpers denselben Werth besitzt, also bei allen in Bezug auf dm vorzunehmenden Integrationen du als constant zu betrachten ist, erhält die obige Gleichung (1) auch die Form:

$$\frac{du}{dt} \int r^2\, dm = \int (Yx - Xy)\, dm \ldots (3).$$

19. Um von dieser letzteren Gleichung schliesslich eine Anwendung zu zeigen, wollen wir noch die Rotation eines physischen Pendels betrachten.

Zu diesem Ende gebe man der Ebene der xy (Fig. 25) eine verticale Lage und lasse die Achse der y in die Richtung der Schwere fallen, so werden die Achsen der x und z, welche letztere als Rotationsachse in C auf der Ebene der xy senkrecht steht, horizontal, jene der y dagegen vertical sein. Da nun hier von den 3 Componenten X, Y, Z die erste und letzte Null, die 2te dagegen $Y = g$ ist, so verwandelt sich die vorige Gleichung (3) in die folgende: $\frac{du}{dt} \int r^2 dm = g \int x \, dm$, oder wenn x' und y' die Coordinaten des Schwerpunctes und M die Masse des Körpers bezeichnen, wodurch (Nr. 32) $\int x \, dm = Mx'$ wird, auch:

$$\frac{du}{dt} = \frac{gMx'}{\int r^2 dm} \ldots (A).$$

Beschreibt nun der Schwerpunct des an einen gewichts- und massenlosen undehnbaren Faden befestigten Körpers bei seiner Rotation um die genannte durch C auf XCY perpendikuläre Achse (an welcher das andere Ende des Fadens befestigt ist) in der Ebene der xy den Kreisbogen ABA', wobei wieder, wie beim einfachen Pendel, wenn der Schwerpunct beim Beginn der Oscillation in A und nach Verlauf der Zeit t in M ist, die Winkel BCA und BCM durch α und ω bezeichnet werden sollen; so sind, wenn $CA = CB = a$ gesetzt wird, die Coordinaten des Schwerpunctes des betreffenden Körpers am Ende der Zeit t:

$$x' = a \, Sin \, \omega \quad \text{und} \quad y' = a \, Cos \, \omega,$$

so dass also $dx' = a \, Cos \, \omega \, d\omega$ und $dy' = - a \, Sin \, \omega \, d\omega$ wird.

Die obige Gleichung (2) der vorigen Nummer erhält für den vorliegenden Fall, in welchem a statt r zu setzen ist, die Form: $x'dy' - y'dx' = a^2 u \, dt$, und wenn man in dieser für x', y', dx', dy' die vorigen Werthe substituirt und reducirt, so wird $-a^2 d\omega = a^2 u \, dt$ und daraus $u = -\frac{d\omega}{dt}$.

Ist ferner Mk^2 das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf eine durch dessen Schwerpunct gehende, mit der Rotationsachse CZ parallele Achse, so ist (Nr. 136) $M(a^2 + k^2) = \int r^2 dm$ das Moment der Trägheit dieses selben Körpers in Beziehung auf die Rotationsachse CZ selbst.

Substituirt man endlich in die obige Gleichung (A) die hier gefundenen Werthe von x', u und $\int r^2 dm$; so erhält man für den vorliegenden Fall die Gleichung:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{ag \, Sin \, \omega}{a^2 + k^2},$$

und wenn man sie mit $2 d\omega$ multiplicirt und integrirt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2 + k^2} Cos \, \omega + C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C hat man für den Anfang der Bewegung im Puncte A, d. i. für $\omega = \alpha$ die Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt} = 0$, daher

$$C = -\frac{2ag}{a^2+k^2} Cos\,\alpha$$ und sonach allgemein:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2+k^2}(Cos\,\omega - Cos\,\alpha),$$

eine Gleichung, welche mit jener (m) in Nr. **129**, Anmerkung, für das einfache Pendel bis auf den constanten Factor $\frac{2ag}{a^2+k^2}$ (welcher für $k=0$ dem dortigen gleich wird) vollkommen übereinstimmt.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines *Körpers*.

(§. 197.)

132. Handelt es sich nicht bloss um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sei zuerst NS (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Grösse F, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in derselben Ebene liegenden Punct A oder um eine auf dieser Ebene in A perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w umdreht.

Betrachtet man bei dieser Umdrehung einen Punct M dieser Fläche, wofür die in derselben Ebene angenommenen rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = y$ sind und die entsprechende Fläche dF für die Masse dM und umgekehrt gesetzt werden kann; so erhält man für die Centrifugalkraft dR des materiellen Punctes dM (wenn man nämlich diese Kraft für die ganze Fläche oder Masse mit R bezeichnet) nach Nr. **130**: $dR = \frac{dF.z^2w^2}{z} = zw^2 dF$, wenn man nämlich den Abstand $AM = z$ setzt.

Zerlegt man diese nach AM wirksame Kraft in zwei nach den rechtwinkeligen Achsen AX, AY wirkende Seitenkräfte dP und dQ, so wird $dP = dR.\frac{x}{z}$ und $dQ = dR.\frac{y}{z}$, oder:

$$dP = w^2 x\,dF \text{ und } dQ = w^2 y\,dF;$$

diese Gleichungen integrirt geben:

$$P = w^2 \int x\,dF \text{ und } Q = w^2 \int y\,dF,$$

oder wenn X und Y die Coordinaten des Schwerpunctes dieser Fläche F sind (man sehe die Relationen II. in Nr. **25**):

$$P = w^2 XF \text{ und } Q = w^2 YF.$$

Da nun R die Mittelkraft aus diesen beiden Seitenkräften sein soll, so folgt, wenn man auch gleich die Masse M statt der Fläche F setzt:

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = w^2 M \sqrt{(X^2 + Y^2)} = w^2 M r, \ldots (\alpha)$$

wenn man nämlich den Abstand des Schwerpunctes O dieser Fläche oder Masse von A d. i. $AO = r$ setzt; es ist also die gesuchte Centrifugalkraft für diese Fläche, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist:

$$R = \frac{M(rw)^2}{r} = \frac{Mv^2}{r},$$

wenn man nämlich die Geschwindigkeit des Schwerpunctes $rw = v$ setzt. Diese nach AO wirksame Centrifugalkraft ist also ebenso gross, als ob die gesammte Masse M im Schwerpuncte dieser Fläche NS vereinigt und die Kraft selbst in diesem Puncte O wirksam wäre.

133. Dreht sich ein Körper MN (Fig. 30) um die Gerade AB als Achse, so theile man denselben in unendlich dünne parallele Schichten, welche auf der Achse AB perpendikulär stehen; dann erhält man nach der vorigen Nr. ebenso viele, in den Schwerpuncten $o, o', o'' \ldots$ dieser Schichten perpendikulär auf die Umdrehungsachse AB wirksame Centrifugalkräfte, wovon jede (Gleichung α) dem Producte aus der Masse der betreffenden Schichte in den Abstand ao ihres Schwerpunctes o von AB und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gleich ist. Da aber diese Kräfte im Allgemeinen nicht zu einander parallel sein (d. i. nicht in einer einzigen durch AB gehenden Ebene liegen) werden, so können diese nach Umständen eine einzige Resultirende haben, oder sich auf ein Kräftepaar (§. 21) oder auf eine Resultirende gleich Null reduciren, in welch letzterem Falle diese Kräfte auf die Umdrehungsachse AB keinerlei Druck oder Zug ausüben.

134. Liegen dagegen die sämmtlichen Schwerpuncte $o, o' \ldots$ dieser dünnen Schichten in einer einzigen Geraden DE, welche mit der Umdrehungsachse AB parallel läuft, und von ihr den Abstand r besitzt; so haben auch alle die einzelnen Schwerpuncte einerlei Abstände von dieser Achse und zwar ebenfalls $= r$. Die einzelnen Centrifugalkräfte werden untereinander parallel und liegen sämmtlich in der durch DE und AB gedachten Ebene, so dass demnach ihre Resultirende, indem die einzelnen Kräfte den Massen, also auch den Gewichten der betreffenden Schichten proportional sind, durch den Schwerpunct des ganzen Körpers MN geht und ihre Grösse gleich der Summe dieser parallelen Kräfte, d. i. $R = mrw^2 + m'rw^2 + \ldots = (m + m' + \ldots)rw^2$ ist, wenn nämlich m, m', m''.. die Massen der einzelnen Schichten und w die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Achse AB bezeichnen; setzt man daher $m + m' + m'' + \ldots = M$ als Masse des ganzen Körpers, so ist dessen Centrifugalkraft:

$$R = Mrw^2 = \frac{Mv^2}{r} \text{ (für } v = rw)$$

genau ebenso gross und wirkt auf dieselbe Weise, als ob die gesammte Masse des Körpers in dessen Schwerpunct vereinigt wäre.

Anmerkung 1. Dieser hier erwähnte einfache Fall findet namentlich bei der Kugel, dem Cylinder, geraden Prisma, Kegel und überhaupt allen Rotationskörpern statt, bei welchen die Achse mit der Umdrehungsachse parallel ist. Da für $r = 0$ auch $R = 0$ wird, so folgt, dass wenn in diesen genannten Fällen die Achse des Körpers zugleich die Rotationsachse ist, diese letztere keinen Druck oder Zug durch die Centrifugalkraft erleide.

Ist bei einer Kugel, welche sich während der Zeit t einmal um ihre Achse dreht, r der Abstand irgend eines Punctes, dessen Masse $= 1$ ist, von dieser Achse, so ist dessen Geschwindigkeit $= \frac{2r\pi}{t}$ und Centrifugalkraft $= \frac{4r^2\pi^2}{rt^2} = \frac{4r\pi^2}{t^2}$, nämlich seinem Abstande von der Achse proportional.

Da unterm Aequator unserer Erde die Schwere und Centrifugalkraft einander gerade entgegen wirken, so hat dort die Schwere einen Werth, welcher jenem gleich wäre, wenn die Rotation der Erde nicht bestünde, vermindert um die Centrifugalkraft. Abstrahirt man von den geringen Veränderungen der Schwere in den verschiedenen Breiten, so kann man diese unterm Aequator $= g$ setzen, und wenn man ihre Intensität, in der Voraussetzung, dass keine Achsendrehung der Erde stattfände, durch G bezeichnet, so ist nach dem Vorigen:

$$g = G - \frac{4r\pi^2}{t^2}.$$

Da nun aber für den Aequator in runder Zahl $2r\pi = 40000000$ Meter und $t = 86164$ Secunden beträgt*), so ist wegen $g = 9{\cdot}808$ M. sehr nahe

*) Der Sterntag ist nämlich in Sonnenzeit ausgedrückt um 236 (genauer 235·90867) Sec. kürzer als der mittlere Sonnentag. Ferner ist nach Bessel der Aequatorradius = 6377399, sowie der Polarradius = 6356080 Meter, der mittlere Erdhalbmesser kann zu 6366739 Meter angenommen werden.

$$\frac{4r\pi^2}{gt^2} = \frac{1}{289}, \text{ folglich:}$$

$$g = G - \frac{g}{289}, \text{ oder auch nahe } g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right),$$

so dass also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dass wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal grösser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null sein würde.

Anmerkung 2. Nimmt man auf die allmähliche Abnahme der Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin, sowie auch auf die Abplattung der Erde selbst Rücksicht, so kann man, wenn g' die Intensität oder Beschleunigung der Schwere in dem Parallelkreis von der Breite von 45" bezeichnet, sofort für jeden Ort der Erde, für welchen die geographische Breite $= \varphi^0$ ist, sehr nahe

$$g = g'(1 - \cdot 002588 \, Cos \, 2\varphi)$$

setzen. So ist z. B. im Metermass $g' = 9{\cdot}80558$, folglich für Paris wegen $\varphi = 48^0 \, 50' \, 14''$ nach dieser Formel:

$$g = 9{\cdot}80558 \times 1{\cdot}0003456 = 9{\cdot}80896 \text{ Meter.}$$

Auf den Wiener Fuss bezogen, kann man $g' = 31{\cdot}0203$ setzen; folglich ist für Wien, wegen $\varphi = 48^0 \, 12' \, 36''$ die Beschleunigung der Schwere:

$$g = 31{\cdot}0203 \times 1{\cdot}00028938 = 31{\cdot}02927 \text{ Fuss.}$$

Nach den von Pouillet im J. 1854 aus den Gesammt-Beobachtungen zusammengestellten wahrscheinlichsten Werthen wäre für das Metermass:

$$g = 9{\cdot}806055 \, (1 - \cdot 00255237 \, Cos \, 2\varphi).$$

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 200.)

135. Schwingt oder rotirt ein materieller Punct von der Masse m in Folge der Einwirkung einer Kraft mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um irgend eine Achse, von welcher er die Entfernung r besitzt, so wird (§. 200) das Product mr^2, aus der Masse in das Quadrat des Abstandes derselben von der Drehungsachse das Moment der Trägheit dieser Masse genannt. Soll eine andere Masse M, welche in der Entfernung $= 1$ von der Drehungsachse angebracht ist, durch dieselbe oder eine gleich grosse Kraft ebenso bewegt werden, d. i. die nämliche Winkelgeschwindigkeit wie die erstere Masse m im Abstande r erhalten, so muss [§. 200, Gleich. (1)] diese Masse $M \times 1^2 = mr^2$, d. i. $M = mr^2$ sein, so dass also auch diese letztere Masse M als Mass für das Moment der Trägheit der im Abstande r befindlichen Masse m gelten kann*).

Dehnt man diese in Beziehung auf einen materiellen Punct gegebene Definition auf einen Körper von was immer für Dimensionen aus, so versteht man unter dem Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf irgend eine Gerade als Umdrehungsachse, die Summe der Producte der Massen aller einzelnen Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von dieser Geraden. Bezieht man die Lage des Körpers, dessen Masse $= M$

*) Nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise setzt jede Masse der bewegenden Kraft einen Widerstand entgegen, der um so grösser ist, je grösser die Masse, oder je grösser die Geschwindigkeit ist, welche die Masse erlangen soll, und in diesem Sinne sagt man auch, dass die im Abstande 1 von der Drehachse angebrachte Masse $M = mr^2$ der drehenden Bewegung denselben Widerstand wie die Masse m im Abstande r entgegensetze. Allein wir wiederholen hier, dass diese Art sich kurz auszudrücken, wobei man sich offenbar von dem Gefühle, welches mit jeder Kraftanstrengung verbunden ist und nur zu leicht mit der Empfindung eines dadurch hervorgerufenen Widerstandes von Seite der zu bewegenden Masse verwechselt wird, keinesweges zu dem falschen Begriff verleiten lassen darf, als ob sich die Masse als etwas Selbstthätiges der Bewegung nur mit einem gewissen Widerstreben füge und sonach in der That einen gewissen Widerstand leiste. Decher gebraucht aus diesem Grunde anstatt der Benennung: Moment der Trägheit, weit zweckmässiger jene: Moment der Massen. Wir behalten die erstere als die allgemein übliche bei, ohne nach den gegebenen Erklärungen und Bemerkungen eine Begriffsverwirrung zu besorgen. (M. s. 15. in Nr. **131**.)

Mit Benützung der lebendigen Kräfte oder Arbeitsgrössen (§. 227) lässt sich die hier erwähnte Fundamentalgleichung (1) in §. 200 auch von einem anderen Gesichtspuncte aus, und zwar in folgender Weise entwickeln.

Schwingen zwei in den Puncten B, B' einer Geraden AD befindlichen materiellen Puncte von den Massen M und M' um einen Punct A dieser Geraden und erlangen sie, während diese Gerade den Winkel DAD' beschreibt, die Geschwindigkeiten v und v', so sind die zur Erzeugung dieser Geschwindigkeiten nöthigen Arbeitsgrössen, wenn nämlich diese Massen nicht gleichzeitig, sondern jede für sich schwingt, beziehungsweise $\frac{1}{2}Mv^2$ und $\frac{1}{2}M'v'^2$. Sollen nun diese Arbeitsgrössen einander gleich, d. i. sollen in dieser Beziehung diese beiden Massen M und M' in den Entfernungen vom Drehungspunct $AB = a$ und $AB' = a'$ einander gleichgeltend oder äquivalent sein, so muss die Gleichung $Mv^2 = M'v'^2$ oder wegen $v : v' = a : a'$ (da die beiden Massen einerlei Winkelgeschwindigkeiten haben, d. i. $\frac{v}{a} = \frac{v'}{a'}$ sein soll) jene $Ma^2 = M'a'^2$ stattfinden, welches eben die erwähnte Fundamentalgleichung (1) in §. 200 ist.

sein soll, auf drei rechtwinkelige Achsen und nimmt die Umdrehungsachse für die Achse der z, so ist das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Achse:

$$\mathfrak{M} = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}M,$$

wobei $\mathrm{d}M$ die Masse des Elementes oder materiellen Punctes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und wobei sich das Integrale auf die gesammte Masse M erstreckt (es steht nämlich hier $\mathrm{d}M$ statt d^3M und $\int$ statt $\iiint$). Auf gleiche Weise bezeichnen die Ausdrücke:

$$\int (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}M \text{ und } \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}M$$

die Trägheitsmomente dieses Körpers in Beziehung auf die Achsen der y und x.

136. Kennt man das Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf irgend eine Achse, so kann man dasselbe leicht auch für jede andere, mit der ersteren parallele Achse finden.

Denn nimmt man die erstere Achse oder Gerade zur Achse der z und legt durch diese und die mit ihr parallele Gerade oder neue Achse die Ebene der xz, setzt den Abstand dieser beiden Geraden $= a$, die Masse des Körpers $= M$ und bezeichnet das Moment der Trägheit desselben in Bezug auf die Achse der z durch $\mathfrak{M}$, sowie in Beziehung auf die neue, mit dieser parallelen Achse durch $\mathfrak{M}'$; so ist, wie leicht zu sehen:

$$\mathfrak{M}' = \int (x'^2 + y^2)\,\mathrm{d}M = \int [(x \pm a)^2 + y^2]\,\mathrm{d}M$$
$$= \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}M + a^2 \int \mathrm{d}M \pm 2a \int x\,\mathrm{d}M,$$

d. i.

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \pm 2a \int x\,\mathrm{d}M,$$

oder wenn X die Abscisse des Schwerpunctes des Körpers bezeichnet, also (Nr. **32**) $XM = \int x\,\mathrm{d}M$ ist, auch

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \pm 2aXM.$$

Liegt der Schwerpunct in der Achse der z selbt, so ist $X = 0$ und

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 \ldots (1),$$

oder, wenn man, da das Moment der Trägheit immer diese Form annimmt, $\mathfrak{M} = Mk^2$ setzt, auch:

$$\mathfrak{M}' = M(k^2 + a^2) \ldots (2)$$

(vergleiche §. 202, Gleich. 1).

Anmerkung. Hieraus folgt, dass das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse kleiner, als in Beziehung auf jede andere mit ihr parallele Achse ist.

137. Um das Moment der Trägheit einer materiellen geraden Linie AB (Fig. 32) zu finden, welche sich um den Endpunct A dreht, sei ihre Länge $AB = l$, die auf die Längeneinheit entfallende träge Masse $= m$, sowie die über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Masse $m l = M$. Nimmt man nun in dieser Geraden in dem Abstande $AM = x$ ein Element derselben $Mm = \mathrm{d}x$, so kann man das dieser Länge entsprechende Massenelement $m\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}M$ als materiellen Punct betrachten und darauf die Grundgleichung (2) in §. 200 anwenden, so dass, wenn das Moment der Trägheit dieses Elementes durch $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ bezeichnet wird, sofort $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \mathrm{d}M . x^2 = m x^2 \mathrm{d}x$, folglich $\mathfrak{M} = m\int_0^l x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} m l^3$ ist. Da man jedoch in alle Ausdrücke des Trägheitsmomentes die sich drehenden Massen hineinzubringen pflegt, und hier $M = m l$ ist, so hat man auch für das gesuchte Trägheitsmoment den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M l^2.$$

138. Um das Moment der Trägheit eines Rechteckes AD (Fig. 33) zu finden, welches sich um ihren Mittel- oder Schwerpunct O oder eine durch O gehende auf der Ebene des Rechteckes perpendikuläre Achse dreht und dessen Masse $= M$ sein soll, setze man die beiden Seiten $AB = a$, $BD = b$ und ziehe damit parallel durch den Punct O die Coordinatenachsen der x und y. Zieht man mit dieser letzteren parallel in den Abständen $OP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ die beiden Geraden von der Länge BD, so schliessen diese ein Rechteck $b\,\mathrm{d}x$ ein, welches ein Element des Rechteckes, also auch dessen Masse M bildet, so dass, wenn die auf die Flächeneinheit dieses Rechteckes entfallende Masse wieder durch m bezeichnet wird, sofort $\mathrm{d}M = m b\,\mathrm{d}x$ ist. Schneidet man aber auf diesem unendlich schmalen Streifen, indem man in den Abständen $PM = y$ und $Mm = \mathrm{d}y$ mit der Achse der x zwei Parallele zieht, selbst wieder ein Element ab, so bildet dieses neue Rechteck $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ das Differenzial der vorigen Fläche, also $m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ das Differenzial der vorigen Masse $\mathrm{d}M$, oder es ist $\mathrm{d}^2M = m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Da nun aber dieses Element als ein materieller Punct zu betrachten ist, welcher vom Drehungspuncte den Abstand OM hat, wofür $OM^2 = x^2 + y^2$ ist; so hat man nach dem ersten Satze [§. 200, Gleich. (2)] für dessen Moment der Trägheit, welches, wenn man jenes des Rechteckes AD mit $\mathfrak{M}$, folglich jenes des Rechteckes EF mit $\mathrm{d}\mathfrak{M}$

bezeichnet, durch $d(d\mathfrak{M}) = d^2\mathfrak{M}$ ausgedrückt werden muss, sofort $d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy$. Wird dieser Ausdruck zweimal, und zwar, da x und y von einander unabhängig sind, einmal nach y (wobei x als constant) und einmal nach x (wobei y als constant zu nehmen ist) beziehungsweise innerhalb der Grenzen von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$ und $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$, oder einfacher von 0 bis $\frac{1}{2}b$ und 0 bis $\frac{1}{2}a$ integrirt und im letzteren Falle jedes Integrale 2 mal genommen, so erhält man, da die Ordnung der Integration (Comp. §. 852) willkürlich ist:

$$\mathfrak{M} = 4m \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^{\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\, dy,$$

durch die Ausführung dieser Integration erhält man zuerst:

$$\mathfrak{M} = 4m \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \left(\tfrac{1}{2}b x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{8} b^3\right) = 2bm \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \left(x^2 + \tfrac{1}{12} b^2\right),$$

ferner $\mathfrak{M} = 2bm\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{12}b^2\right) = mab\left(\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{12}b^2\right)$,
oder da $mab = M$ ist, auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

[vergl. §. 204, Gleich. (1)].

Anmerkung 1. Dass dieselbe Formel zugleich auch für das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelopipedes gilt, das sich um seine geometrische Achse dreht und für welches das vorige Rechteck AD einen auf dieser durch O gehenden Achse senkrechten Querschnitt bezeichnet, wenn man dabei nur unter dem Factor M die Masse des Parallelopipedes versteht, ist bereits in der Anmerkung zu §. 204 erwähnt. Ist nämlich l die Länge oder Höhe des Parallelopipedes und nimmt man die Umdrehungsachse zur Achse der z, so ist, wenn man ausser den vorigen mit den Achsen der x und y parallel geführten Schnitten (hier Ebenen, welche mit jenen der xz und yz parallel sind), auch noch mit der Ebene der xy (wofür man die untere Grundfläche AD des Körpers nehmen kann) in den Abständen z und $z + dz$ parallele Schnitte führt und dadurch das Körperelement $d^3M = dx\, dy\, dz$, ferner damit

$d^3\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy\, dz$, also nach Obigem:

$$\mathfrak{M} = m \int_0^l dz \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\, dy = \frac{mab}{12} \int_0^l (a^2 + b^2)\, dz = \frac{1}{12} mabl(a^2 + b^2),$$

oder wegen $mabl = M$ sofort wieder $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$.

Noch einfacher ist die Ableitung für den Fall, dass sich das rechtwinkelige Parallelopiped, dessen drei zusammenstossende Seiten a, b, c und Masse der cubischen Einheit $= m$ sein soll, um die eine Seite oder Kante z. B. um jene c dreht.

Nimmt man nämlich diese drei genannten Seiten für die Achsen der x, y, z, theilt jede dieser Seiten in unendlich viele unendlich kleine Theile und legt durch alle Theilungspuncte Ebenen, welche mit den Seitenflächen des Parallelopipedes parallel laufen (jene durch die in der Kante c liegenden Puncte gelegten Ebenen nämlich parallel mit der Seitenfläche ab oder Ebene der xy u. s. w.), so theilen diese drei Reihen von Ebenen das Parallelopiped in lauter unendlich kleine Theile, wovon jener, welcher den Coordinaten x, y, z entspricht, das Volumen $dx\,dy\,dz$, also die Masse $m\,dx\,dy\,dz$ hat, so dass, wenn M die Masse des Parallelopipedes bezeichnet, sofort $d^3M = m\,dx\,dy\,dz$ ist. Das Moment der Trägheit dieses Körpers ist daher in Beziehung auf jene Kante, welche man zur Achse der z genommen hat:

$$\mathfrak{M} = m\iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = m\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c (x^2+y^2)\,dz = \tfrac{1}{3}mabc(a^2+b^2),$$

oder wegen $mabc = M$, auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$.

Anmerkung 2. Nimmt man den Umdrehungspunct A für das Rechteck BE (Fig. 34) oder Umdrehungsachse für das rechtwinkelige Parallelopiped von den Grundflächen BE ausserhalb an, und setzt auf zwei mit BC und BD parallele Achsen AX, AY bezogen, die Abscissen $AP = a$, $AP' = a'$ und Ordinaten $AQ = b$, $AQ' = b'$, wodurch die beiden Seiten $BC = a'-a$ $BD = b'-b$ werden; so erhält man nach dem Satze in Nr. **136**. [Gleich. (1)] für das Moment der Trägheit auf diesen Punct A, d. i. einer mit der durch den Schwerpunct O gehenden parallelen Achse bezogen, wegen

$$AO^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+b'}{2}\right)^2 \text{ sofort:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}M[(a'-a)^2+(b'-b)^2] + \tfrac{1}{4}M[(a+a')^2+(b+b')^2],$$

oder wenn man entwickelt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2+a'^2+b'^2+aa'+bb').$$

139. Um das Moment der Trägheit eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC (Fig. 35) zu finden, welches sich um eine durch den Winkelpunct A (des rechten Winkels) auf der Ebene ABC perpendikulären Achse umdreht, seien die beiden Catheten $AB = a$ und $AC = b$. Zieht man in dem Abstande $AP = x$ mit AC parallel die Ordinate $PN = y'$ und nimmt darauf in den Abstand $PM = y$ den Punct M, lässt x um dx und y um dy zunehmen, um das Flächenelement $dx\,dy$ oder Massenelement $m\,dx\,dy$ zu erhalten, welches vom Punct A den Abstand AM besitzt, wofür $AM^2 = x^2+y^2$; so hat man wieder wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2+y^2)\,m\,dx\,dy, \text{ oder } \mathfrak{M} = m\int_0^a dx\int_0^{y'}(x^2+y^2)\,dy,$$

wobei jedoch y' von x abhängig und zwar wegen $a:b = (a-x):y'$ sofort $y' = \frac{b}{a}(a-x)$ ist. Führt man die Integration aus, so erhält man zuerst:

$$\mathfrak{M} = m\int_0^a dx\,(x^2y' + \tfrac{1}{3}y'^3)$$

und wenn man für y' den Werth setzt, integrirt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \frac{mab}{12}(a^2 + b^2), \text{ oder wegen } M = \tfrac{1}{2} mab \text{ auch:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M(a^2 + b^2)$$

(vergl. §. 205, Gleich. 1).

140. Zur Bestimmung des Momentes der Trägheit eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC (Fig. 36), welches sich um eine durch den der Basis gegenüberliegenden Winkelpunct C gehende, auf der Dreieckebene perpendikuläre Achse dreht (oder eines senkrechten Prisma, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat), sei die Basis $AB = 2a$ und das auf dieselbe aus C gefällte Perpendikel $CD = h$. Nimmt man auf diesem $CP = x$ und zieht durch den Punct P mit AB die Parallele $NN' = 2y'$, ferner auf dieser $PM = y$ und lässt wieder x um dx und y um dy zunehmen, um durch die diesen Puncten entsprechenden, mit AB und CD Parallelen, das Massenelement $m\,dx\,dy$ zu erhalten, welches dem d^2M entspricht; so hat man wieder genau wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\, m\, dx\, dy, \text{ oder } \mathfrak{M} = m\int_0^h dx \int_{-y'}^{+y'} (x^2 + y^2)\, dy$$

$$= 2m\int_0^h dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\, dy = 2m\int_0^h dx\,(x^2y' + \tfrac{1}{3}y'^3),$$

oder wegen $y' = \frac{a}{h}x$ (aus $x : y' = h : a$) auch:

$$\mathfrak{M} = 2m\int_0^h \frac{a}{h} dx\left(x^3 + \frac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}x^3\right) = \frac{2ma}{h}\left(\frac{h^4}{4} + \frac{a^2h^2}{12}\right) = \tfrac{1}{6} mah(a^2 + 3h^2),$$

oder endlich wegen $mah = M$ auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M(a^2 + 3h^2).$$

Will man die Seite $AC = BC = d$ hineinbringen, so ist wegen $a^2 = d^2 - h^2$ auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{6} M(d^2 + 2h^2) = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$ (vergl. §. 206.) Dreht sich ein gleichseitiges Dreieck von den Seiten $2a$ um dessen Schwerpunct, so findet man $M = \frac{1}{3} Ma^2$.

141. Um das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis zu bestimmen, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, sei AB (Fig. 37) eine unendlich dünne, auf der Achse senkrechte Schichte des Cylinders, dabei dessen Halbmesser $CA = r$, Länge $= l$ und Masse $= M$. Zieht man in dieser Kreisfläche (oder eigentlich unendlich dünnen Kreisscheibe) von der Masse $m' = dM$ mit den Halbmessern $CP = x$

und $Cp = x + \mathrm{d}x$ aus dem Mittelpuncte C die concentrischen Kreise, so schliessen diese ein unendlich schmales Kreisband ein, dessen Fläche $= (x + \mathrm{d}x)^2\pi - x^2\pi = 2x\pi\,\mathrm{d}x + \pi\,\mathrm{d}x^2 = 2x\pi\,\mathrm{d}x$ (also ebenso gross wie das Rechteck von der Basis des Umfanges $2x\pi$ und der Höhe $\mathrm{d}x$) und Masse $\mathrm{d}m' = 2\pi m x\,\mathrm{d}x$ ist. Ist μ das Moment der Trägheit dieser Schichte AB, also $\mathrm{d}\mu$ jenes des schmalen Kreisbandes, so ist nach der Grundformel:

$$\mathrm{d}\mu = 2\pi m x\,\mathrm{d}x \,.\, x^2 = 2\pi m x^3\,\mathrm{d}x,$$

folglich: $\mu = 2\pi m \int_0^r x^3\mathrm{d}x = 2\pi m \,.\, \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} m r^2\pi \,.\, r^2 = \frac{1}{2} m' r^2$, weil die Masse $m' = m r^2 \pi$ ist. Besteht nun aber der Cylinder aus n solchen Schichten (wobei n unendlich gross), so ist auch wegen $n\mu = \frac{1}{2} n m' r^2$, und $n\mu = \mathfrak{M}$, sowie $n m' = M$ sofort das Moment der Trägheit des Cylinders: $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$ (welcher Ausdruck sich nämlich wieder in nichts von jenem $\mu = \frac{1}{2} m' r^2$ der Kreisfläche, als in der Bedeutung der Factoren M und m' unterscheidet).

Oder es ist, wenn $\mathrm{d}z$ die Dicke dieser Schichte oder des Cylinderelementes bezeichnet, auf den Cylinder bezogen $\mu = \mathrm{d}\mathfrak{M}$ und $m' = m r^2 \pi\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}M$, folglich $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \frac{1}{2} m r^4 \pi\,\mathrm{d}z$ und daraus:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} m r^4 \pi \int_0^l \mathrm{d}z = \tfrac{1}{2} m r^2 \pi l \,.\, r^2 = \tfrac{1}{2} M r^2.$$

Oder noch einfacher für $m' = \mathrm{d}M$ sofort $\mathrm{d}\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^2\,\mathrm{d}M$, also $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$. [Vergl. §. 208, Gleich. (1).]

142. Ist der Cylinder **hohl** und sind R und r der äussere und innere Halbmesser desselben, so darf man das obige Integral nur anstatt von 0 bis r hier von r bis R nehmen; dadurch erhält man: $\mu = 2\pi m \int_r^R x^3\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{4} m (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} m (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$, oder da man $m(R^2 - r^2)\pi$ für die Masse m' der unendlich dünnen Schichte nehmen kann, auch $\mu = \frac{1}{2} m' (R^2 + r^2)$. Ist wieder $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, sowie M dessen Masse, so ist nach dem Vorigen ebenso:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

[§. 209, Gleich. (2)].

Anmerkung. Setzt man für einen Radkranz die Breite des Kranzes (in der Richtung des Radhalbmessers $= a$ und dessen Dicke (in der Richtung der Achse) $= b$, sowie den mittleren Radhalbmesser $= R'$, so ist $R = R' + \frac{a}{2}$

und $r = R' - \frac{a}{2}$, mithin $R^2 + r^2 = 2\left(R'^2 + \frac{a^2}{4}\right)$ und $R^2 - r^2 = 2aR'$. Substituirt man diese Werthe in der obigen Formel $\mathfrak{M} = \frac{b\pi}{2}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$, so erhält man nach einer einfachen Reduction für das Moment der Trägheit des Radkranzes:

$$\mathfrak{M} = 2R'ab\pi\left(R'^2 + \frac{a^2}{4}\right),$$

oder wenn, wie es z. B. bei allen Schwungrädern der Fall, $a < \frac{1}{5}R'$, also $\frac{a^2}{4} < \frac{R'^2}{100}$ ist, für die Anwendung hinreichend genau:

$$\mathfrak{M} = 2\pi abR'^3 = MR'^2 \ldots (\alpha),$$

wenn nämlich M die Masse des Radkranzes bezeichnet.

143. Um sogleich allgemein das Moment der Trägheit für alle durch Rotation erzeugte Körper zu bestimmen, drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 38) den beiden rechtwinkeligen Ordinaten QN, $Q'N'$ und der Abscisse QQ' begrenzte Ebene QN' um die Abscissenachse AX; so entsteht ein Körper, dessen Masse wir mit M bezeichnen, und für welchen wir das Moment der Trägheit $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf diese Achse AX bestimmen wollen.

Setzt man $AQ = a$, $AQ' = a'$ und zieht zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die Ordinaten PM und pm, nimmt auf diesen $Pn = y$, $nn' = \mathrm{d}y$ und zieht durch n und n' mit der Abscissenachse die Parallelen, so erhält man das Flächenelement $nr = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, welches bei seiner Umdrehung um AX einen Körper, d. i. einen Kreisring erzeugt, welcher $= 2y\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ist und sofort das zweite Differenzial des Volumens, also, wenn man diesen Ausdruck mit der Masseneinheit m multiplicirt, das zweite Differenziale der Masse des Körpers bildet, so dass also $\mathrm{d}^2M = 2\pi my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist. Für dieses Massenelement ist aber das Moment der Trägheit $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = y^2\mathrm{d}^2M = 2\pi my^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, und wenn man zweimal integrirt und die von x abhängige Ordinate $PM = y'$ setzt:

$$\mathfrak{M} = 2\pi m\int_a^{a'}\mathrm{d}x\int_0^{y'}y^3\mathrm{d}y = 2\pi m\int_a^{a'}\tfrac{1}{4}y'^4\mathrm{d}x, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int_a^{a'}y'^4\mathrm{d}x \ldots (\alpha),$$

wobei diese zweite Integration erst dann ausgeführt werden kann, wenn die Natur der Curve NN', d. i. ihre Gleichung $y' = f(x)$ bekannt ist.

Beispiele.

144. Dreht sich anstatt der Curve eine mit AX parallele Gerade, welche von AX den Abstand r hat, um diese Achse, und setzt man $a=0$, $a'=l$ gleich der Länge des dadurch erzeugten Cylinders, so wird wegen $y'=r$ sofort:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int_0^l r^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}mr^2\pi l.r^2 = \tfrac{1}{2}Mr^2$$

(vergl. Nr. **141**).

145. Geht die Gerade AB (Fig. 39) durch den Ursprung und ist $CB=r$ der Halbmesser und $AC=h$ die Höhe des erzeugten geraden Kegels, so ist wegen $x:y'=h:r$ sofort $y'=\frac{r}{h}x$, folglich:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int_0^h \frac{r^4}{h^4}x^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi m\frac{r^4}{h^4}\cdot\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}mr^4\pi h,$$

oder wegen $M=\frac{1}{3}mr^2\pi h$ auch $\mathfrak{M}=\frac{3}{10}Mr^2$.

146. Ist die Curve eine Ellipse von den Halbachsen a und b, welche sich um die grosse Achse $2a$ umdreht, so erhält man wegen $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ (die Abscissen vom Mittelpunct aus gezählt, Comp. §. 465) für das Moment der Trägheit des elliptischen Sphäroides (nach der obigen Formel (α) in **143.**):

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int_{-a}^{+a}\frac{b^4}{a^4}\mathrm{d}x(a^2-x^2)^2 = 2.\tfrac{1}{2}\pi m\frac{b^4}{a^4}\int_0^a \mathrm{d}x(a^4-2a^2x^2+x^4)$$

$$= m\pi\frac{b^4}{a^4}\left(a^5-\frac{2a^5}{3}+\frac{a^5}{5}\right) = \frac{8}{15}m\pi ab^4.$$

Nun ist aber das Volumen dieses Körpers (Comp. §. 889, 2.) gleich $\frac{4}{3}ab^2\pi$, folglich dessen Masse $M=\frac{4}{3}mab^2\pi$, also auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5}Mb^2.$$

147. Bei der Umdrehung der Ellipse um die kleine Achse wird ebenso, wenn wieder M die Masse des dadurch entstehenden Ellipsoides bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5}Ma^2.$$

148. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $a=b=r$ über, so hat man für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, aus beiden vorigen Formeln:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5}Mr^2$$

[vergl. §. 210, Gleich. (2)].

Ist die Curve eine Parabel und dreht sich diese um ihre geometrische Achse AC (Fig. 40), so wird, wenn man $AC = h$ und $CB = r$ setzt, wegen $y'^2 = px$ und (Comp. §. 889, 1.) $M = \frac{1}{2} m r^2 \pi h = \frac{1}{2} m \pi p h^2$ (wegen $r^2 = ph$), wenn h die Höhe des entstehenden Paraboloides ist:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} m \pi \int_0^h p^2 x^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} m \pi p^2 \frac{h^3}{3},$$

oder auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M p h = \tfrac{1}{3} M r^2.$$

149. Dreht sich die von dem Kreisbogen AN (Fig. 41) begrenzte Fläche ANB um die (in der Richtung des Durchmessers liegende) Achse AB, so entsteht ein Kugelsegment mit einer Grundfläche $NAN'B$ von der Höhe AB. Setzt man den Halbmesser des Kreises (gleich dem Kugelhalbmesser) $= r$, und $AB = a$ (gleich der Höhe des Kugelsegmentes), so folgt aus der Formel (α) in **143.** wegen $y'^2 = 2rx - x^2$:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi m \int_0^a \mathrm{d}x (2rx - x^2)^2 = \tfrac{1}{2} m a^3 \pi \left(\tfrac{4}{3} r^2 - ar + \tfrac{1}{5} a^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{30} m a^3 \pi (20 r^2 - 15 ar + 3a^2),$$

oder wenn M die Masse des Segmentes, also:

$$M = (\tfrac{1}{2} BN^2 \pi . a + \tfrac{1}{6} a^3 \pi) m = [\tfrac{1}{2} a \pi (2ra - a^2) + \tfrac{1}{6} a^3 \pi] m = m \frac{a^2 \pi}{3} (3r - a)$$

ist, auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{aM}{10(3r - a)} (20 r^2 - 15 ar + 3a^2) \ldots (c)$$

[vergl. §. 210, Gleich. (1)].

150. Besteht eine Pendellinse aus zwei solchen Kugelsegmenten, deren Grundflächen aufeinander liegen und sich decken, so ist ihr Moment der Trägheit in Bezug auf ihre geometrische Achse AB (Fig. 42) genau durch die vorige Formel (c) ausgedrückt, wenn M die Masse der Linse bedeutet. Bringt man statt dem Kugelhalbmesser r den Halbmesser $CN = \varrho$ der Grundflächen der beiden Segmente in diese Formel (c), so erhält man wegen $\varrho^2 = 2ra - a^2$ sofort $r = \frac{a^2 + \varrho^2}{2a}$ und damit nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{10} \left(\frac{a^4 + 5a^2 \varrho^2 + 10 \varrho^4}{a^2 + 3 \varrho^2} \right) \ldots . (d).$$

Anmerkung. Ist die Linse, wie gewöhnlich nach der Richtung NN' durchbohrt, um die cylindrische Pendelstange, welche in der Regel aus einem anderen Materiale als die Linse besteht, durchschieben zu können, so muss man von dem vorigen Werthe noch das Moment der Trägheit dieser Bohrung (den hohlen Cylinder als massiv gedacht) abziehen. (Man sehe Nr. **152.**, Anmerkung.)

151. Um endlich noch das Moment der Trägheit eines gewöhnlichen Cylinders zu finden, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct des Cylinders geht und auf dessen geometrischer Achse perpendikulär steht, nehme man die Achse des Cylinders für die Achse der z, den Ursprung A der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen im Schwerpunct des Cylinders, sowie die Umdrehungsachse für die Achse der y, so ist, wenn man den Cylinder in den Entfernungen von $AC = z$ (Fig. 43) und $z + \mathrm{d}z$ durch zwei Ebenen parallel mit der Ebene der xy durchschneidet, die unendlich dünne Kreisscheibe, welche dadurch entsteht, ein Element des Cylinders und $= \mathrm{d}M$, wenn M wieder die Masse des Cylinders, dessen Halbmesser $= r$ und Länge $= l$ sein soll, bezeichnet. Sind BB' und DD' die Durchschnitte der Ebenen der xz und yz mit dieser Kreisscheibe von der Dicke $\mathrm{d}z$ und legt man in den Entfernungen $CP = x$ und $x + \mathrm{d}x$ wieder zwei Ebenen und zwar parallel mit der Ebene der yz, so erhält man aus dieser Kreisscheibe als Element derselben das Parallelopiped von der Grundfläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ und Länge $mm' = 2y$, wenn man nämlich die der Abscisse $CP = x$ entsprechende Ordinate des Kreises $Pm' = Pm = y$ setzt. Da nun dieses Körperelement (gleichsam eine materielle gerade Linie) $\mathrm{d}^2M = 2my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ von der Umdrehungsachse YY' den Abstand u hat, wofür $u^2 = x^2 + z^2$ ist, so hat man, wenn $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, folglich $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ jenes der Kreisscheibe und endlich $\mathrm{d}^2\mathfrak{M}$ jenes des unendlich dünnen Prisma bezeichnet, nach der Grundformel sofort: $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = 2my\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,(x^2 + z^2)$, folglich wenn man zweimal innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt:

$$\mathfrak{M} = 2m\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\mathrm{d}z\int_{-r}^{+r} y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = 8m\int_0^{\frac{1}{2}l}\mathrm{d}z\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^r x^2\,\mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + z^2\int_0^r \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

und da (Lehrb. Bd. III S. 336, Beispiel 4)

$$\int x^2\,\mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4}\left(x^3 - \tfrac{1}{2}r^2x\right)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{8}r^4\,arc\,Sin\frac{x}{r},$$

ferner (S. 339) $\int \mathrm{d}x\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{2}r^2\,arc\,Sin\frac{x}{r}$,

so ist innerhalb der angezeigten Grenzen:

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{8}r^4.\frac{\pi}{2} + z^2.\tfrac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^2\pi}{4}z^2,$$

folglich wenn man diesen Werth für das zweite Integral substituirt:

$$\mathfrak{M} = 8m\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{r^2\pi}{4}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz = 2mr^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{r^2}{4}+z^2\right)dz$$

$$= 2mr^2\pi\left(\frac{r^2 l}{8}+\frac{l^3}{24}\right),$$

oder wegen $M = mr^2\pi l$ endlich:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2)\ldots(e).$$

152. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit [Nr. **136.**, Gleich. (1)]:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2+l^2) + M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2+4l^2),$$

oder auch: $$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **150.** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (d) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (e) wegen $l = NN' = 2\varrho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2+4\varrho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\varrho^2}{3}\right)$, so dass also das eigentliche Moment der Trägheit der in **150.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (d) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Grösse δ ab, so muss man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}'' + (M-M')\delta^2 = \mathfrak{M}'' + M''\delta^2,$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§§. 230—234.)

153. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit [§. 200, Gleich. (3)] auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, sowie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die

Kurbelwarze M hin- und herschiebt, um die Kurbel umzudrehen, so ist, wenn die Kurbelwarze nach M gekommen und dafür der Winkel $ACM = \alpha$ ist, die aus der Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte abgeleitete Tangentialkraft $p = P\, Sin\, \alpha$. Da aber diese veränderliche Kraft p, während die Warze um einen unendlich kleinen Bogen fortschreitet, d. i. α um $d\alpha$ zunimmt, als constant angesehen werden kann, so ist ihre Wirkung dw oder Arbeit während ihres Fortschreitens um $r\,d\alpha$, nach §. 213:

$$dw = p\,r\,d\alpha = P\,r\, Sin\,\alpha\, d\alpha.$$

Da aber während dieser Zeit die Last Q um den Weg $r\,d\alpha$ gehoben wird, so ist gleichzeitig ihre Wirkung, oder wenn man will die geleistete Arbeit:

$$dw' = Q\,r\,d\alpha,$$

und da der Ueberschuss dieser beiden Wirkungen $dw - dw'$ auf Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M verwendet wird, je nachdem $dw \gtrless dw'$, der letztere Fall aber immer in dem ersteren begriffen ist (und durch das Zeichen dieser Differenz ausgedrückt wird); so ist also, während die Kurbelwarze von dem Puncte M um einen unendlich kleinen Bogen fortgeht, die auf Beschleunigung der Masse M verwendete Arbeit:

$$dW = dw - dw' = P\,r\, Sin\,\alpha\, d\alpha - Q\,r\,d\alpha.$$

Aus dieser Differenzialgleichung folgt durch Integration ganz einfach: $W = r\,(P\, Sinv.\alpha - Q\,\alpha) \ldots (a)$,
wozu keine Constante kommt, weil für $\alpha = 0$ auch noch $W = 0$ ist.

154. Soll die Kurbel bei ihrer Bewegung in den Beharrungsstand kommen, d. h. eine gewisse Gleichförmigkeit erlangen, wodurch ihre mittlere Geschwindigkeit endlich constant wird, so muss zwischen der Kraft P und der Last Q ein bestimmtes Verhältniss stattfinden, welches wir ganz einfach aus der Betrachtung finden, dass die Warze im Beharrungsstande an den beiden Endpuncten irgend eines, z. B. des Durchmessers AA', einerlei Geschwindigkeit besitzen müsse, weil, wenn diese durch die Bewegung im oberen Halbkreise ABA' hervorgebracht, in $A' \gtrless A$ wäre, aus gleichem Grunde diese Geschwindigkeit durch die Bewegung im unteren Halbkreise $A'B'A$ erzeugt, in $A \gtrless A'$, dann wieder in $A' \gtrless A$ u. s. w., die Kurbelwarze also entweder fortwährend beschleunigt oder verzögert würde, was gegen die Voraussetzung des Beharrungsstandes ist. Da also, während die Kurbelwarze den Halbkreis ABA' zurücklegt, wobei der Weg der Kraft $= AA' = 2r$ und jener der Last $=$ Bog. $ABA' = r\pi$ ist, die Wirkung oder Arbeit von Seite der Kraft P jener der Last Q gleich sein muss (weil jeder Ueberschuss Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M, also auch der Kurbelwarze hervorbringt), so hat man:

$$P.2r = Q.r\pi \text{ und daraus } P:Q = \pi:2 \text{ oder } Q = \frac{2}{\pi}P \ldots (m).$$

Diese für den Beharrungsstand der Kurbelbewegung nothwendige Relation zwischen P und Q erhält man auch, wie es sein soll, aus der obigen Gleichung (a), wenn man in dieser gleichzeitig $\alpha = 180^0$ und $W = 0$ setzt.

Setzt man daher diesen Werth von Q aus der Gleichung (m) in die obige Gleichung (a), so erhält man für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse M:

$$W = rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \ldots (b).$$

155. Diese zur Beschleunigung, oder überhaupt zur Geschwindigkeitsänderung der Masse M nöthige Arbeit oder Wirkung W lässt sich aber auch nach §. 227 durch die sogenannte lebendige Kraft ausdrücken. Nimmt man nämlich an, dass die Kurbelwarze, sobald der Beharrungsstand eingetreten ist, im Puncte A (also auch in A') die constante Geschwindigkeit c, dagegen im Puncte M die veränderliche Geschwindigkeit v besitze, so ist, wenn h und z die Geschwindigkeitshöhen zu c und v bezeichnen (also $h = \frac{c^2}{2g}$, $z = \frac{v^2}{2g}$ ist) die nöthige Wirkung, um die Masse M, während die Kurbelwarze den Weg AM zurücklegt, von der Geschwindigkeit c auf jene v zu bringen (§. 227): $W = M(z - h)$; folglich ist, wenn man diesen Werth dem vorigen in (b) gleichsetzt: $M(z-h) = rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right)$, oder:

$$Mz = Mh + rP\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \ldots (c).$$

156. Da die Tangentialkraft $p = P\,Sin\,\alpha$ von Null (im Puncte A) bis P (im Puncte B) allmählich oder continuirlich zunimmt und vermöge der Relation (m) (in **154.**) $P > Q$ ist, so muss es zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ (welche Werthe den genannten beiden Puncten A und B entsprechen) einen Werth α' geben, wofür $p = P\,Sin\,\alpha' = Q$, d. h. wenn $ACD = \alpha'$ ist, so muss im Puncte D die Tangentialkraft p ebenso gross als die Last Q sein, und da es im oberen Halbkreise ABA' noch einen zweiten Punct D' von gleicher Beschaffenheit gibt (wofür nämlich W. $A'CD' = 180^0 - \alpha'$ ist), ferner im unteren Halbkreise $A'B'A$ zwei ähnliche Puncte E und E' vorkommen (wofür man nur $D'C$ und DC verlängern darf), so folgt, dass während die Kurbelwarze den Kurbelkreis einmal durchläuft, die auf Umdrehung wirklich verwendete Kraft, d. i. die Tangentialkraft p viermal und zwar in den Puncten D, D', E', E, der gerade entgegenwirkenden Last Q gleich, dagegen von E bis D und von D' bis E' kleiner, dann von D bis D' und von E' bis E grösser als diese Last Q ist; hieraus folgt aber ferner, dass die Bewegung der Kurbelwarze durch die Bögen ED und $D'E'$ gar nicht stattfinden könnte, wenn diess nicht auf Kosten der mit ihr oder dem Kurbelkreis verbundenen Masse M, welche durch den Ueberschuss der Kraft p über Q, durch die Bögen DD' und $E'E$ beschleunigt worden, geschähe, und wodurch jetzt die Masse verzögert wird. Betrachtet man daher, da sich im unteren Halbkreise dasselbe wiederholt, nur die Bewegung im oberen Halbkreise, so folgt, dass die Masse, also auch die Kurbelwarze, von A bis D verzögert, und von D bis D' beschleunigt wird, so dass in D die kleinste und in D' die grösste Geschwindigkeit eintritt. Diese bemerkenswerthen Puncte D und D' bestimmen sich aber aus der Gleichung $P\,Sin\,\alpha' = Q$, woraus: $Sin\,\alpha' = \frac{Q}{P} = \frac{2}{\pi}$ [wegen Relat. (m)] folgt, und wobei der spitze Winkel $\alpha' = ACD$ und der stumpfe $\alpha'' = 180^0 - \alpha' = ACD'$ ist.

Bestimmt man aber aus dieser Gleichung $Sin\,\alpha' = \frac{2}{\pi}$ den Winkel α', so findet man $\alpha' = 39^0\,32'\,25'' = $ W. ACD, folglich $\alpha'' = $ W. $ACD' = 180^0 - 39^0\,32'\,25'' = 140^0\,27'\,35''$.

Anmerkung 1. Diese beiden Winkel α' und α'', welche beziehungsweise der kleinsten und grössten Geschwindigkeit v der Kurbelwarze, folglich auch der kleinsten und grössten Geschwindigkeitshöhe z entsprechen, findet man auch ganz einfach aus der Gleichung (c) in **155.** nach den bekannten Regeln für das Maximum und Minimum. Denn es folgt daraus:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{rP}{M}\left(Sin\,\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = 0, \text{ oder } Sin\,\alpha = \frac{2}{\pi},$$

und zwar erhält man für α zwei Werthe, den einen $\alpha' < 90^0$ und den zweiten $\alpha'' = 180^0 - \alpha' > 90^0$.

Da der zweite Differentialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{rP}{M} Cos\, \alpha$, für den ersteren Werth oder $\alpha = \alpha'$ positiv, dagegen für $\alpha = \alpha''$ negativ wird, so folgt in der That wie vorhin, dass im 1sten Quadranten, und zwar für $\alpha' = 39^0 32' 25''$ das Minimum, und im 2ten Quadranten, für $\alpha'' = 180^0 - \alpha'$ das Maximum der Geschwindigkeit der Kurbel stattfindet.

Anmerkung 2. Schwieriger, und von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades abhängig, wird die Bestimmung dieser beiden Winkel, wenn man ausser der auf den Kurbelkreis reducirten Masse M auch noch annimmt, dass mit der Schubstange MP ebenfalls eine Masse verbunden ist; bezeichnet man diese nämlich mit M', so muss man, da die Geschwindigkeit der Kurbelwarze im Puncte M parallel mit dem Durchmesser AA' (welches die Geschwindigkeit der Masse M' ist) $v_1 = v\, Sin\, \alpha$, also die auf den Kurbelkreis reducirte Masse m wegen $mv^2 = M'v_1^2$ (§. 200, Anmerk.) $= M'\frac{v_1^2}{v^2} = M' Sin\, \alpha^2$ ist, im ersten Theil der Gleichung (c) in **155.** statt Mz setzen $(M + M' Sin\, \alpha^2) z$. (Eigentlich müsste auch im 2ten Theil $M + M' Sin\, \alpha$ statt M gesetzt werden, allein es hat dieses Glied keinen Einfluss auf diese Bestimmung.)

Uebrigens kann man in der Anwendung überall diese Masse M' (welche dahin wirkt, den Winkel α' zu vergrössern) unberücksichtigt und die bisherige einfachere Voraussetzung gelten lassen.

157. Bezeichnet man die in den Puncten D und D' stattfindende kleinste und grösste Geschwindigkeit der Kurbelwarze mit c' und c'', sowie die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen mit h' und h'', so erhält man aus der Gleichung (c) in **155.**:

$$Mh'' = Mh + rP\left(Sinv.\, \alpha'' - \frac{2\alpha''}{\pi}\right)$$

und

$$Mh' = Mh + rP\left(Sinv.\, \alpha' - \frac{2\alpha'}{\pi}\right),$$

folglich wenn man subtrahirt und statt *Sinv.* den Werth 1—*Cos.* setzt:

$$M(h'' - h') = rP\left[Cos\, \alpha' - Cos\, \alpha'' - \frac{2}{\pi}(\alpha'' - \alpha')\right],$$

oder wegen $Cos\, \alpha'' = Cos\, (180^0 - \alpha') = - Cos\, \alpha'$ und $\alpha'' = \pi - \alpha'$ auch

$$M(h'' - h') = 2rP\left(Cos\, \alpha' + \frac{2\alpha'}{\pi} - 1\right),$$

und wenn man für α' den oben gefundenen Werth von $39^0 32' 25''$ setzt, in $\frac{2\alpha'}{\pi}$ den Winkel in Bogenlänge ausdrückt und reducirt, auch $M(h'' - h') = \cdot 42103\, rP$, woraus sofort $M = \frac{\cdot 42103\, rP}{h'' - h'} = \frac{\cdot 84206\, rgP}{c''^2 - c'^2}$ folgt [vergl. §. 234, Gleich. (1)].

Von dem Stosse *unelastischer* Körper.

(§. 241.)

158. Sind m und m' die Massen zweier homogener unelastischer Kugeln, deren Mittelpuncte sich auf einer geraden Linie nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c' bewegen und wobei, wenn m' die vorausgehende Kugel, $c > c'$ ist, folglich durch das Einholen ein gerader centraler Stoss entsteht; so stelle man sich vor, dass durch das Auf- oder Gegeneinanderwirken dieser beiden Massen während des Stosses, in Folge welcher die vorausgehende Kugel beschleunigt und die nachfolgende verzögert wird, diess durch eine zwischen beide wirkende beschleunigende Kraft geschieht, die also beim Beginn des Stosses ihren grössten Werth, und in dem Augenblicke als der Stoss vollendet ist, beide Massen also einerlei Geschwindigkeit haben, Null ist. Hat nun diese variable Kraft nach Verlauf der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt, als der Stoss beginnt, den Werth p, so kann man diesen, wie bekannt, während des darauf folgenden Zeitelementes dt als constant ansehen und da, wenn die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln m, m' nach Verlauf dieser genannten Zeit t, v und v' sind, während dieser Zeit dt die Geschwindigkeit v' um dv' zu-, dagegen jene v um dv abnimmt; so hat man nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten oder verzögernden Bewegung [§. 176, Gleich. (1) und §. 186, Gleich. (2)] $dv' = \frac{p}{m'} g\, dt$ und $dv = -\frac{p}{m} g\, dt$, oder da p eine gewisse, wenn uns auch unbekannte Function der von 0 bis t' wachsenden Zeit t ist, wenn man nämlich annimmt, dass der Stoss in der Zeit t' [welche, wenn auch noch so klein, doch kein untheilbarer Augenblick ist*)] vollendet sei, also $p = \varphi(t)$ gesetzt werden kann, auch:

$$dv' = \frac{g}{m'} \varphi(t)\, dt \text{ und } dv = -\frac{g}{m} \varphi(t)\, dt.$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man $\int \varphi(t)\, dt = \varphi'(t)$ setzt, wo $\varphi'(t)$ eine neue, ebenfalls unbekannte Function von t ist:

$$v' = \frac{g}{m'} \varphi'(t) + C \text{ und } v = C' - \frac{g}{m} \varphi'(t).$$

---

*) Wie diese Zeitdauer wenigstens näherungsweise bestimmt werden kann, findet man in unserer Beispielsammlung.

Um die Constanten C und C' der Integrationen zu bestimmen, bemerke man, dass für $t=0$, was wir durch t_0 anzeigen wollen, sofort $v'=c'$ und $v=c$ sein muss; hieraus folgt daher:

$$C=c'-\frac{g}{m'}\varphi'(t_0) \text{ und } C'=c+\frac{g}{m}\varphi'(t_0),$$

so dass also, wenn man diese Werthe substituirt, die vorigen Ausdrücke übergehen in:

$$v'=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t)-\varphi'(t_0)] \text{ und}$$

$$v=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t)].$$

Ist nun C die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoss, welche also nach unserer Voraussetzung nach Verlauf der Zeit t' eintritt, so darf man in den vorigen Relationen nur $t=t'$ und $v=v'=C$ setzen und man erhält:

$$C=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t')-\varphi'(t_0)]$$

$$C=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t')],$$

oder auch $\quad m'C=m'c'+g\varphi'(t')-g\varphi'(t_0)$

und $\quad mC=mc+g\varphi'(t_0)-g\varphi'(t')$.

Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man endlich: $\quad (m+m')\,C=mc+m'c'$

und daraus: $\quad C=\frac{mc+m'c'}{m+m'}$

[vergl. §. 241, Gleich. (1)].

Anmerkung 1. Der in §. 243 gefundene Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoss unelastischer Körper entsteht und mit Beibehaltung der hier gewählten Bezeichnung durch $m(c-C)^2+m'(C-c')^2$, nämlich so ausgedrückt werden kann, dass man sagt, dieser Verlust sei der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche den Geschwindigkeitsänderungen beider Massen m und m' entspricht, bildet in der Wesenheit den Carnot'schen Lehrsatz. Im Augenblicke des Zusammenstosses zweier Körper setzt nämlich jeder derselben durch die in Thätigkeit kommenden Molecularkräfte dem anderen, und zwar während der Dauer des Stosses, also auch durch einen gewissen Weg einen Widerstand entgegen; es verrichten sonach diese Kräfte während dieser Dauer des Stosses eine wirkliche Arbeit, die sowohl in einer Verschiebung der sich berührenden Molecüle (wie auch die Formänderung der Körper zeigt) als in der Geschwindigkeitsänderung beider Körper besteht. Jene Arbeit (oder lebendige Kraft), welche nothwendig ist, um beide Körper nach dem Stosse zur Ruhe zu bringen, ist daher genau um jene Arbeit der Molecularkräfte, welche während des Stosses in beiden Körpern thätig waren, kleiner als diejenige Arbeit, welche nöthig gewesen wäre, um die Körper noch vor dem Stosse in Ruhe zu versetzen; und diese Eigenschaft wird eben durch den Carnot'schen Lehrsatz, welcher in der industriellen Mechanik und im Maschinenwesen häufig zur Anwendung kommt, ausgedrückt.

Bezieht man diesen Lehrsatz auf ein ganzes System von unelastischen Körpern, in welchem sich ein plötzlicher Stoss ereignet und setzt man die Geschwindigkeit eines Theilchens von der Masse m vor dem Stoss $= V$ und nach dem Stoss in derselben Richtung $= v$; so ist $V - v$ die durch den Stoss verlorene Geschwindigkeit oder überhaupt (da diese Differenz auch negativ sein kann) die dadurch herbeigeführte Geschwindigkeitsänderung, und $m(V-v)^2$ die dieser Geschwindigkeitsänderung entsprechende lebendige Kraft. Nimmt man nun diese lebendige Kraft für alle Theilchen des Systemes, so ist nach diesem Lehrsatze der Verlust an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Stoss erlitten hat, gleich

$$\Sigma m (V-v)^2 \ldots . (1).$$

Aendert aber irgend ein Massentheilchen m nicht bloss, wie es hier vorausgesetzt wurde, seine Geschwindigkeit, sondern überdiess noch nach dem Stosse seine Richtung, so seien X, Y, Z die durch Zerlegung der Geschwindigkeit V nach den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen entstehenden Seitengeschwindigkeiten dieses Theilchens m vor, sowie x, y, z jene nach dem Stosse; so ist der durch den Stoss herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft gleich

$$\Sigma m [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2] \ldots (2).$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit V vor dem Stosse, und α', β', γ' jene, welche die Richtung der Geschwindigkeit v nach dem Stosse mit den Achsen der x, y, z bilden, sowie φ der Winkel dieser beiden Richtungen gegeneinander; so ist wegen $X = V Cos\, \alpha$, $Y = V Cos\, \beta$, $Z = V Cos\, \gamma$, $x = v\, Cos\, \alpha'$, $y = v\, Cos\, \beta'$, $z = v\, Cos\, \gamma'$, sofort

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = V^2 + v^2 - 2 V v (Cos\, \alpha\, Cos\, \alpha' + Cos\, \beta\, Cos\, \beta' + Cos\, \gamma\, Cos\, \gamma') = V^2 + v^2 - 2 V v\, Cos\, \varphi.$$

Aendert sich die Richtung nach dem Stosse nicht, so wird $\varphi = 0$ und der vorige Verlust ist $= V^2 + v^2 - 2 V v = (V-v)^2$, wie es sein soll.

Anmerkung 2. Der im §. 246 entwickelte Satz, dass durch den Stoss vollkommener elastischer Körper kein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, setzt noch voraus, dass im Augenblicke des Auseinandergehens oder Zurückspringens der Körper im Inneren derselben durch die eingetretene Erschütterung der Molecüle keine Schwingungen oder Vibrationen mehr stattfinden. So würde z. B. eine im leeren Raume auf eine feste horizontale Platte frei herabfallende Kugel, selbst wenn durch den Fall oder Stoss die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, die Kugel noch keineswegs mit derselben Geschwindigkeit, die sie erlangt hat, zurückspringen, also wieder dieselbe Höhe, durch die sie gefallen, erreichen, wenn im Augenblicke des Zurückspringens in der Platte oder Kugel solche Vibrationen vorhanden sind.

Reibung auf der schiefen Ebene.

(§. 280.)

159. Um die Bewegung eines Körpers auf der schiefen Ebene mit Rücksicht auf die vorhandene Reibung zu behandeln, seien wieder, wie in §. 280, α der Neigungswinkel der schiefen Ebene, i jener der Kraft P mit der schiefen Ebene, Q das Gewicht des Körpers, welcher durch diese Kraft über die schiefe Ebene hinaufgezogen wird, oder sein Hinabgehen mässigt, sowie f der Reibungs-Coefficient; dann ist, wenn man jede der beiden Kräfte P und Q in zwei Componenten zerlegt, wovon die eine parallel mit der Länge der schiefen Ebene und die andere darauf normal ist, die Seitenkraft aus P in der ersteren Richtung $= P\,Cos\,i$ und die ihr gerade entgegengesetzte aus der Last Q gleich $Q\,Sin\,\alpha$, sowie der Normaldruck auf die schiefe Ebene aus beiden der genannten Componenten $N = Q\,Cos\,\alpha - P\,Sin\,i$.

Findet daher eine Bewegung nach aufwärts statt und ist s der zurückgelegte Weg, so sind die Arbeiten oder Wirkungen von Seite der Kraft P, der Last Q und der Reibung, beziehungsweise $w = s\,P\,Cos\,i$, $w' = s\,Q\,Sin\,\alpha$ und $w'' = sf(Q\,Cos\,\alpha - P\,Sin\,i)$, und man erhält für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse $\frac{Q}{g}$, wenn die Bewegung über die schiefe Ebene aufwärts stattfindet: $W = w - w' - w''$ und wenn die Bewegung nach abwärts eintritt: $W = w' - w - w''$, d. i. im 1sten Falle:

$$W = s[P(f\,Sin\,i + Cos\,i) - Q(f\,Cos\,\alpha + Sin\,\alpha)] = sA \ldots (1),$$

und im 2ten Falle:

$$W = s[P(f\,Sin\,i - Cos\,i) - Q(f\,Cos\,\alpha - Sin\,\alpha)] = sB \ldots (2),$$

wenn man nämlich Kürze halber die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke beziehungsweise durch A und B bezeichnet.

160. Legt nun der Körper den Weg s in der Zeit t zurück, und besitzt derselbe zu Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit c und am Ende derselben jene v, so dass er in dieser Zeit die Geschwindigkeitsänderung $v - c$ erlitten hat; so ist dieselbe Wirkung W durch die lebendige Kraft ausgedrückt (§. 227) auch $\frac{Q}{2g}(v^2 - c^2)$, mithin $v = \sqrt{\frac{2gW}{Q} + c^2}$, und wenn man für W den

Werth aus (1) oder (2) substituirt, sofort für den 1sten Fall:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}} \text{ und im 2ten: } v = \sqrt{c^2 + \frac{2gBs}{Q}}.$$

Nun ist aber [Nr. **120**, (α)] $dt = \frac{ds}{v}$, oder für den 1sten Fall: $dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}}$, und wenn man integrirt:

$$t = \frac{Q}{gA}\left(-c + \sqrt{c^2 + \frac{2gAs}{Q}}\right),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $s = 0$ auch $t = 0$ ist.

Sucht man aus dieser letzteren Gleichung den Weg s, so findet man: $s = \frac{gA}{2Q}t^2 + ct$ und damit aus $v = \frac{ds}{dt}$, die Endgeschwindigkeit: $v = \frac{gA}{Q}t + c$.

Für den 2ten Fall darf man nur B statt A in diesen Formeln setzen.

Ist als specieller Fall $\alpha = 0$ und auch $i = 0$, also sowohl die Ebene, als auch die Richtung der Kraft P horizontal, so erhält die Grösse A aus der obigen Relation (1) den Werth $P - fQ$, und es ist dafür:

$$s = \frac{g}{2Q}(P - fQ)t^2 + ct \text{ und } v = \frac{g}{Q}(P - fQ)t + c,$$

wie es sein soll [vergl. Nr. **122**, Relat. (4)].

Anmerkung. Soll die Bewegung auf der schiefen Ebene eine gleichförmige werden, so muss die Wirkung auf Beschleunigung, d. i. $W = 0$ sein. Setzt man daher die obigen Ausdrücke (1) und (2) Null und bestimmt daraus die Kraft P, so erhält man:

$$\text{für den 1sten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha + f\,Cos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i + f\,Sin\,i}$$

$$\text{und für den 2ten Fall } P = \frac{(Sin\,\alpha - f\,Cos\,\alpha)\,Q}{Cos\,i - f\,Sin\,i},$$

welche Ausdrücke sofort, wie es sein soll, mit jenen [§. 280, Relat. (1)] für das statische Gleichgewicht übereinstimmen.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 284.)

161. Die in §. 284 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne lässt sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seien $CA = R$ und $cA = r$ (Fig. 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und die Berührung der beiden Zähne NB und nB, welche im Puncte A begonnen, sei bereits bis zu einem Punct B fortgerückt, wofür $ACB = \alpha$ und $AcB = \alpha'$ die Mittelpunctswinkel sein sollen. Bei dem weiteren unendlich wenigen Fortrücken der Räder nimmt α um $\mathrm{d}\alpha$ und α' um $\mathrm{d}\alpha'$ zu, wobei der Berührungspunct B des Zahnes BN den Kreisbogen $BB' = CB\,\mathrm{d}\alpha$ und jener des Zahnes Bn den Kreisbogen $BB'' = cB\,\mathrm{d}\alpha'$ beschreibt.

Da man während dieser unendlich kleinen Bewegung die Lage der gemeinschaftlichen Tangente DE als unverändert ansehen kann, so gleitet der Punct B des Zahnes BN auf dieser Tangente von B nach b, und des Zahnes Bn von B nach b', so dass der ganze Weg des Gleitens $s = Bb + Bb' = BB' \, Cos B'Bb + BB'' Cos . B''Bb' = CB . \mathrm{d}\alpha . Cos B'Bb + cB . \mathrm{d}\alpha' . Cos B''Bb'$ ist.

Sind aber CD und cd perpendikulär auf dieser Tangente DE, so ist W. $B'Bb =$ W. BCD und W. $B''Bb' =$ W. Bcd, folglich:

$$CB . Cos B'Bb = CB . Cos . BCD = CD$$

und

$$cB . Cos B''Bb' = cB . Cos . Bcd = cd;$$

es ist daher auch, wenn man diese Perpendikel $CD = a$ und $cd = a'$ setzt:

$$s = a\,\mathrm{d}\alpha + a'\,\mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner die vom Puncte A aus gezählte gemeinschaftliche Normale $AB = N$, so ist auch, wenn man W. $CED = \beta$ setzt:

$$a = CD = N + R Sin\,\beta \text{ und } a' = cd = N - r Sin\,\beta,$$

folglich auch: $s = N\mathrm{d}\alpha + R Sin\,\beta\,\mathrm{d}\alpha + N\mathrm{d}\alpha' - r Sin\,\beta\,\mathrm{d}\alpha'$, d. i.

$$s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha') + (R\,\mathrm{d}\alpha - r\,\mathrm{d}\alpha') Sin\,\beta.$$

Nun sind aber $R\mathrm{d}\alpha$ und $r\mathrm{d}\alpha'$ die Bögen oder Wege, welche der Punct A auf den primitiven Kreisen in derselben Zeit ($\mathrm{d}t$) zurücklegt, und da diese bei einer richtigen Verzahnung (§. 249) gleich sein müssen, so ist $R\mathrm{d}\alpha = r\mathrm{d}\alpha'$ und daher $s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha')$ oder wegen $\mathrm{d}\alpha = \frac{r}{R}\mathrm{d}\alpha'$ auch $s = N\frac{(R+r)}{R}\mathrm{d}\alpha'$.

Ist nun Q der zwischen den Zähnen stattfindende Normaldruck und f der Reibungs-Coefficient, so ist die auf Reibung verwendete Arbeit oder unendlich kleine Wirkung:

$$\mathrm{d}W = fQs = fQN\frac{(R+r)}{R}\mathrm{d}\alpha', \text{ also } W = f\frac{(R+r)}{R}\int QN\mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner P die nöthige Tangentialkraft (am Umfange der primitiven Kreise), um den Widerstand der Reibung zu überwinden und S ihr Weg während der Drehung des Rades c um den

Winkel α', so ist auch $W = PS$, folglich:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} QN d\alpha' \ldots (1)$$

als allgemeine Gleichung.

162. Geht nun die gemeinschaftliche Tangente, wie es z. B. bei der Epicycloiden-Verzahnung der Fall ist, durch den Mittelpunct c (Fig. 46), so wird $\beta = \alpha'$, $AB = N = r Sin\,\alpha'$, und da, wenn P' die nöthige Tangentialkraft am Umfange der primitiven Kreise bezeichnet, um die Räder ohne Rücksicht auf die Reibung umzudrehen, $P' = Q Cos\,\alpha'$ ist, sofort $Q = \frac{P'}{Cos\,\alpha'}$ (wenn man nämlich den in der Richtung BA wirksamen Normaldruck Q in die zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte nach AR, welcher Kraft jene P' gleich sein muss, und AS zerlegt denkt). Diese Werthe in die vorige Gleichung (1) substituirt, geben:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} P'r\frac{Sin\,\alpha'}{Cos\,\alpha'} d\alpha' = AP'r\int_0^{\alpha'} \alpha' d\alpha' = fP'r\frac{(R+r)}{R}\cdot\frac{\alpha'^2}{2},$$

wenn man nämlich, was bei den hier vorkommenden kleinen Werthen von α' immer erlaubt ist, α' statt $tang\,\alpha'$ setzt.

Ist endlich b die Theilung oder Schrift der Räder, so findet der Angriff des Zahnes des treibenden Rades nach der Regel während des Bogens $b = r\alpha'$ statt, woraus $\alpha' = \frac{b}{r}$, folglich die ganze Wirkung, wofür auch $S = b$ zu setzen ist:

$$Pb = fP'\frac{(R+r)}{Rr}\frac{b^2}{2}, \text{ d. i. } P = \tfrac{1}{2}fP'b\frac{(R+r)}{Rr}.$$

Sind aber m und m' die Anzahl der Zähne in den beiden Rädern C und c, so ist (§. 259) $b = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$, folglich:

$$\frac{R+r}{Rr}b = 2\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right)$$

und daher endlich: $P = f\pi P'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$.

Reibung eines Cylinders auf seiner Grundfläche.

(§. 286.)

163. Ist $CA = r$ (Fig. 37) der Halbmesser der ebenen Grundfläche des Cylinders, auf welche der Normaldruck Q stattfindet und welche zugleich die reibende Fläche sein soll; so ziehe man aus ihrem Mittelpuncte C mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ die beiden concentrischen Kreise, welche sofort die Fläche $2\,x\pi\,\mathrm{d}x$ einschliessen. Da der Druck Q über die ganze Kreisfläche gleichförmig vertheilt ist, so kommt davon auf dieses unendlich schmale Kreisband der Theil $\mathrm{d}Q$, welcher sich aus der Proportion $\mathrm{d}Q : Q = 2\,x\pi\,\mathrm{d}x : r^2\pi$ bestimmen lässt, und zwar folgt daraus $\mathrm{d}Q = \frac{2\,Q}{r^2}\,x\,\mathrm{d}x$. Der Betrag der Reibung ist daher, wenn f den Reibungs-Coefficienten bezeichnet, $f\mathrm{d}Q$, sowie das statische Moment der Reibung in Beziehung auf die Umdrehungsachse

$$\mathrm{d}S = x\,.\,f\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{r^2}f x^2\,\mathrm{d}x,\ \text{woraus}\ S = \frac{2Q}{r^2}f\int_0^r x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}\,r f Q$$

für das Moment der ganzen Reibung folgt, gerade so, als fände der Widerstand der Reibung fQ lediglich auf der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $\frac{2}{3}\,r$ statt.

Ist daher P' die am Umfange des Cylinders nöthige Kraft, um diese Reibung zu überwinden oder mit ihr im Gleichgewichte zu stehen, so ist auch $P'r = S = \frac{2}{3}\,r f Q$, folglich:

$$P' = \tfrac{2}{3} f Q.$$

(Vergleiche §. 286.)

Die durch die Reibung während einer Umdrehung der gewöhnlich vertical stehenden Welle absorbirte Arbeit ist $w = 2r\pi P' = \frac{4}{3}\,r\pi f Q$. Auch lässt sich diese gleich in dem unendlich schmalen Kreisring ausdrücken, indem $\mathrm{d}w = 2\,\pi\,x f\,\mathrm{d}Q = \frac{4\,\pi f Q}{r^2}\,x^2\,\mathrm{d}x$ ist, woraus durch Integration ebenfalls wieder

$$w = \frac{4\,\pi f Q}{r^2}\int_0^r x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,r\,\pi f Q$$

gefunden wird.

Anmerkung. Ist nicht die volle Kreisfläche, sondern nur ein Kreisband vom äusseren und inneren Halbmesser R und r die reibende Fläche, so ist $\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{R^2 - r^2}\,x\,\mathrm{d}x$, folglich die Arbeit der Reibung des Flächenelementes während einer Umdrehung: $\mathrm{d}w = \frac{4\,\pi f Q}{R^2 - r^2}\,x^2\,\mathrm{d}x$, und sonach die Arbeit der Reibung für die ganze reibende Fläche:

$$w = \frac{4\,\pi f Q}{R^2 - r^2}\int_r^R x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,\pi f Q\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right),$$

oder auch, wenn man abkürzt:

$$w = \tfrac{4}{3}\,\pi f Q\left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}\right),$$

ein Ausdruck, welcher offenbar grösser als der obige ist.

Reibung auf einem Kugelsegment.

164. Da man noch häufig bei stehenden Wellen Kugelzapfen anwendet, wodurch die Reibung anstatt auf einer ebenen Kreisfläche sofort auf einem Kugelsegment stattfindet, so wollen wir diesen Fall hier noch entwickeln.

Benützen wir zu diesem Ende die Fig. 67, welche den Durchschnitt des halbkugelförmigen Zapfens mit einer durch den Mittelpunct der Kugel gelegten Verticalebene bezeichnen soll und nehmen an, dass sich das Segment aDb in einer entsprechenden hohlen Kugelschale reibt, und dass dafür der Kugelhalbmesser $CA = CD = r$, jener der oberen Kreisfläche des Segmentes $Oa = Ob = \varrho$, der gesammte lothrechte Druck $= Q$ und der Reibungs-Coefficient wieder $= f$ sei. Diess angenommen, durchschneide man das Kugelsegment in den Abständen $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ mit den beiden durch P und p gehenden horizontalen, unendlich nahe liegenden Ebenen, so begrenzen diese auf der Oberfläche eine unendlich schmale Zone Mm von der Höhe $\mathrm{d}x$, deren Horizontalprojection $= 2\pi y\,\mathrm{d}y$ ist, wenn man nämlich die Ordinate $PM = y$ setzt. Auf diese Projection oder Ringfläche entfällt aber von dem Gesammtdrucke Q der Theil $\mathrm{d}Q$, welcher wieder aus der Proportion $Q : \mathrm{d}Q = \varrho^2\pi : 2\pi y\,\mathrm{d}y$ gefunden wird, weil man sich die ganze reibende Kugeloberfläche aDb in solche unendlich schmale Zonen Mm zerlegt und den Totaldruck Q der Welle auf diese im Verhältniss ihrer horizontalen Projectionen vertheilt denken kann, und weil, wie bemerkt, $2\pi y\,\mathrm{d}y$ diese Projection für das Element und $\varrho^2\pi$ jene für die ganze reibende Fläche ist.

Aus dieser Proportion folgt nun $\mathrm{d}Q = \frac{2Q}{\varrho^2} y\,\mathrm{d}y$, und wenn man diesen in M wirkenden verticalen Druck in einen Druck t nach der Tangente des Kreises ADB und in einen Normaldruck n zerlegt und den Winkel, welchen die Normale mit der Verticalen einschliesst, mit α bezeichnet, so ist der Normaldruck $n = \mathrm{d}Q . Cos\,\alpha$, oder wenn man für $\mathrm{d}Q$ den vorigen Werth setzt und berücksichtiget, dass $Cos\,\alpha = \frac{CP}{CM} = \frac{x}{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$ ist, indem aus der Gleichung des Kreises $AMDB$, nämlich aus $x^2 + y^2 = r^2$ sofort $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ folgt, auch: $n = \frac{2Q}{\varrho^2} y\,\mathrm{d}y \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$. Es ist daher der Betrag der Reibung für dieses Element der reibenden Oberfläche $= nf$ und die Wirkung oder Arbeit dieser Reibung während einer Umdrehung der Welle:

$$dw = 2\pi y . nf = \frac{4\pi f Q}{\varrho^2} y^2 dy \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2},$$

also die Arbeit der ganzen reibenden Oberfläche:

$$w = \frac{4\pi f Q}{\varrho^2} \int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2}.$$

Nun ist, wenn man Kürze halber $\frac{y}{r} = x$ setzt (Comp. §. 814 und §. 817):

$$\int y^2 dy \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}[-x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} + arc\,Sin\,x],$$

folglich da für $y = \varrho$ das x in $\frac{\varrho}{r} = a$ übergeht, wenn man nämlich der Kürze wegen a statt $\frac{\varrho}{r}$ setzt, dagegen der ganze Integralausdruck für $y = 0$ verschwindet, so hat man:

$$\int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}[-a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2} + arc\,Sin\,a].$$

Löst man sowohl $arc\,Sin\,a$ als auch $\sqrt{1-a^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von a fortlaufende Reihe auf, so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\int_0^\varrho y^2 dy \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2} = \frac{r^3}{8}\left(\frac{16}{2\cdot3}a^3 - \frac{32}{2\cdot4\cdot5}a^5 - \frac{48}{2\cdot4\cdot6\cdot7}a^7 - \ldots\right)$$
$$= \frac{r^3 a^3}{3}\left(1 - \frac{3}{10}a^2 - \frac{3}{56}a^4 - \ldots\right)$$

Es ist daher endlich, wenn man für a den Werth wieder herstellt und abkürzt, die Arbeit der Reibung während einer Umdrehung des Kugelzapfens:

$$w = \tfrac{4}{3}\pi f Q \varrho \left[1 - \frac{3}{10}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 - \frac{3}{56}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 - \ldots\right].$$

Ist die Höhe des im Lager laufenden Kugelsegmentes DO so gering, dass $\frac{\varrho}{r}$ eine so kleine Grösse wird, um die höheren Potenzen dieses Bruches in der Reihe gegen das 1ste Glied ohne Fehler vernachlässigen zu können; so ist, wie bei der Reibung auf der ebenen Kreisfläche vom Halbmesser ϱ:

$$w = \tfrac{4}{3}\varrho \pi f Q \quad \text{(vergl. Nr. **163**).}$$

Liegt dagegen die volle Halbkugel im Lager, so ist wegen $\varrho = r$, der genäherte Werth der obigen Reihe $= \cdot 6$, folglich jener der Arbeit:

$$w = \tfrac{4}{5} r \pi f Q.$$

Anmerkung 1. Besitzt der Zapfen, wie diess auch manchmal vorkommt, die Form eines nach unten verjüngten abgestutzten Kegels, welcher sich in seinem genau passenden konischen Lager bloss auf der Mantelfläche reibt, so findet man genau auf dieselbe Weise, wenn man den oberen und unteren Halbmesser des Zapfens durch R und r, sowie die Kante oder Seite des abgestutzten Kegels durch a bezeichnet, dann Q und f wieder die vorige Bedeutung haben, für die von der Zapfenreibung während einer Umdrehung absorbirte Arbeit:

$$w = \tfrac{4}{3}\pi f Q \frac{R^3 - r^3}{(R+r)a}.$$

Für $r = 0$ und $a = R$ erhält man, wie es sein soll, $w = \frac{4}{3} R \pi f Q$, weil dann die reibende Fläche in eine ebene Kreisfläche vom Halbmesser R übergeht.

Anmerkung 2. Ganz auf dieselbe Weise findet man für einen horizontal liegenden Wellzapfen, welcher in seinem Lager, den Kreisbogen aDb (Fig. 67) vollkommen berührend aufliegt, und wobei $CA = CD = r$ der Halbmesser des reibenden Zapfens, $aO = a$ die halbe Sehne ab, Q der verticale Druck auf den Zapfen und f wieder der Reibungs-Coefficient ist, für die Arbeit oder Wirkung der Reibung während einer Umdrehung des Zapfens, den Ausdruck:

$$w = \frac{2r\pi f Q}{a}\int_0^a dy \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

und wenn man integrirt (Comp. §. 819, Beisp. 2):

$$w = \frac{r\pi f Q}{a}\left[a\sqrt{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2} + r\, arc\, Sin\left(\frac{a}{r}\right)\right],$$

oder wenn man wieder auf die Reihen übergeht und mit a abkürzt:

$$w = 2r\pi f Q\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{112}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - .\right].$$

Bildet die halbe Mantelfläche des Zapfens die reibende Fläche, so ist $a = r$ und es ist ziemlich nahe $w = \frac{8}{5} r\pi f Q$.

Liegt dagegen bloss die unterste Kante der cylinderischen Oberfläche des Zapfens wie auf einer horizontalen Ebene auf, so wird a so klein, dass man in der vorigen Reihe, vom 2ten angefangen, alle Glieder vernachlässigen kann, und dann ist $w = 2r\pi f Q$, also die von der Reibung absorbirte Arbeit um $\frac{2}{5} r\pi f Q$ grösser als im vorigen Falle und gerade so gross, wie diese [vergl. §. 287, Gleich. (4)] für gewöhnlich in Rechnung gebracht wird.

Reibung eines Seiles über einen ruhenden Cylinder.

(§. 292.)

165. Ist das Seil, woran die Last Q hängt, um den Bogen $AM = r\alpha$ (Fig. 47) geschlagen, und steht die Kraft P mit dieser Last und der zwischen dem Seil und dem genannten Bogenstück des Cylinders C vom Halbmesser r im Gleichgewichte, d. h. kann die Kraft P, wenn die Bewegung eingeleitet ist, die Last Q heraufziehen; so muss durch Vergrösserung des Winkels α um $d\alpha$, wegen der vermehrten, auf dem Bogenstück $Mm = r\,d\alpha$ stattfindenden Reibung, auch die Kraft P um dP vermehrt werden, um das Gleichgewicht zwischen der Last Q und der Reibung über den Bogen AMm wieder herzustellen, so dass also dP die Reibung über den unendlich kleinen Bogen Mm überwindet.

Um diese Reibung zu finden, muss man zuerst den Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm bestimmen. Dazu denke man sich die im Puncte M in der Richtung MA stattfindende Spannung durch eine nach der Tangente MT wirkende Kraft $= P$ ersetzt, so dass der Stand des Gleichgewichtes nicht gestört wird, wenn an dem über den Bogen Mm gelegten Seil nach den Richtungen der Tangenten MT und mt die Kräfte P und $P + dP$ wirksam gedacht werden. Da aber $P + dP = P$ ist, so wirken auf den Punct N nach den genannten Richtungen zwei gleiche Kräfte P und erzeugen daher eine nach dem Mittelpuncte C gerichtete, d. i. den Winkel $MCm = d\alpha$ halbirende Resultirende R, welche sich einfach nach §. 16 (Anmerkung), d. i. wenn man Kürze halber W. $MNC =$ W. $mNC = \varphi$ setzt, aus der Proportion $R : P = Sin\,2\varphi : Sin\,\varphi = 2\,Cos\,\varphi : 1$, oder wegen $\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}d\alpha$ aus $R : P = 2\,Sin\,\frac{1}{2}d\alpha : 1$ bestimmen lässt; es ist nämlich, wegen $Sin\,\frac{1}{2}d\alpha = \frac{1}{2}d\alpha$, sofort $R = P\,d\alpha$.

Da nun diese Kraft R den gesuchten Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm vorstellt, so ist, wenn f den betreffenden Reibungs-Coefficienten bezeichnet, $fR = fP\,d\alpha$ der Betrag der Reibung, folglich auch $dP = fP\,d\alpha$.

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Absonderung: $\frac{dP}{P} = f\,d\alpha$ und durch Integration: $logn.\,P = f\alpha + C$.

Um die unbestimmte Constante C zu bestimmen, bemerke man, dass für $\alpha = 0$ sofort $P = Q$ sein muss; diess gibt $logn.\,Q = C$, folglich wenn dieser Werth für C substituirt wird:

$$logn.\,P - logn.\,Q = f\alpha, \quad \text{oder} \quad logn.\,\frac{P}{Q} = f\alpha,$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen selbst übergeht, auch: $\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$ oder $P = Qe^{f\alpha}$,

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist (vergleiche §. 292, Gleich. 1).