verträgt und in Folge dessen ein Zerreissen oder Zerquetschen der einzelnen Theile stattfindet, sowie in der Voraussetzung, dass wenn homogene und in jedem Sinne gleichen Widerstand leistende Körper angenommen werden, nothwendig ein bestimmtes Verhältniss zwischen den beiden Constanten T und F (Nr. **54**.) bestehen müsse, sofort: $T = \frac{4}{5} F$.

Dicke der Gefässwände.

(§. 159.)

116. Ist $AB = 2r$ (Fig. 80) der lichte Durchmesser einer cylinderischen Röhre von der Länge l und einer im Vergleiche zu r sehr dünnen Wand δ, und p der radicale Druck auf die Flächeneinheit der inneren Wand; so nehme man als einfachste Hypothese an, dass die Röhre zuletzt, wenn der Druck zu gross wird, nach der Länge in zwei Halbcylinder, d. i. nach dem Durchmesser AB in zwei Theile zerrissen werde. Diess vorausgesetzt, zerlege man zur Bestimmung der Kräfte, welche diese Trennung bewirken, die auf irgend einen Punct M des inneren Umfanges eines Querschnittes nach dem Radius CM wirkende Kraft p, wofür W. $ACM = \alpha$ sein mag, in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte p' und p'', wovon die erstere senkrecht auf AB, die letztere daher damit parallel ist; so hat man $p' = p \, Sin \, \alpha$ und $p'' = p \, Cos \, \alpha$.

Lässt man α um $d\alpha$ zunehmen, so ist der auf den unendlich schmalen, mit der Achse parallelen Streifen vom Flächeninhalt $l r d\alpha$ senkrecht gegen AB ausgeübte Druck $= l r d\alpha \, . \, p \, Sin \, \alpha$, folglich der gesammte Druck auf die halbe innere Cylinderfläche

$$AMB = r l p \int_0^\pi Sin \, \alpha \, d\alpha = 2 r l p,$$

also gerade so gross, als ob die Kraft senkrecht auf die diametrale Ebene des inneren Cylinders, als Projection der inneren Mantelfläche auf diese Ebene wirksam wäre.

Ebenso gross ist auch der auf die zweite Hälfte ANB der Cylinderfläche senkrecht gegen AB, aber dem vorigen entgegengesetzte Druck, welcher mit dem ersteren zusammen die Trennung oder das Zerreissen bewirkt.

Was die mit AB parallel wirksamen Componenten p'' betrifft, so heben sich diese wieder in den beiden Halbcylindern, welche durch einen auf AB senkrechten Durchmesser oder einer durch diesen und die Achse des Cylinders gelegten Ebene getrennt werden, gegenseitig auf, und haben auf das Zerreissen des Cylinders nach der angenommenen Richtung keinen Einfluss.

Ist nun F_a die absolute Festigkeit des Materiales, woraus die Röhre oder der hohle Cylinder besteht, so hat, da durch die angenommene Trennung die Fläche $2l\delta$ abgerissen werden muss, die obige Kraft, als Resultirende der Componenten p', den Widerstand $2l\delta F_a$ zu überwinden, und es ist sonach für das Gleichgewicht: $(\alpha)\ldots 2rlp = 2l\delta F_a$, folglich die gesuchte Wanddicke, bei welcher die Röhre der Länge nach eben noch zerrissen wird: $\delta = \frac{rp}{F_a}\ldots(1)$.

Ein Längenriss nach einer anderen als diametralen Ebene, z. B. nach ab, ist bei einer homogenen, durchaus einerlei Festigkeit besitzenden Röhre aus dem Grunde nicht möglich, weil die hierzu verwendete Kraft bloss der entsprechenden Sehne ab proportional, also kleiner als AB ist.

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Länge des Rohres auf dessen Festigkeit keinen Einfluss und wird diess auch durch die Versuche bestätiget. Allein nicht so ist es bei Röhren, welche einem äusseren Drucke, wie z. B. die Feuerrohre der Tubular- und anderer Dampfkessel zu widerstehen haben; in diesem Falle steht die Festigkeit nicht bloss wie im vorigen Falle im umgekehrten Verhältnisse mit dem Durchmesser, sondern nach den neuesten sehr ausführlichen Versuchen von W. Fairbairn, zugleich auch im umgekehrten Verhältnisse mit der Länge des Rohres.

Auf Grundlage dieser Versuche mit cylinderischen Röhren aus Eisenblech, deren Durchmesser von 4 bis 12 Zoll, Länge von $1\frac{1}{2}$ bis $9\frac{1}{2}$ Fuss und Blechdicke von $\frac{1}{2}$ bis 3 Linien variirte, leitete Fairbairn folgende Formel ab:

$$P = 37\cdot694\,\frac{k^{2\cdot19}}{LD},$$

in welcher P den Druck auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen bezeichnet, durch welchen die Röhre vom Durchmesser D Centimeter, der Länge L Meter, und Blechdicke k Millimeter bei einer gleichförmigen von Aussen nach Innen wirkenden Pressung zerdrückt wird.

Auf das W. Mass und Gewicht reducirt, erhält diese Gleichung die Form:

$$P = 723880\,\frac{k^{2\cdot19}}{LD},$$

in welcher P die zerdrückende Kraft in Pfunden auf den Quadratzoll bezeichnet und L in Fussen, D und k dagegen in Zollen zu substituiren sind.

So würde z. B. ein Rohr von 2 Zoll Durchmesser, 10 Fuss Länge und 1 Linie Blechdicke nach dieser Formel schon durch eine Kraft zerdrückt, welche auf den Quadratzoll gerechnet $156\frac{3}{4}$ Pfund, oder etwas mehr als 12 Atmosphären beträgt. Nach denselben Versuchen ist für eine im Rohre von innen nach aussen wirkende Pressung die zerreissende Kraft P' auf den W. Quadratzoll in Pfunden, wenn wieder k und D in Zollen genommen werden: $$P' = 52000\frac{k}{D},$$ so dass dabei die absolute Festigkeit der zusammengenieteten Röhren in runder Zahl nur $\frac{52000}{2} = 26000$ Pfund beträgt.

Die Vergleichung dieses Werthes von P' mit dem vorigen P gibt sonach:
$$P' = \cdot 0718 \frac{L}{k^{1 \cdot 19}} P.$$
Für das hier gewählte Beispiel wäre daher:
$$P' = \cdot 0718 \times 10 \times 12^{1 \cdot 19} P = 13 \cdot 8 P.$$
Dasselbe Rohr würde nämlich durch einen im Innern wirkenden Dampfdruck erst bei einer Spannung von $13 \cdot 8 \times 12 = 165 \cdot 6$ Atmosphären zerrissen werden.

117. Ist ein hohler Cylinder, dessen innerer und äusserer Halbmesser r und R sind, an beiden Grundflächen geschlossen, und untersucht man die Wanddicke δ', welche er haben muss, um von derselben Kraft so abgerissen zu werden, dass die beiden Theile durch eine Ebene senkrecht auf dessen Achse getrennt werden; so muss ein Kreisring vom Flächeninhalt $(R^2 - r^2)\pi$ abgerissen werden. Da nun mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung die zerreissende Kraft, in der Richtung der Cylinderachse $= pr^2\pi$ ist, so hat man für das Gleichgewicht:
$$pr^2\pi = (R^2 - r^2)\pi F_a, \text{ oder } pr^2 = \delta'(R + r) F_a$$
und daraus:
$$\delta' = \frac{rp}{F_a} \frac{r}{R + r}.$$

Da nun $\frac{r}{R+r} < 1$, so ist auch, wenn man diesen Ausdruck mit dem vorigen (1) vergleicht, $\delta' < \delta$, d. h. der Cylinder wird durch dieselbe Kraft bei der Wanddicke δ nur nach der Länge oder parallel, keineswegs aber nach einer Ebene senkrecht auf die Achse zerrissen werden können.

118. Ist $AC = BC = r$ (Fig. 81) der innere Halbmesser einer h o h l e n K u g e l und nimmt man, mit Beibehaltung aller übrigen Bezeichnungen der vorigen Nr., an, dass die Kugel nach der diametralen Ebene $ADBE$ abreisst, oder in zwei Halbkugeln getrennt wird, so hat man für die auf einen dem Winkel α entsprechenden Parallelkreis senkrecht gegen diese Ebene $ADBE$

gerichteten Seitenkräfte auf die Flächeneinheit bezogen, den Ausdruck $q \, Sin \, \alpha$, folglich ist der auf die unendlich schmale Zone $2 y \pi . r \, d\alpha$, welche entsteht, wenn man durch den Punct m, wofür $Mm = d\alpha$ einen zweiten Parallelkreis legt, nach der Richtung senkrecht auf $ADBE$ ausgeübte Druck $= 2 y \pi r \, d\alpha . q \, Sin \, \alpha = 2 r \pi q y \, Sin \, \alpha \, d\alpha$, oder wegen

$$y = PM = r \, Cos \, \alpha, \text{ auch } = 2 r^2 \pi \, q \, Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha \, d\alpha.$$

Es ist daher der gesammte auf die Halbkugel $ADBEF$ senkrecht gegen die genannte Ebene $ADBE$ ausgeübte Druck

$$= 2 r^2 \pi q \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha \, d\alpha, \text{ oder wegen } \int Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha \, d\alpha = \tfrac{1}{2} \, Sin^2 \alpha,$$

auch $= 2 r^2 \pi q . \frac{1}{2} = r^2 \pi q$, d. h. gerade so gross, als ob der Druck q senkrecht gegen die Projection der halben Kugelfläche, d. i. gegen die Kreisfläche $ADBE$ stattfände.

Da nun nach der angenommenen Hypothese ein Streifen oder eine Fläche $2 r \pi \delta$ abgerissen wird, so muss $2 r \pi \delta F_a = r^2 \pi q$, also

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{rq}{F_a} \ldots (2)$$

sein.

119. Ist die Gefässwand bedeutend dicker, so ist die Spannung an der äusseren Umfangsschichte des hohlen Cylinders nicht mehr, wie vorhin stillschweigend vorausgesetzt wurde, jener der inneren Wand gleich, sondern kleiner als diese. Um die Rechnung für diesen Fall durchzuführen, sei (Fig. 82) $Ca = r$ der innere und $CA = R$ der äussere Halbmesser des hohlen Cylinders von der Länge l. Nimmt man $CP = x$ und $Cp = x + dx$ und zieht mit diesen Halbmessern aus C die concentrischen Kreise, so bildet der dadurch entstehende unendlich schmale Kreisring den Querschnitt eines hohlen Cylinders vom Halbmesser x und der Wanddicke dx, auf welche die obige Relation (1) in Nr. **116.** volle Anwendung findet.

Dehnt sich nun r durch den Druck auf die innere Wand um Δr, und, weil sich dieser Druck durch das Aufeinanderwirken der concentrischen Ringe oder Schichten nach aussen zu fortpflanzt, x um Δx aus, so muss, da das zwischen a und P liegende Kreisband nach der Ausdehnung dieselbe Breite $x - r$, wie vor der Ausdehnung behält, sofort:

$$(x^2 - r^2) \pi = [(x + \Delta x)^2 - (r + \Delta r)^2] \pi,$$

oder wenn man die 2te Potenz von Δx und Δr auslässt:

$$\Delta x = \frac{r\Delta r}{x} \ldots (n) \text{ (d. i. } \Delta x : \Delta r = r : x)$$

sein.

Ist ferner F_a die auf die Flächeneinheit der inneren dem Halbmesser r entsprechenden Cylinderwand stattfindende Spannung, und F'_a jene für den Cylinder vom Halbmesser x, so hat man, wenn Kürze halber $2r\pi = \lambda$ und $2x\pi = \lambda'$ gesetzt wird, nach der Relation (2) in Nr. **53.**, für die Ausdehnung der betreffenden unendlich dünnen concentrischen Schichten:

$$\Delta\lambda = \frac{F_a \lambda}{E} \text{ und } \Delta\lambda' = \frac{F'_a \lambda'}{E},$$

also auch: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} : \frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = F_a : F'_a \ldots (s)$.

Nach der Ausdehnung ist $\lambda + \Delta\lambda = 2(r + \Delta r)\pi$ und $\lambda' + \Delta\lambda' = 2(x + \Delta x)\pi$, folglich $\Delta\lambda = 2\pi\Delta r$ und $\Delta\lambda' = 2\pi\Delta x$, oder $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\pi\Delta r}{2r\pi} = \frac{\Delta r}{r}$ und ebenso $\frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = \frac{\Delta x}{x}$.

Die Vergleichung dieser Quotienten mit den vorigen in (s) gibt daher:

$$F_a : F'_a = \frac{\Delta r}{r} : \frac{\Delta x}{x},$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (n), auch $F_a : F'_a = \frac{\Delta r}{r} : \frac{r\Delta r}{x^2} = x^2 : r^2$, woraus sofort $F'_a = \frac{r^2}{x^2} F_a$ folgt.

Nun ist aber $F'_a dx$ die Spannung der unendlich dünnen concentrischen Schichte vom Halbmesser x, folglich:

$$\int_r^R F'_a dx = \int_r^R r^2 F_a \frac{dx}{x^2} = r^2 F_a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \left(\frac{r(R-r)}{R}\right) F_a$$

jene des ganzen Kreisringes von der Breite $R - r$, oder es ist, wenn man auch hier die Wanddicke $R - r$ des Cylinders durch δ bezeichnet, $\frac{r\delta}{R} F_a$ die Kraft, mit welcher der Cylinder bei einer rechteckigen Querschnittfläche von der Länge 1 und Breite δ dem Zerreissen widersteht. Da aber auch hier die Fläche $2l\delta$ abgerissen werden muss, so hat man nach der obigen Relat. (α) in Nr. **116.**: $2rlp = 2l\frac{r\delta}{R} F_a$ und daraus für die gesuchte Wanddicke:

$$\delta = \frac{Rp}{F_a} \ldots (3),$$

welcher Ausdruck von dem obigen in (1) nur dadurch abweicht, dass R statt r steht.

Um auch hier wieder den inneren Halbmesser r einzuführen, hat man, wegen $R = r + \delta$ sofort $\delta F_a = (r + \delta) p$ und daraus:

$$\delta = \frac{rp}{F_a - p} \ldots . (4).$$

Auf gleiche Weise erhält man auch für eine hohle Kugel:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{rp}{F_a - p} \ldots . (5).$$

Anmerkung. Wie aus diesen letzteren Formeln (4) und (5) hervorgeht, so muss p oder der Druck auf die innere Gefässwand per Flächeneinheit immer kleiner als die absolute Festigkeit F_a des betreffenden Materiales sein, weil sonst δ unendlich gross oder negativ würde, was beides absurd wäre, zum Beweis, dass das Gefäss bei gar keiner möglichen Wanddicke dem inneren Drucke widerstehen könnte.

Wichtig ist diese Bemerkung in der Anwendung bei den gusseisernen Presscylindern der hydraulischen Pressen. Zugleich muss man bei der Annahme des Werthes von F_a für Gusseisen den Umstand mit berücksichtigen, dass bei einer bedeutenden Wanddicke $R - r$ der innere Druck etwas seitlich, d. i. nicht so wirkt, als ob ein Prisma durch eine nach der Achse desselben wirkende Kraft, sondern durch eine Kraft abgerissen würde, welche mehr oder weniger nach einer Seitenfläche in der Richtung einer Längenkante wirksam ist. Hodgkinson hat nun durch seine Versuche gefunden, dass wenn ein gusseisernes Prisma im ersteren Falle mit 15000 Pfund per Wr. Quadratzoll abgerissen wurde, dasselbe im letzteren Falle (wobei offenbar ein Theil der Kraft auf den Bruch wirksam wird) nur einer Kraft von 5110 Pfund widerstehen konnte. Wenn nun auch hier dieser extreme Fall nicht eintritt, so darf dieser Umstand dennoch nicht ganz übersehen werden.

Englische Ingenieure nehmen in diesem Falle, nämlich bei hydraulischen Pressen, den inneren Druck im Maximum mit 7400 Pfund auf den Wr. Quadratzoll, also nahe mit der halben absoluten Festigkeit des Gusseisens an.