76. Ist der Querschnitt ein Dreieck, so ist in der Lage Fig. 58 wegen $c = \frac{2}{3}h$ für F_r und $\frac{1}{3}h$ für F_a, und wegen (**64**) $\varepsilon = \frac{1}{36} E b h^3$, sofort:

$$M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{1}{3} h} F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_a \text{ und } M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{2}{3} h} F_r = \frac{1}{24} b h^2 F_r,$$

dagegen in der Lage Fig. 59 gerade umgekehrt:

$$M = \frac{1}{24} b h^2 F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_r.$$

77. Für den elliptischen Querschnitt in der Lage Fig. 52 ist wegen $c = b$ und (**65.**) $\varepsilon = \frac{1}{4} E \pi a b^3$ sofort $M = \frac{1}{4} \pi a b^2 F$.

Wenn dagegen die grosse Achse vertical steht: $M = \frac{1}{4} \pi a^2 b F$.

78. Für den kreisförmigen Querschnitt ist $M = \frac{1}{4} \pi r^3 F$.

79. Für einen rechteckigen Ring ist wegen $c = \frac{1}{2} h$, nach **67.**:

$$M = \frac{1}{6} \left(\frac{b h^3 - b' h'^3}{h} \right) F.$$

80. Endlich ist für einen hohlen Kreiscylinder, nach Nr. **68**, wegen $c = R$:

$$M = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{R^4 - r^4}{R} \right) F.$$

Anmerkung. Im Falle die Länge l des Prisma so gering ist, dass die parallel mit der Bruchfläche wirkende Kraft Q in diese Fläche selbst hineinfällt, so wird das Prisma nicht mehr durch Biegung gebrochen, sondern die sich trennenden Flächen werden von einander abgeschoben und man nennt die dabei hervorgerufene Festigkeit die Gleitungs- oder Abscheerungs-Festigkeit des Prisma. Ist F' der betreffende Festigkeits-Coefficient für die Flächeneinheit und A die Grösse der abgeschobenen Fläche, so ist die zum Abscheeren nöthige Kraft:

$$Q = F' A \ldots . (m).$$

Was nun den Coefficienten F' betrifft, so kann man diesen den bisher ausgeführten Versuchen zufolge dem Coefficienten der absoluten Festigkeit gleich, d. i. $F' = F_a$, setzen.

Bolzen, Nieten u. dgl. werden mit ihrer Abscheerungs-Festigkeit in Anspruch genommen. Auch ist es eben diese Festigkeit, welche beim Ausstossen von Nuthen, Lochen von Blechen u. s. w. überwunden werden muss.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 137.)

81. Bei der bisherigen Annahme von durchaus gleichen Querschnitten des Körpers wird an einer oder mehreren Stellen zuerst oder vor allen übrigen die Elasticitätsgrenze überschritten, und an diesen daher auch der Bruch zuerst erfolgen. Ist daher der Körper an diesen Stellen gerade stark genug, so ist er an allen übrigen zu stark und man kann sich die Aufgabe stellen, den Längenschnitt des Körpers so zu bestimmen, dass alle Querschnitte eine genügende, keiner aber eine überflüssige Stärke oder Widerstandskraft besitze, und sonach die Elasticitätsgrenze bei der entstehenden Biegung, entweder bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung in allen Querschnitten zugleich erreicht wird.

Um nun für einige solche Körper von gleichem Widerstande die nöthige Form unter gewissen Bedingungen zu finden, sei der Körper wieder horizontal an dem einen Ende eingemauert und am anderen durch ein Gewicht Q, oder auch über die ganze Länge gleichförmig belastet.

82. Sollen die Querschnitte des Körpers Rechtecke von durchaus gleicher horizontaler Breite $CD = AB = b$ (Fig. 60) sein, so sei $CE = h$ die verticale Höhe des in der Ebene der Mauer liegenden, d. i. des vom freien Ende am weitesten, nämlich um $AC = l$ abstehenden Querschnittes, sowie $PM = y$ jene eines beliebigen Querschnittes im Abstande $AP = x$; dann ist die Festigkeit des Körpers in Bezug auf den Querschnitt ED (74.) $Q = \frac{1}{6} F \frac{b h^2}{l}$, sowie in Bezug auf den Querschnitt MP': $Q' = \frac{1}{6} F \frac{b y^2}{x}$.

Da nun $Q' = Q$ sein soll, so hat man aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke:

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x,$$

als Gleichung der Begrenzungscurve AME oder $BM'F$ des verticalen Längenschnittes des Körpers. Wie man sieht, ist diese Curve die gemeine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{l}$, deren Scheitel in A und Achse in AC liegt.

Anmerkung. Der Parameter $\frac{h^2}{l}$ lässt sich, wenn F, b und Q gegeben sind, aus der 1sten der obigen Gleichungen, aus welcher $\frac{h^2}{l} = \frac{6Q}{bF}$ folgt, bestimmen.

Da hier der Flächeninhalt der verticalen Schnitte durch $\frac{2}{3} AC.CE$, dagegen, wenn der Körper durchaus dieselbe Höhe $CE = h$ besitzt, durch $AC.CE$ ausgedrückt wird; so erspart man durch diese, gegen das freie Ende hin abnehmende Höhe des Körpers, wobei übrigens die ebene horizontale Fläche BC (wie hier) oben oder unten liegen kann, bei derselben

Festigkeit des Balkens, den 3ten Theil an Material. Auch bleibt dieses Verhältniss noch dasselbe, wenn das Prisma von zwei krummen Flächen derart begrenzt ist, dass die verticalen Längenschnitte vollständige Parabeln bilden, in welchen AC die Axe und für die obere wie untere Hälfte der Curve $CE = \frac{1}{2}h$ und $PM = \frac{1}{2}y$ ist.

Endlich kann noch bemerkt werden, dass man sich in der Praxis den für die Körper von gleichem Widerstande theoretisch gefundenen Formen in der Regel nur mehr oder weniger nähert, indem man z. B. im vorliegenden Falle dem Querschnitt an seinem Ende nicht die Höhe Null gibt, das Prisma also nicht wirklich in eine Schneide auslaufen lässt.

83. Sollen dagegen die gegen das freie Ende des prismatischen Körpers hin abnehmenden Querschnitte Rechtecke von durchaus gleicher Höhe sein; so sei $MN = CE = h$ (Fig. 61) diese constante Höhe, ferner wieder $CD = b$ die horizontale Breite des Querschnittes an der Mauer $AG = l$, und für einen beliebigen Querschnitt MN' der Abstand $AP = x$ und die Breite $MM' = y$. Diess vorausgesetzt ist wieder $\frac{1}{6}F\frac{y h^2}{x} = \frac{1}{6}F\frac{b h^2}{l}$ zu setzen, woraus sofort $\frac{1}{2}y = \frac{\frac{1}{2}b}{l}x$ als Gleichung der Geraden AC oder AD folgt, so dass also hier das Prisma von gleichem Widerstande von zwei gleichschenkeligen Dreiecken ACD und BEF als obere und untere Ebene begrenzt wird.

Anmerkung. Offenbar erspart man bei dieser Form des Prisma gegen einen durchaus gleichbreiten Balken und der gleichen relativen Festigkeit die Hälfte am Materiale.

84. Sollen die Querschnitte für den Fall bestimmt werden, dass die Last Q über die ganze Länge des prismatischen Körpers gleichförmig vertheilt ist, so sei, wenn der Balken durchaus eine gleiche Breite $CD = PP' = b$ (Fig. 62) haben soll, $AC = l$, $CE = h$, $AP = x$ und $PM = y$, sowie das Gewicht, womit bei der Breite b die Längeneinheit belastet ist $= q$, folglich das gesammte Belastungsgewicht $Q = q\,l$. Da nun aber auf die Länge AP die Belastung qx entfällt, so hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (2) in §. 132 für die Festigkeit des rechteckigen Querschnittes PM' sofort: $\frac{1}{2}qx = \frac{1}{6}F\frac{b y^2}{x}$, sowie für den Querschnitt CF: $\frac{1}{2}ql = \frac{1}{6}F\frac{b h^2}{l}$, und es folgt aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen $l^2 y^2 = h^2 x^2$ oder $y = \frac{h}{l}x$, als Gleichung der

Geraden AME, woraus sofort folgt, dass die untere Begrenzungsfläche AF des Prisma eine Ebene ist.

Die Höhe des Prisma am letzten Querschnitt CF ergibt sich aus der Gleichung $h = l\sqrt{\frac{3q}{bF}}$.

85. Ist der prismatische Körper im letzteren Falle bloss durch sein eigenes Gewicht belastet, so sei wieder (Fig. 63) $CD = PQ = b$ die constante Breite, $CE = DF = h$, $AC = l$, und für einen verticalen Querschnitt PN sofort $AP = x$, $PM = y$, sowie für einen zweiten, zwischen dem vorigen und dem freien Ende des Prisma liegenden Querschnitt $P'N'$, ebenso $AP' = x'$ und $P'M' = y'$; ausserdem sei für einen diesem letzteren unendlich nahe liegenden Querschnitt $P'p = dx'$, sowie endlich γ das Gewicht der cubischen Einheit des prismatischen Körpers. Diess vorausgesetzt, ist das Gewicht des Körperelementes $pN' = \gamma b y' dx'$ und dessen Moment gegen den Querschnitt $PN = \gamma b y' dx' (x - x')$, folglich ist die Summe der Momente aller der den Körper bildenden Elemente, d. i. des Gewichtes des ganzen Körpers

$$= \gamma b \int_0^x y' dx' (x - x').$$

Soll nun ein in A aufgehängtes Gewicht Q gegen diesen Querschnitt PN dieselbe Wirkung hervorbringen, so muss:

$$Qx = \gamma b \int_0^x y' dx' (x - x') \text{ oder wegen } Qx = \tfrac{1}{6} F b y^2$$

und wenn man Kürze halber $\frac{1}{6}\frac{F}{\gamma} = A$ setzt, auch:

$$\int_0^x y' dx' (x - x') = A y^2 \text{ sein.}$$

Um nun aus dieser Bedingungsgleichung die Gleichung $y = f(x)$ oder $y' = f(x')$ der Begrenzungscurve AME zu finden, wollen wir dieselbe zweimal nach x differenziiren; dadurch entsteht zuerst $y' dx' (x - x') = A d.y^2$ und dann $y' dx' dx = A d^2.y^2$, oder, wenn man x' in x, also auch y' in y übergehen lässt, $y dx^2 = A d^2.y^2$, woraus $\frac{d^2.y^2}{dx^2} = \frac{y}{A}$, und wenn man diese Gleichung zweimal integrirt, sofort: $y = \frac{x^2}{12A}$ folgt*).

---

*) Setzt man nämlich $y^2 = z$ und multiplicirt zugleich die obige Gleichung $\frac{d^2.y^2}{dx^2} = \frac{y}{A}$ mit dz, so erhält man $dz\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{A}$, und wenn man integrirt:

Diese Gleichung, welche, wenn für A der Werth hergestellt wird, die Form $x^2 = \frac{2F}{\gamma} y$ annimmt, gehört einer gemeinen Parabel AME vom Parameter $\frac{2F}{\gamma}$ an, deren Achse in der durch A gehenden lothrechten Linie und deren Scheitel in A liegt.

86. Um ferner auch den Fall zu behandeln, in welchem der prismatische Körper horizontal an beiden Enden A, B (Fig. 64) frei aufliegt und in irgend einem Puncte D mit dem Gewichte Q belastet ist, sei, um wieder die Querschnitte von gleicher Festigkeit unter der Voraussetzung zu finden, dass sämmtliche Querschnitte von derselben horizontalen Breite b sein sollen, sofort $AB = l$, $AD = a$, $BD = l - a = a'$ und $DC = h$, sowie für einen zwischen A und C liegenden Punct M der gesuchten Curve $AP = x$ und $PM = y$; dann ist der vom Gewichte Q auf den Punct P ausgeübte Druck q, wegen $q(l - x) = Qa'$ sofort

$$q = \frac{Qa'}{l - x}.$$

Da ferner die Festigkeit des Querschnittes PM [§. 134, Gleichung (5)] durch $q = \frac{1}{6} Fby^2 \frac{l}{x(l-x)}$ ausgedrückt wird, so erhält man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von q:

$$y^2 = \frac{6Qa'}{Fbl} x,$$

oder wegen $Q = \frac{1}{6} Fbh^2 \frac{l}{aa'}$, auch, wenn man substituirt:

$$y^2 = \frac{h^2}{a} x,$$

als Gleichung der Begrenzungscurve AMC, nämlich einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a}$, deren Scheitel in A und Achse in AB liegt.

Auf ganz gleiche Weise findet man auch für die Begrenzungscurve $BM'C$ eine solche Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a'}$, deren Scheitel in B und Achse wieder in AB liegt.

$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{A}$ oder $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{4}{3A}} . z^{\frac{3}{4}}$, d. i. $z^{-\frac{3}{4}} dz = \sqrt{\frac{4}{3A}} dx$, folglich durch die zweite Integration: $4z^{\frac{1}{4}} = x\sqrt{\frac{4}{3A}}$, oder $16z^{\frac{1}{2}} = \frac{4x^2}{3A}$, d. i. den Werth für z wieder hergestellt:

$$4y = \frac{x^2}{3A}, \text{ oder } y = \frac{x^2}{12A}.$$

Ist die Last in der halben Länge des Körpers angebracht, so erhalten beide Parabeln denselben Parameter $\frac{2h^2}{l}$ und besitzen gegen die mittlere Verticale eine symmetrische Lage.

87. Es sei endlich die Last Q über die Länge des auf beiden Enden frei aufliegenden prismatischen Körpers gleichmässig vertheilt und es werde wieder gefordert, dass die Querschnitte Rechtecke von durchaus gleicher (horizontaler) Breite b sein sollen. Setzt man die Entfernung der beiden Stützen $AB = l$ (Fig. 65) $\frac{1}{2}l = a$ und die bei dieser Breite b auf die Längeneinheit entfallende Belastung $= q$, so wird jede der beiden Stützen A und B mit dem Gewichte aq gedrückt, und jede Hälfte des Körpers von gleichem Widerstande, wie jene ACD, befindet sich in derselben Lage, als ob diese Hälfte im Querschnitt CD befestigt, im Puncte A (und beziehungsweise B) mit der Kraft aq vertical aufwärts gezogen und mit dem über die ganze Länge AC (oder BC) gleich vertheilten Gewichte aq belastet wäre.

Ist nun $CD = h$ die Höhe des Prisma in der Mitte oder halben Länge, sowie $PM = y$ jene in der Entfernung $CP = x$; so ist in Bezug auf den durch PM gehenden Querschnitt das statische Moment der in A aufwärts wirkenden Kraft aq gleich $aq(a-x)$, sowie das Moment der über AP gleich vertheilten Last $(a-x)q = \frac{1}{2}(a-x)q \times (a-x) = \frac{1}{2}q(a-x)^2$, folglich ist die Differenz beider Momente $= aq(a-x) - \frac{1}{2}q(a-x)^2 = \frac{1}{2}q(a-x)^2$, mit welchem der Bruch in PM bewirkt werden muss. Da aber dieses Moment auch gleich $\frac{1}{6}Fby^2$ ist, so folgt die Gleichung $\frac{1}{6}Fby^2 = \frac{1}{2}q(a-x)^2$ und daraus $y^2 = \frac{3q}{Fb}(a^2 - x^2)$, oder da für den mittleren Querschnitt CD offenbar $\frac{1}{2}aq = \frac{1}{6}F\frac{bh^2}{a}$ ist, woraus $\frac{3q}{Fb} = \frac{h^2}{a^2}$ folgt, auch: $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, als Gleichung der gesuchten Begrenzungscurve AMB, die also einer Ellipse von den Achsen $2a = l$ und $2h = l\sqrt{\frac{3q}{Fb}}$ angehört, deren grosse Achse $2a = l$ mit AB zusammenfällt.

Gleichung der elastischen Linie. Bestimmung des Coefficienten oder Moduls der Elasticität.

88. Es sei der prismatische Körper, dessen eigenes Gewicht hier wieder vorläufig ausser Acht gelassen wird, wie früher horizontal an dem einen Ende eingemauert oder unveränderlich be-

festigt und am anderen freien Ende mit dem Gewichte oder einer vertical wirkenden Kraft Q so weit belastet, dass die dadurch entstehende Biegung noch vollständig innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt; dabei stelle AMB (Fig. 69) die neutrale Achsenschichte von der Länge l vor, deren Puncte M durch die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ festgesetzt, die Abscissen also auf der durch den tiefsten Punct A gehenden Geraden AC gezählt werden sollen. Ferner bilde die im Puncte M an diese Curve gezogene Tangente mit der Horizontalen AC den Winkel α, dagegen im Anfangspuncte A den Winkel φ; ferner sei ϱ der Krümmungs-Halbmesser der Curve im Puncte M, der Bogen $AM = s$, die ganze Länge AMB (gleich der ursprünglichen Länge des Prisma) $= l$, sowie die dem Endpunct B entsprechende Abscisse $AC = a$ und endlich der Biegungspfeil $A'A = BC = \delta$.

Diess vorausgesetzt hat man zuerst, wenn ε wieder das Biegungsmoment bezeichnet (Relat. (3) in Nr. **60** und Relat. (2) in Nr. **58**): $\frac{\varepsilon}{\varrho} = Qx \ldots (n)$. Ferner ist (Comp. d. h. Mathem. §. 728) $\varrho = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, oder da für so geringe Biegungen, wie sie vorausgesetzt werden, $tang\, \alpha = \frac{dy}{dx}$ so klein wird, dass man die 2te Potenz davon gegen 1 auslassen kann, auch:

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}.$$

Setzt man diesen Werth für ϱ in die vorige Gleichung (n), so erhält man $(r) \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{\varepsilon}x$, oder: $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Q}{\varepsilon}x\,dx$, und daraus durch Integration: $\frac{dy}{dx} = C - \frac{Q}{\varepsilon}\frac{x^2}{2}$, wo C die unbestimmte Constante bezeichnet. Um diese zu bestimmen, bemerke man, dass für $x = a$ die Ordinate $y = \delta$ am grössten und $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; es ist also $C = \frac{Q}{\varepsilon}\frac{a^2}{2}$ und daher:

$$dy = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2 - x^2)\,dx \ldots (m).$$

Aus dieser Gleichung folgt durch abermalige Integration:

$$y = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) \ldots (1),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, und dieses ist sofort die G l e i c h u n g d e r e l a s t i s c h e n L i n i e.

89. Da, wie bereits erwähnt, $y = \delta$ für $x = a$ wird, so hat man aus der vorigen Gleichung für den Biegungspfeil:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \frac{Q}{\varepsilon} a^3 \ldots (2).$$

Da ferner für $x = 0$ die Tangente $\frac{dy}{dx} = tang\,\varphi$ sein soll, so folgt aus der Relat. (m): $tang\,\varphi = \frac{Q a^2}{2\varepsilon}$, oder mit Rücksicht auf die vorige Relat. (2): $tang\,\varphi = \frac{3}{2} \frac{\delta}{a} \ldots (3)$.

Für die Länge der Curve hat man $l = \int_0^a dx \sqrt{l + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, oder, da für eine geringe Biegung $\frac{dy}{dx}$ sehr klein ist, nahe genug:

$$l = \int_0^a dx \left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = \int_0^a \left[dx + \frac{Q^2}{8\varepsilon^2}(a^2 - x^2)^2 dx\right]$$

mit Rücksicht nämlich auf die obige Gleichung (m), oder wenn man die Integration ausführt und reducirt: $l = a + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \frac{a^5}{15}$, oder auch, wenn man l durch den Pfeil δ ausdrücken will, wegen Gleichung (2): $l = a + \frac{3}{5} \frac{\delta^2}{a} \ldots (4)$, woraus auch unmittelbar folgt, dass für geringe Biegungen $a = l$ gesetzt werden kann.

90. Aus der obigen Gleichung (2) folgt $\varepsilon = \frac{1}{3} Q \frac{a^3}{\delta}$, oder wenn man den Werth für das Biegungsmoment ε aus Nr. **60.** substituirt und den in den Parenthesen stehenden Ausdruck wieder Kürze halber durch X bezeichnet, wodurch $\varepsilon = EX$ wird, auch $EX = \frac{1}{3} Q \frac{a^3}{\delta}$, und daraus erhält man für den Modul oder Coefficienten der Elasticität den Ausdruck:

$$E = \tfrac{1}{3} \frac{Q}{X} \frac{a^3}{\delta} \ldots (5).$$

Dabei erhält man, ohne erst die Integralausdrücke in der Gleichung (3) Nr. **60.** wieder neuerdings entwickeln zu müssen, für die in den Nummern **62.** bis **70.** behandelten Querschnitte den entsprechenden Werth von X, wenn man aus diesen Nummern die Werthe von $\frac{\varepsilon}{E}$ nimmt. So ist z. B. für einen rechteckigen Querschnitt, wie er in **62.** behandelt wurde, $X = \frac{\varepsilon}{E} = \frac{1}{12} b h^3$;

in der Lage von **63.** ist $X = \frac{1}{12} b h (h^2 \, Sin \varphi^2 + b^2 \, Cos \varphi^2)$. Für einen dreieckigen Querschnitt (Nr. **64.**) ist $X = \frac{1}{36} b h^3$ u. s. w.

Will man nun z. B. die Biegung eines prismatischen, an dem einen Ende eingemauerten und am freien Ende mit Q belasteten Körpers von rechteckigem Querschnitt, von der Breite b und Höhe h, ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht bestimmen; so darf man nur aus der obigen Gleichung (5) δ suchen und $X = \frac{1}{12} b h^3$ setzen. Man erhält dadurch für den Biegungspfeil:

$$\delta = \frac{4 Q a^3}{E b h^3},$$

wobei man ohne Fehler a für die Länge l des Prisma nehmen kann.

Anmerkung. Es mag hier bemerkt werden, dass für Körper von gleichem Widerstande die Biegung bei derselben Belastung eine grössere ist. Betrachtet man z. B. jenen in Nr. **82.** behandelten Fall, in welchem die Querschnitte durchaus Rechtecke von gleicher Breite sind und wofür wir als Begrenzungscurve eine Parabel gefunden haben, deren Gleichung $y^2 = \frac{h^2}{l} x \ldots (\alpha)$ ist, so wird man zur Bestimmung des Pfeiles δ' in der ursprünglichen Gleichung (r) in Nr. **88.**, d. i. in $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Qx}{\varepsilon} = -\frac{Qx}{EX}$ für X den Werth, welcher sich auf den Querschnitt von der constanten Breite b und variabeln Höhe y, im Abstande x vom freien Ende bezieht, d. i. $X = \frac{1}{12} b y^3$ setzen, und wieder zweimal integriren.

Man erhält nämlich, wenn man unter einem in X für y den Werth $h\sqrt{\frac{x}{l}}$ aus der vorigen Relation (α) setzt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{12 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} x^{-\frac{1}{2}}$$

und daraus als erstes Integral (da für $x = l$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ ist):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} (\sqrt{l} - \sqrt{x}),$$

und als zweites Integral (da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist):

$$y = \frac{24 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} (x\sqrt{l} - \tfrac{2}{3} x \sqrt{x}).$$

Aus dieser Gleichung folgt nun $y = \delta'$ für $x = l$, so dass der gesuchte Biegungspfeil $\delta' = \frac{8 Q l^3}{E b h^3}$, also doppelt so gross ist, als jener δ für Querschnitte von gleichen Höhen, wenn man nämlich $a = l$ setzt.

Ebenso findet man, wenn man eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last annimmt, dass der Biegungspfeil δ' viermal so gross als δ ist, wenn sich letzterer auf Querschnitte von durchaus gleichen Höhen bezieht u. s. w.

91. Aus der obigen Relation (n) (Nr. **88.**) folgt für den Krümmungs-Halbmesser der Werth $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qx}$, und da dieser, wie bereits (**71.**) bemerkt, für $x = a$ am kleinsten, die Biegung des Prisma also am letzten oder eingemauerten Querschnitt am grössten wird, so wird dasselbe auch an dieser Stelle am ersten brechen (oder dieser Querschnitt, von Einigen der „gefährliche“ genannt, ist gleichsam der schwächste). Damit nun aber an dieser Stelle die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, darf (Nr. **71.**) $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qa}$ nicht kleiner sein als $\frac{E}{T}c$, mithin ist an dieser Grenze selbst $\frac{\varepsilon}{Qa} = \frac{E}{T}c$ zu setzen, woraus sofort für die grösste Belastung $Q = \frac{\varepsilon T}{Eac} \ldots (6)$ folgt, d. h. dieser Werth von Q darf als Belastung am freien Ende des prismatischen Körpers nicht über schritten werden, wenn derselbe diese Last noch mit Sicherheit soll tragen können.

Setzt man in dem vorigen Ausdrucke statt dem Trag- den Festigkeits-Coefficienten F, so erhält man $Q = \frac{\varepsilon F}{Eac}$ als diejenige kleinste Last, bei welcher der Körper am eingemauerten Ende brechen wird (vergl. Nr. **72**).

92. Um jetzt auch die Biegung des prismatischen Körpers unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass ausser dem am freien Ende angebrachten Gewichte Q auch noch eine Last gleichförmig über dessen Länge vertheilt oder angebracht ist, sei p das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Abscissenachse (als Projection) entfällt, dann kommt auf die Abscisse $AP = x$ (Fig. **69.**) das Gewicht px und das von diesem auf den Querschnitt M ausgeübte Moment ist $= \frac{1}{2}px \cdot x = \frac{1}{2}px^2$ und man muss offenbar zur Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingung in der obigen Gleichung (n) (Nr. **88.**) $Qx + \frac{1}{2}px^2$ statt dem dortigen Moment Qx setzen. Dadurch erhält man durch Einhalten oder Wiederholung desselben Verfahrens, wie es in Nr. **88.** durchgeführt wurde, ohne Schwierigkeit, zuerst als Gleichung der Curve:

$$y = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3) + \frac{p}{6\varepsilon}(a^3x - \tfrac{1}{4}x^4) \ldots (1),$$

und daraus für den Biegungspfeil (wenn man $x = a$ und $y = \delta$ setzt):

$$\delta = \frac{a^3}{\varepsilon}(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}pa),$$

oder wenn man das ganze über die Länge a gleich vertheilte Gewicht, d. i. $pa = G$ setzt, auch:

$$\delta = \frac{a^3}{\varepsilon}(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}G) = \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{\varepsilon}(Q + \tfrac{3}{8}G) \ldots (2).$$

Ist $Q = 0$, so ist $\delta = \frac{1}{8}\frac{a^3}{\varepsilon}G$, während, wenn dieses Gewicht bloss am freien Ende des Prisma angebracht wäre, die Biegung durch [**89.**, Relat. (2)] $\delta' = \frac{1}{3}\frac{a^3}{\varepsilon}G$ ausgedrückt würde: es verhalten sich also die beiden Biegungspfeile $\delta : \delta' = \frac{1}{8} : \frac{1}{3} = 3 : 8$.

Lässt man G für das eigene Gewicht des prismatischen Körpers gelten, so folgt also, dass dasselbe in Bezug auf die dadurch hervorgebrachte Biegung gerade so wirkt, als wenn davon $\frac{3}{8}$ am freien Ende des Körpers angebracht, also das Aufhänggewicht Q um $\frac{3}{8}G$ vermehrt worden wäre (wobei dann der Körper als gewichtslos zu betrachten ist).

93. Mit Rücksicht auf die obige Bemerkung (dass man $Qx + \frac{1}{2}px^2$ statt Qx setzen muss) und mit Beibehaltung derselben Bezeichnungen, erhält man in dem vorliegenden Falle für den Krümmungs-Halbmesser [**88.**, (n)] $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qx + \frac{1}{2}px^2}$, also für den letzten oder schwächsten Querschnitt in B:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Qa + \frac{1}{2}pa^2} = \frac{\varepsilon}{(Q + \frac{1}{2}G)a}.$$

An der Elasticitätsgrenze ist wieder, wie oben (**91.**), $\varrho = \frac{Ec}{T}$, folglich, wenn man diesen Werth dem nächst vorhergehenden gleich setzt und die dieser Grenze entsprechende Belastung bestimmt:

$$Q + \tfrac{1}{2}G = \frac{\varepsilon T}{Eac}.$$

Hiebei kommt also das über die Länge des Prisma gleich vertheilte Gewicht auf den Aufhängpunct am freien Ende reducirt mit der Hälfte in Rechnung.

94. Wir wollen endlich noch den Fall untersuchen, in welchem der prismatische Körper an beiden Enden horizontal auf zwei Stützen frei aufliegt und an einem beliebigen Puncte belastet ist.

Es sei zu diesem Ende die Entfernung der beiden Stützen $AB = a$ (Fig. 71), AFB die innerhalb der Elasticitätsgrenze, durch das im Puncte F aufgehängte Gewicht Q gebogene neutrale Achsenschichte (diese als gewichtslos angesehen), $AD = BD = b$, $DE = z$, $EF = \delta$; für die Curve AMF seien für einen beliebigen Punct M die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, und für einen Punct M' der Curve $BM'F$, ebenso $BP' = x$, $P'M' = y$. Diess angenommen ist der Druck auf die Stützen A und B beziehungsweise:

$$p = \tfrac{1}{2} Q \frac{(b+z)}{b} \text{ und } p' = \tfrac{1}{2} Q \frac{(b-z)}{b},$$

und die beiden Theile AF und BF des Körpers befinden sich in derselben Lage, als ob sie in F eingemauert und beziehungsweise durch die Kräfte p und p' vertical aufwärts gebogen würden. Nun ist [Relat. (r) in Nr. 88.] für das Stück AMF:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{\varepsilon} x, \text{ oder wenn man integrirt: } \frac{dy}{dx} = C - \frac{p}{2\varepsilon} x^2.$$

Zur Bestimmung der Constanten C setze man den Winkel, welchen die an die Curve AMF in F gezogene Tangente mit der Horizontalen AB bildet $= \alpha$, so wird für $x = AE = a - z$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, folglich, wenn man diesen Werth substituirt, die Constante C aus der entstehenden Gleichung bestimmt und den erhaltenen Werth in die vorige Differentialgleichung einsetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\varepsilon}[(b-z)^2 - x^2] + tang\,\alpha.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch abermaliges Integriren:

$$y = \frac{p}{2\varepsilon}[(b-z)^2 x - \tfrac{1}{3} x^3] + x\,tang\,\alpha,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss.

Da nun für $x = AE = b - z$ die Ordinate $y = EF = \delta$ sein soll, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \frac{p}{\varepsilon} (b-z)^3 + (b-z)\,tang\,\alpha.$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man für die Curve $BM'F$ die Gleichung:

$$y = \frac{p'}{2\varepsilon}[(b+z)^2 x - \tfrac{1}{3} x^3] - x\,tang\,\alpha$$

und
$$\delta' = \tfrac{1}{3} \frac{p'}{\varepsilon} (b+z)^3 - (b+z)\,tang\,\alpha.$$

95. Da nun $\delta' = \delta$ ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe, und wenn man dann aus der entstehenden Gleichung $tang\,\alpha$ bestimmt:

$$tang\,\alpha = \frac{1}{6b\varepsilon}[p'(b+z)^3 - p(b-z)^3],$$

oder für p und p' die obigen Werthe gesetzt und gehörig reducirt:

$$tang\,\alpha = \tfrac{1}{3}\frac{Q}{b\varepsilon}z(b^2-z^2)\ldots(q).$$

Mit diesem Werthe von $tang\,\alpha$ erhält man aus einem der beiden vorigen Ausdrücke von δ oder δ', wenn man auch gleich $\frac{1}{2}a$ statt b setzt, sofort:

$$\delta = \frac{Q}{3a\varepsilon}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)^2 \ldots (r).$$

96. Um die dem tiefsten Punct der gebogenen Schichte ACB entsprechende Ordinate y zu finden, muss man aus der Gleichung der Curve $BM'F$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ suchen und nach der bekannten Regel verfahren. Nun ist die Gleichung dieser Curve nach Nr. **94.**, wenn man sogleich für p' wieder den obigen und auch für $tang\,\alpha$ den Werth aus (q) setzt und reducirt:

$$y = \frac{Q(b-z)}{2b\varepsilon}[\tfrac{1}{2}(b+z)^2x - \tfrac{2}{3}(b+z)zx - \tfrac{1}{6}x^3].$$

Bestimmt man jetzt daraus den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, setzt diesen gleich Null und sucht x, so hat man als Abscisse BL dieses gesuchten tiefsten Punctes O:

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}(3b^2 + 2bz - z^2)} = \sqrt{(b+z)(b-\tfrac{1}{3}z)}.$$

Da nun aber immer $z < b$ ist, so folgt, dass $x > b$ und $< b+z$ sei, also liegt der tiefste Punct O zwischen den Puncten C und F.

Die entsprechende Ordinate LO erhält man, wenn man diesen Werth von x in den vorhergehenden von y setzt, und zwar ist, wenn man für b den Werth $\frac{1}{2}a$ setzt:

$$LO = \frac{Q(\frac{1}{2}a - z)}{3a\varepsilon}[(\tfrac{1}{2}a+z)(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}z)]^{\frac{3}{2}}.$$

97. Nach Relat. (n) in Nr. **88.** erhält man für den Krümmungs-Halbmesser der Curve AMF: $\varrho = \frac{\varepsilon}{px}$ und für jene

$BM'F$: $\varrho = \frac{\varepsilon}{p'x}$, oder wenn man für p und p' die Werthe (aus **94.**) setzt, beziehungsweise:

$$\varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b+z)x} \text{ und } \varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b-z)x}.$$

Diese werden aber am kleinsten, beziehungsweise für $x = AE = b - z$ und $x = BE = b + z$, wodurch sie die gleichen Werthe erhalten:

$$\varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b^2 - z^2)}$$

und woraus sofort folgt, dass die Curve (oder das Prisma) im Belastungspunct F am stärksten gebogen ist.

Damit an dieser Stelle die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, muss wieder $\varrho = \frac{E}{T}c$, d. i. $\frac{E}{T}c = \frac{a\varepsilon}{Q(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}$ sein, woraus sonach für die grösste zulässige Belastung in diesem Puncte $Q = \frac{Ta\varepsilon}{Ec(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}$ folgt.

98. Endlich erhält man noch für die Länge der neutralen Schichte $l = l' + l''$, wenn man $AMF = l'$ und $BM'F = l''$ setzt. Nun ist aber nach Gleichung (4) in Nr. **89.**: $l' = b - z + \frac{3}{5}\frac{\delta^2}{b-z}$ und $l'' = b + z + \frac{3}{5}\frac{\delta^2}{b+z}$ demnach $l' + l'' = l = 2b + \frac{3}{5}\delta^2\frac{2b}{b^2 - z^2} = a + \frac{3}{5}\frac{a}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}\delta^2$, oder wenn man für δ den Werth aus Relat. (r) in **95.** substituirt und abkürzt:

$$l = a + \frac{Q^2}{15a\varepsilon^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)^3.$$

99. Wird die Last Q in der Mitte zwischen den beiden Stützen, nämlich im Puncte C angebracht, so wird $z = 0$ und man erhält für diesen speciellen einfachern Fall (Fig. 71') der Reihe nach:

Aus Nr. **96** für die Gleichung der Curve ACB:

$$y = \frac{Q}{12\varepsilon}(\tfrac{1}{2}a^2 x - x^3).$$

Aus **95.** für den Biegungspfeil:

$$\delta = \frac{Q}{\varepsilon}\frac{a^3}{48},$$

welcher Werth, wie es sein soll, mit der grössten Ordinate LO in **96.** zusammenfällt, weil hier der Aufhängpunct C zugleich auch der tiefste ist.

Aus **97**. folgt der Krümmungs-Halbmesser:

$$\varrho = \frac{2\varepsilon}{Qx},$$

und für den tiefsten Punct C:

$$\varrho = \frac{4\varepsilon}{Qa}.$$

Für die grösste, noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung folgt aus **97**:

$$Q = \frac{4T\varepsilon}{Eac},$$

sowie endlich aus **98**. für die Länge der Curve ACB:

$$l = a + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{a^5}{960}.$$

100. Will man endlich im vorliegenden Falle, in welchem nämlich die Last Q in der Mitte zwischen beiden Stützen angebracht ist, bei der Bestimmung des Biegungspfeiles auch das eigene Gewicht G des Prisma mit berücksichtigen; so darf man nur jede Hälfte der Curve oder des Stabes ACB, wie z. B. AC (Fig. 71′) so ansehen, als ob der Stab in C eingemauert und in A mit der Kraft $q = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}G$ vertical aufwärts gezogen wäre. Für diesen Fall darf man aber in dem Ausdrucke (2), Nr. **92**., des Pfeiles, in welchen man mit Rücksicht auf die gewählte Bezeichnung $\frac{1}{2}G$ statt G und $\frac{1}{2}a$ statt a zu setzen hat, nur das Gewicht des Prisma negativ nehmen (da dasselbe der Kraft q entgegen wirkt). Dadurch wird für den vorliegenden Fall:

$$\delta = \frac{a^3}{24\varepsilon}(q - \tfrac{3}{16}G),$$

oder wenn man für q den Werth setzt und reducirt:

$$\delta = \frac{a^3}{48\varepsilon}(Q + \tfrac{5}{8}G) \ldots (s).$$

Dieser Ausdruck zeigt zugleich, dass eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last G gerade so wirkt, als ob an dem gewichtslosen Stabe in der Mitte ein Gewicht von $\frac{5}{8}G$ angebracht wäre, oder die Biegungen, welche entstehen, wenn eine (immer innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende) Last Q einmal über die ganze Länge gleich vertheilt, und das zweite Mal (den Stab als gewichtslos betrachtet) in der Mitte angebracht wird, verhalten sich wie 5 : 8.

Anmerkung 1. Für die practische Bestimmung des Moduls der Elasticität ist es am bequemsten, Prismen aus dem betreffenden Materiale auf zwei Stützen horizontal frei aufzulegen, dasselbe in der Mitte, und zwar nur innerhalb der Elasticitätsgrenze zu belasten und dafür den Biegungspfeil zu beobachten.

Um nun dafür die entsprechende Formel aufzustellen, darf man nur aus dem vorigen Werthe von δ das Biegungsmoment ε ausdrücken und in dem Ausdrucke $\varepsilon = EX$ (Nr. **90.**) substituiren. Dadurch erhält man für den Elasticitäts-Coefficienten:

$$E = \frac{a^3}{48\,\delta X}(Q + \tfrac{5}{8}G).$$

Wählt man nun z. B. für das Prisma den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und verticalen Höhe h, so ist (**90.**) $X = \frac{1}{12}bh^3$, folglich dafür:

$$E = \frac{a^3}{4bh^3\delta}(Q + \tfrac{5}{8}G).$$

Anmerkung 2. Vermehrt man im letzteren Falle das Gewicht Q um das Zulagegewicht q und bringt das Gewicht $Q + q$ (welches immer noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend angenommen wird) die stärkere Biegung δ' hervor, so wird, wenn man δ' nach der obigen Formel (s) ausdrückt und davon den Werth von δ abzieht, die Zunahme der Biegung durch $\delta' - \delta = \frac{qa^3}{48\varepsilon}$ bestimmt. Daraus folgt aber wieder $\varepsilon = EX = \frac{qa^3}{48(\delta' - \delta)}$ und daraus, wenn man einen rechteckigen Querschnitt annimmt, also $X = \frac{1}{12}bh^3$ setzt, als Modul der Elasticität:

$$E = \frac{qa^3}{4bh^3(\delta' - \delta)}.$$

Durch diese Formel wird das einfachste und bequemste Verfahren zur Bestimmung dieses Moduls oder Coefficienten E begründet.

d) *Widerstand eines vertical stehenden Prisma, dessen oberes Ende lothrecht belastet ist, gegen Ausbiegung.*

101. Es sei AE (Fig. 72) ein mit seinem unteren Ende BE auf einen festen horizontalen Boden sich stützender verticaler Stab oder ein Prisma, dessen oberes Ende mit dem Gewichte Q belastet ist und dadurch eine noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Ausbiegung erlangt, bei welcher die neutrale Achsenschichte die Curve ACB bildet; ferner sei die Länge der neutralen Schichte oder der Curve $ACB = l$, die Entfernung $AB = a$, ferner für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und ϱ der Krümmungs-Halbmesser, sowie endlich wieder ε das Biegungsmoment des Prisma.

Diess vorausgesetzt, fordert das Gleichgewicht, dass in jedem Puncte der neutralen Achsenschichte ACB das statische Moment des Widerstandes gegen die Biegung dem Momente der auf das Prisma wirkenden Kräfte gleich sei.

Da sonach der vorliegende Fall mit jenem in Nr. 88. behandelten ganz analog ist, indem auch hier die Curve ihre concave Seite der Abscissenachse AB zukehrt (also, Comp. §. 728, der Krümmungs-Halbmesser mit negativen Zeichen zu nehmen) ist, so darf man in der dortigen Gleichung (r) nur das Moment Qy statt Qx setzen, und man erhält für das Gleichgewicht im gegenwärtigen Falle: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{\varepsilon}y$.

Wird diese Gleichung wieder zweimal integrirt, so erhält man als vollständiges Integral:

$$y = A\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) + B\,Cos\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right),$$

wobei A und B die zwei unbestimmten Constanten bezeichnen. Da nun aber für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, so folgt sogleich, dass $B = 0$ ist. Bezeichnet man ferner auch hier den Biegungspfeil DC durch δ, so fällt dieser mit der grössten Ordinate y zusammen; da aber y am grössten wird, wenn der Sinus seinen grössten Werth erreicht, d. i. wenn $Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1$ wird, so hat man $\delta = A$, wodurch sofort auch die 2te Constante bestimmt ist. Es geht sonach die vorige Gleichung in folgende über:

$$y = \delta\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) \ldots (1).$$

102. Da für $x = a$ abermals $y = 0$ sein muss, so folgt aus dieser Gleichung (weil δ von Null verschieden) $0 = Sin\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)$, es muss daher $a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = n\pi$, also $a = n\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$ und $Q = \frac{n^2\pi^2\varepsilon}{a^2}$ sein, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Denkt man sich an den beiden Endpuncten A und B, an die Curve ACB die Tangenten gezogen und bezeichnet die Winkel derselben mit der verticalen Abscissenachse AB beziehungsweise durch φ und φ'; so ist wegen [aus Gleich. (1)]

$$\frac{dy}{dx} = \delta\,Cos\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)\cdot\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$$

sofort für $x = 0$: $tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ und für $x = a$: $tang\,\varphi' = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\,Cos\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)$, oder wenn man für a den obigen Werth setzt: $tang\,\varphi' = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\,Cos\,n\pi$, d. i. $tang\,\varphi' = \pm\,\delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$, so dass also

$tang\,\varphi' = \pm\, tang\,\varphi$ ist, d. h. die beiden in A und B an die Curve gezogenen Tangenten bilden mit der Verticalen gleiche Winkel.

103. Setzt man den obigen Werth von Q in die Gleich. (1) und Kürze halber $\frac{n\pi}{a} = b$, so wird $y = \delta\, Sin\, b\, x$ und daraus $\frac{dy}{dx} = b\,\delta\, Cos\, b\, x$, folglich $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = [1 + b^2\delta^2(Cos\, b\, x)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} b^2\delta^2 (Cos\, b\, x)^2$, wenn man nämlich die folgenden Potenzen der kleinen Grösse $b\,\delta\, Cos\, b\, x$ vernachlässigt, mithin endlich:

$$l = \int_0^a dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^a dx\, [1 + \tfrac{1}{2} b^2\delta^2 (Cos\, b\, x)^2] = a + \tfrac{1}{2} b^2 \delta^2\, {}^{*})$$

d. i. wenn man für b den Werth wieder herstellt:

$$l = a\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{a}\delta\right)^2\right]$$

und daraus, wenn man den Pfeil durch die Länge l ausdrücken will:

$$\delta = \frac{1}{n\pi}\sqrt{2a\,(l-a)}.$$

Da ferner aus dem obigen Werthe für Q sofort $\frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{Q}{\varepsilon}$ folgt, so hat man auch:

$$l = a\left(1 + \frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{\delta^2}{2}\right) \text{ und } \delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon\,(l-a)}{a\,Q}}.$$

Anmerkung. Da die neutrale Achsenschichte durch das Gewicht Q um die Grösse $\frac{lQ}{E\omega}$ zusammengedrückt wird, wenn ω den Querschnitt des Prisma bezeichnet (Nr. **53.**), so muss man, um die ursprüngliche Länge des Prisma zu erhalten, diesen Werth zu dem vorigen von l addiren.

104. Der Krümmungs-Halbmesser der neutralen Achsenschichte ACB ist [88., (n)] $\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{Qy}$.

Für $y = 0$ wird $\varrho = \infty$, zum Beweis, dass die Curve in A und B Wendepuncte besitzt.

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 838) $\int dx\,(Cos\, b\, x)^2 = \frac{Sin\, b\, x\, Cos\, b\, x}{2b} + \frac{x}{2}$, also innerhalb der Grenzen von 0 bis a gleich $\frac{Sin\, 2\, a\, b}{4b} + \frac{a}{2}$, oder wenn man $Sin\, 2\, a\, b$ in die bekannte Reihe auflöst und davon nur das 1te Glied beibehält $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$.

Für $y = \delta$, als grössten Werth von y, erhält ϱ seinen kleinsten Werth.

Nach der obigen Bemerkung (**101.**) wird die Abscisse für diese grösste Ordinate oder den Pfeil δ aus der Gleichung $Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1$ bestimmt; nun folgt aber hieraus:

$$x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi,$$

folglich:
$$x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},$$

wobei $m = 0$ oder was immer für eine ganze Zahl sein kann, wenn nur dafür $x < a$ bleibt. (Die obigen Werthe von a und x zeigen, dass dafür immer $m < n$ sein muss.) Lässt aber diese letztere Bedingung mehrere Werthe für m zu, so besitzt auch die Achsenschichte mehrere grösste Werthe von y, die alle $= \delta$ sind.

Setzt man nun $n = 1$, so wird aus den obigen Relationen:

$$a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},\ Q = \frac{\pi^2\varepsilon}{a^2},\ tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = \pi\frac{\delta}{a},\ \delta = \frac{1}{\pi}\sqrt{2a(l-a)}$$

und $x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)a$.

Da nun, der vorigen Bedingung gemäss, $m < 1$, also $m = 0$ sein muss, so kommt die grösste Ordinate $y = \delta$ nur in e i n e m Puncte und zwar für $x = \frac{1}{2}a$ vor.

Dieser Fall entspricht der Fig. 73, in welcher für $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ im Puncte D die grösste Ordinate $CD = \delta$ stattfindet.

Setzt man ferner $n = 2$, so wird:

$$a = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},\ Q = \frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2},\ tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 2\pi\frac{\delta}{a},\ \delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2a(l-a)}$$

und $x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\frac{a}{2}$.

Da nun hier $m = 0$ und $= 1$ sein kann, so kommt das Maximum der Ordinate in 2 Puncten vor, wofür die Abscissen sind:
$$x = \tfrac{1}{4}a \text{ und } x = \tfrac{3}{4}a.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$, so folgt dafür aus der obigen Gleichung (1) $y = 0$, zum Zeichen, dass die mittlere Achsenschichte die verticale Abscissenachse im Halbirungspuncte von AB durchschneidet.

Dieser Fall wird durch die Fig. 74 repräsentirt, in welcher $AC = \frac{1}{2}AB$, $AD = \frac{1}{2}AC$ und $CD' = \frac{1}{2}CB$ ist.

Auf gleiche Weise findet man, dass für $n = 3$ die Abscissenachse von der Curve in 2 Puncten und zwar in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Höhe dieser verticalen Achse geschnitten wird, und dass, weil hier $m = 0$, 1 und 2 sein kann, für die Ordinate 3 Maxima, und zwar für $x = \frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{5}{6}$ stattfinden u. s. w.

105. Nach den Bemerkungen in Nr. **71.** ist die Ausdehnung oder Verkürzung der Längeneinheit einer von der neutralen Achsenschichte um e abstehende Schichte $= \frac{e}{\varrho}$, wo für ϱ der kleinste Werth zu setzen ist. Da nun dieser hier (vorige Nr.) $= \frac{\varepsilon}{Q\delta}$ ist, so ist diese Ausdehnung oder Verkürzung im vorliegenden Falle $= \frac{Q\delta}{\varepsilon} e$.

Liegt nun z. B. in Fig 74 die auf der rechten Seite des prismatischen Körpers von der neutralen Schichte ACB am weitesten abstehende Schichte um c, dagegen jene der linken Seite um c' entfernt, so ist die Ausdehnung an der convexen Seite im Puncte $m' = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c$ und im Puncte $m = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c'$ und die Verkürzung auf der concaven Seite in $n' = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c'$ und in $n = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c$, oder es ist, mit Rücksicht auf die Bemerkung in **103.** (Anmerkung, wo $l = 1$ ist), die Verlängerung der Fasern der äussersten Schichte in den Puncten m' und m beziehungsweise $\frac{Q\delta}{\varepsilon} c - \frac{Q}{E\omega}$ und $\frac{Q\delta}{\varepsilon} c' - \frac{Q}{E\omega}$, sowie die Verkürzung in den Puncten n' und n:

$$\frac{Q\delta}{\varepsilon} c' + \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{Q\delta}{\varepsilon} c + \frac{Q}{E\omega}.$$

Nach der Bemerkung in Nr. **91.** muss, damit durch die Belastung Q an der Stelle der Curve, für welche der Krümmungs-Halbmesser am kleinsten ist, die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, an dieser Grenze $\varrho = \frac{E}{T} c$, also im vorliegenden Falle, wegen $\varrho = \frac{\varepsilon}{Q\delta}$ (als kleinster Werth) $\frac{T}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon}$ sein. Diese Relation auf die vorhin genannten Puncte $m, m' \ldots$ des prismatischen Körpers angewendet, hat man also an der Elasticitätsgrenze der c o n v e x e n Seite, in den Puncten m' und m beziehungsweise:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon} - \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{T_a}{E} = \frac{Q\delta c'}{\varepsilon} - \frac{Q}{E\omega}$$

und an dieser Grenze der **concaven** Seite, in n' und n:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{Q\delta c'}{\varepsilon} + \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{T_r}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon} + \frac{Q}{E\omega}.$$

Der aus diesen Gleichungen resultirende kleinste Werth von Q darf dann nicht überschritten werden.

106. Wie die obigen Werthe (**104.**) für a zeigen, so ist jener für $n = 1$, welchem Falle die Fig. 73 entspricht, der **kleinste**, und zwar ist $a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$, woraus, wie bereits bemerkt, $Q = \frac{\pi^2\varepsilon}{a^2}$ folgt. Da nun, wenn überhaupt eine Biegung eintreten soll, $a < l$ sein muss, so folgt für diesen Fall $Q > \frac{\pi^2\varepsilon}{l^2}$.

107. Ist das Prisma oder der Stab, dessen neutrale Achsenschichte AMB in Fig. 75 dargestellt ist, am unteren Ende B eingemauert oder unveränderlich befestigt, so geht der obere Endpunct A der Achsenschichte durch die lothrechte Belastung Q, sobald eine Biegung des Stabes eintritt, aus der Verticalen BE heraus und man findet für die entstehende Curve AMB, wenn man die Verticale AD zur Abscissenachse nimmt, für irgend einen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ setzt und wieder die Länge AMB durch l, den Abstand AD durch a und den Pfeil BD durch δ bezeichnet, genau so wie in Nr. **101.**, da sich im Gange der Entwickelung nichts ändert, die Gleichung:

$$y = \delta \, Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right).$$

Diese Gleichung enthält bereits wieder die Bedingung, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss. Da aber für $x = a$, $y = \delta$ sein soll, so folgt:

$$Sin\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1, \text{ oder } a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ und } Q = \frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2\varepsilon,$$

wobei n Null oder irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet. Die Fig. 75 entspricht dem Falle, in welchem $n = 0$ ist. Dafür erhält wieder a den kleinsten Werth, und zwar ist $a = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$ und $Q = \frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}$, und da wieder, sobald eine Biegung eintritt, $a < l$ ist, so folgt, dass dafür $Q > \frac{\pi^2\varepsilon}{4l^2}$ sein muss.

Dieses Resultat, mit jenem in Nr. **106.** verglichen, zeigt, dass ein prismatischer Stab, welcher sich in verticaler Lage mit seinem unteren Ende bloss aufstützt, viermal so viel tragen kann, ohne gebogen zu werden, als wenn derselbe am unteren Ende befestigt ist.

Wir übergehen hier die weiteren Bestimmungen von ϱ, δ, l, sowie die den in Nr. **105.** analogen Werthe von $\frac{T_a}{\varepsilon}$ und $\frac{T_r}{\varepsilon}$, indem diese ganz eben so leicht, wie in den vorhergehenden Nummern, für den vorigen Fall gefunden werden.

e) *Widerstand der Körper gegen Drehung (Torsion).*

108. Zur Aufstellung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Körper, gegen Torsion, die übrigens noch keineswegs ganz vollendet ist, muss man ähnliche Hypothesen, wie bei dem Widerstande gegen Biegung aufstellen, Hypothesen, welche mehr oder weniger mit der Wahrheit übereinstimmen.

Es sei nun, um eine solche Theorie zu entwickeln, BD (Fig. 76) ein an dem einen Ende ED eingemauerter oder auf sonstige Weise unveränderlich befestigter prismatischer Körper, mit dessen freiem Ende rechtwinkelig ein Hebel CF verbunden ist, auf welchen im Puncte F normal eine Kraft P wirkt, die eine Drehung des prismatischen Körpers um dessen Achse OC zu bewirken strebt.

Diess vorausgesetzt, wird in Folge der dadurch hervorgebrachten grösseren oder geringeren Verdrehung der Längenfasern, welche immer wieder als innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend angenommen wird, der Durchmesser AB an der freien Endfläche in die Lage $A'B'$, jener ab irgend eines anderen normalen Querschnittes in die Lage $a'b'$ u. s. w. gekommen sein, während der zu AB parallele Durchmesser DE am befestigten Ende keine Verdrehung mehr erlitten hat, so dass man also annehmen kann, dass die Torsionswinkel aca' gegen das freie Ende zu allmählich zunehmen, und überhaupt der Entfernung der betreffenden Querschnitte vom befestigten Ende proportional sind.

Setzt man den Drehungswinkel im Querschnitt der freien Endfläche $ACA' = i$, jenen im Querschnitt $adbd'$, dessen Abstand vom befestigten Ende $Oc = x$ ist, $aca' = i'$; so ist, wie eben bemerkt, nicht nur $i' < i$, sondern auch $i : i' = l : x$, woraus sofort $i' = \frac{x}{l} i$ folgt, wenn man nämlich die Länge des Prisma $OC = l$ setzt.

Lässt man x in $x+n$ übergehen, wobei n ein beliebiges Increment bezeichnen soll, und denkt sich in der Entfernung $x+n$ von O abermals einen normalen Querschnitt, sowie in diesem den Drehungswinkel $=i''$; so hat man nach der vorigen Relation auch $i''=\frac{x+n}{l}i$, folglich ist die Differenz zwischen i'' und i' d. i.:

$$i''-i'=\frac{n}{l}i.$$

Es ist nun einleuchtend, dass Molecüle, welche sich vor der Torsion in zwei aufeinander folgenden Querschnitten berührten, durch die Verdrehung um eine gewisse Grösse von einander entfernt oder verschoben haben, welche man als proportional annehmen kann, 1tens der Entfernung dieser Molecüle von der Längenachse OC des prismatischen Körpers, und 2tens der Differenz $\frac{n}{l}i$ der von jedem Halbmesser in den genannten beiden aufeinander folgenden Querschnitten durchlaufenen Winkeln i' und i''. Setzt man, wie bereits in der Einleitung bemerkt, die Torsion als innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend voraus, so kann man auch annehmen, dass die Widerstandskräfte, welche in den Molecülen durch diese Verdrehung hervorgerufen werden, diesen Verdrehungen selbst proportional sind.

109. Es sei nun $CF=R$ die Länge des Hebels, an dessem Endpuncte die Kraft P wirkt, ferner in dem vom befestigten Ende um die Grösse $Oc=x$ abstehenden Querschnitt $ad'bd$ (Fig. 77) der Winkel eines beliebigen Leitstrahles cM mit der festen Geraden ab, d. i. W. $acM=\alpha$, so entsteht, wenn man auf cM in einer beliebigen Entfernung $cm=u$ einen Punct m annimmt, hierauf α um $d\alpha$ und u um du wachsen lässt, ein Flächenelement mn' des genannten Querschnittes, dessen Flächeninhalt $=u\,d\alpha\,du$ ist, und dessen Torsions-Widerstand sich nunmehr nach der vorigen Hypothese oder den gemachten Voraussetzungen leicht bestimmen lässt, wenn man zu den letzteren noch jene hinzufügt, dass dieser Widerstand auch noch der Grösse dieser Fläche mn' proportional ist.

Bezeichnet man nämlich den Torsions-Widerstand in diesem Querschnitt für eine Fläche $=1$, deren Abstand von der Längenachse OC (Fig. 76) oder dem Drehungspuncte c (Fig. 77) ebenfalls $=1$ ist, durch p; so lässt sich der Torsions-Widerstand des genannten Flächenelementes mn', welches von c um u absteht, sofort durch $p.u.u\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u.\frac{n}{l}i = pn\frac{i}{l}u^2\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$, oder wenn man den constanten, jeder Materie eigenthümlichen Coefficienten, welcher nur durch Versuche bestimmt werden kann, d. i. $pn = N$ setzt, durch $N\frac{i}{l}u^2\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$ ausdrücken.

Dieser Widerstand bildet eine auf den Radiusvector u normal, und der Drehung entgegengesetzt wirkende Kraft, deren Componenten beziehungsweise parallel und senkrecht zu der den Winkel α bestimmenden festen Geraden ab sind:

$$N\frac{i}{l}u^2\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u\,Sin\,\alpha \quad \text{und} \quad N\frac{i}{l}u^2\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u\,Cos\,\alpha$$

und deren stat. Moment in Beziehung auf den Drehungspunct c durch $N\frac{i}{l}u^3\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$ ausgedrückt wird.

Soll nun das Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft R und den durch die Torsion hervorgerufenen Molecularkräften stattfinden, so muss erstlich in jedem Querschnitt des prismatischen Körpers das Gleichgewicht zwischen den eben genannten Componenten bestehen, und ferner auch das statische Moment des Widerstandes auf den Drehpunct c bezogen, dem Momente der Kraft R gleich sein. Man erhält daher für das Gleichgewicht die 3 Bedingungs-Gleichungen [**20.**, Anmerkung 1, Relat. (l)]:

$$\frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi} Sin\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha\int_0^{f(\alpha)} u^2\mathrm{d}u = 0, \quad \frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi} Cos\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha\int_0^{f(\alpha)} u^2\mathrm{d}u = 0$$

$$\text{und} \qquad PR = \frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\int_0^{f(\alpha)} u^3\mathrm{d}u = \frac{Ni}{4l}\int_0^{2\pi}\overline{f(\alpha)}^4\,\mathrm{d}\alpha,$$

wenn man nämlich die Polargleichung der Umfangscurve $ad'bd$ des prismatischen Körpers durch $u = f(\alpha)$ bezeichnet.

110. Da, wie man leicht sieht, $x = u\,Cos\,\alpha$ und $y = u\,Sin\,\alpha$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Flächenelementes $u\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}u$ sind, so erhalten, wenn man dieses Element mit $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ bezeichnet, die beiden ersten der vorigen Gleichungen die Form $0 = \int\int x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $0 = \int\int y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, und zeigen (vergl. die Gleichungen in Nr. **27.**, Anmerkung für $X = 0$ und $Y = 0$), dass der Drehungspunct c in Fig. 77 zugleich der S c h w e r p u n c t des Querschnittes $adbd'$ ist, folglich die Gerade OC (Fig. 76), welche die Schwerpuncte sämmtlicher Querschnitte des Prisma verbindet, bei der Torsion die Umdrehungsachse bildet.

Die letzte oder 3te der erwähnten Gleichungen dient zur Bestimmung des Drehungswinkels i; was dabei die constante Grösse N betrifft, so wird dieselbe Modul der Elasticität für Torsion, öfter auch der drehende Elasticitäts-Coefficient genannt.

Anmerkung. Es versteht sich übrigens von selbst, dass hier i in Theilen des Halbmessers zu verstehen, d. i. die Zahl zu setzen ist, welche für den Halbmesser $= 1$ die Länge des Bogens angibt, welcher dem Torsionswinkel entspricht. Bezeichnet man daher den entsprechenden Torsionswinkel in Gradmass ausgedrückt durch (i), so muss man $i = \frac{\pi}{180}(i)$, oder $(i) = \frac{180}{\pi} i$ setzen.

111. Ist nun z. B. der Querschnitt des Prisma ein Kreis vom Halbmesser r, der Körper also ein gewöhnlicher Cylinder, so ist die Gleichung der Umfangscurve: $f(\alpha) = r = const.$, folglich geht die 3te Gleichung in **109.** für diesen Fall über in jene:

$$PR = \frac{Ni}{4l}\int_0^{2\pi} r^4 \mathrm{d}\alpha = \frac{Ni}{4l} r^4 \cdot 2\pi,$$

so dass also $\quad PR = \frac{1}{2}\pi N \frac{i}{l} r^4, \quad$ oder $\quad i = \frac{2PRl}{\pi N r^4}$

ist, d. h. der Drehungswinkel ist der 4ten Potenz des Cylinder-Halbmessers umgekehrt proportional.

112. Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seite a, so setze man den Winkel des Radiusvector $CM = u$ (Fig. 78), nämlich W. $ACM = \alpha$, dann ist die Gleichung der Umfangsseite AD, wegen $AC = CM\, Cos\,\alpha$ sofort $f(\alpha) = u = \frac{\frac{1}{2}a}{Cos\,\alpha} = \frac{a}{2\,Cos\,\alpha}$.

Nimmt man das Integrale der obigen 3ten Gleichung für eines der 8 congruenten Dreiecke, wie ACD, so erhält man für eines dieser Dreiecke das Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{f(\alpha)}^4 \mathrm{d}\alpha, \text{ d. i. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{16\,Cos\,\alpha^4}\mathrm{d}\alpha = \frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4}.$$

Nun ist aber [Comp. §. 838, (10)]:

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha^3} + \frac{2\,Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha},$$

folglich $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ und daher $\frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{a^4}{12}$.

Wird nun für den ganzen quadratischen Querschnitt dieses Integral achtmal genommen, so erhält man aus der genannten 3ten Gleichung in Nr. **109.**:

$$PR = 8 \cdot \frac{Ni}{4l} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{1}{6} \frac{Na^4 i}{l} \text{ und daraus } i = \frac{6PRl}{Na^4};$$

es ist also hier der Drehungswinkel der 4ten Potenz der Seite des Quadrates umgekehrt proportional.

Anmerkung. So lange Körper von ähnlichen Querschnitten mit einander verglichen werden, werden auch die obigen Sätze durch die Erfahrung bestätigt. Man findet nämlich für den Coefficienten N nahezu immer denselben Mittelwerth aus den Versuchen mit Prismen von quadratförmigem Querschnitt; ebenso auch wieder einerlei Werthe aus den Versuchen mit cylinderischen Stangen oder Prismen. Allein diese letzteren weichen von den ersteren ab, und werden immer kleiner als diese letzteren gefunden.

Für den Fall eines rechteckigen Querschnittes haben die Untersuchungen gezeigt, dass die oben zum Grunde gelegte Hypothese, nach welcher der Widerstand eines Flächenelementes dem Abstande desselben von der Drehungsachse proportional ist, nicht mehr genau mit der Wahrheit übereinstimmt. Nach strengeren Methoden fand Cauchy (*Exercices de mathématiques 4e année. pag. 59*) für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b den Ausdruck:

$$PR = \tfrac{1}{3} N \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Bei Voraussetzung von vollkommen homogenen, in jedem Sinne gleichen Widerstand leistenden Körpern findet man auch zwischen den beiden Elasticitäts-Coefficienten N und E (Nr. **52.**) die Relation $N = \frac{2}{5} E$.

113. Um endlich auch den durch Torsion herbeigeführten Bruch zu behandeln, muss man wieder bemerken, dass jene Fasern, welche von der Drehungsachse am weitesten abstehen, zuerst die Elasticitätsgrenze überschreiten und der prismatische Körper auch an dieser Stelle zuerst zerrissen oder gebrochen wird. Bezeichnet man daher diesen grössten Abstand wieder durch c, so ist die transversale Verschiebung zweier Puncte dieser betreffenden Faser (wie in Nr. **109.**) der Grösse $\frac{i}{l} c$ proportional, und wenn man, wie vorhin, den Widerstand der Molecüle gegen Torsion, dieser Verschiebung proportional annimmt, so muss, sobald diese Verschiebung eine gewisse Grenze erreicht oder überschreitet, auch die Elasticitätsgrenze des Körpers, oder dessen Zerreissungsgrenze erreicht oder überschritten sein.

114. Bezeichnet sonach T den Widerstand der Fasern von der Flächeneinheit und im Abstande c von der Drehachse, im

Augenblicke des Zerreissens derselben, oder vielmehr in dem Augenblicke, in welchem die Elasticitätsgrenze erreicht wird, so ist dieser Widerstand für eine Faser vom Querschnitt $u\,d\alpha\,du$ und im Abstande u von dieser Achse sofort $= \frac{T}{c} u . u\,d\alpha\,du = \frac{T}{c} u^2 d\alpha\,du$, folglich das Moment desselben in Beziehung auf die Drehungsachse $= \frac{T}{c} u^3 d\alpha\,du$.

Man hat daher nach der obigen 3ten Gleichung in Nr. **109**. für das Gleichgewicht die Relation:

$$PR = \frac{T}{c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 du = \frac{T}{4c} \int_0^{2\pi} \overline{f(\alpha)}^4 d\alpha.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit jenem eben genannten in Nr. **109**. zeigt, dass sich die Werthe der Bruchmomente aus jenen der Elasticitätsmomente ganz einfach dadurch ableiten lassen, dass man in diesen letzteren $\frac{T}{c}$ statt $\frac{Ni}{l}$ setzt; dabei wird T, wenn es sich bloss um die Drehung bis zur Elasticitätsgrenze handelt, der drehende Tragfähigkeits-Coefficient, wenn es sich aber um ein wirkliches Abdrehen handelt, der drehende Festigkeits-Coefficient genannt.

115. Nach der eben gemachten Bemerkung erhält man also für einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt und vom Halbmesser r, wegen $c = r$, aus **111**:

$$PR = \tfrac{1}{2}\pi \frac{T}{r} r^4 = \tfrac{1}{2}\pi T r^3.$$

Ebenso für ein Prisma, dessen Querschnitt ein Quadrat von der Seite a ist, wegen $c = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, aus Nr. **112**:

$$PR = \tfrac{1}{6} \frac{2T}{a\sqrt{2}} a^4 = \tfrac{1}{3} T \frac{a^3}{\sqrt{2}}.$$

Anmerkung 1. Wie man sieht, ist das Moment PR, welches das Abdrehen des Körpers bewirkt, von der Länge des letzteren unabhängig; nur wird der Körper, wenn er länger ist, vorher um einen grösseren Winkel gedreht.

Anmerkung 2. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b findet Navier den Ausdruck:

$$PR = \tfrac{1}{3} T \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zugleich findet Navier, indem er den Bruch als dadurch herbeigeführt annimmt, dass ein Längenelement des Körpers in einem höheren Grade ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, als es die Natur des Körpers verträgt und in Folge dessen ein Zerreissen oder Zerquetschen der einzelnen Theile stattfindet, sowie in der Voraussetzung, dass wenn homogene und in jedem Sinne gleichen Widerstand leistende Körper angenommen werden, nothwendig ein bestimmtes Verhältniss zwischen den beiden Constanten T und F (Nr. **54**.) bestehen müsse, sofort: $T = \frac{4}{5} F$.

Dicke der Gefässwände.

(§. 159.)

116. Ist $AB = 2r$ (Fig. 80) der lichte Durchmesser einer cylinderischen Röhre von der Länge l und einer im Vergleiche zu r sehr dünnen Wand δ, und p der radicale Druck auf die Flächeneinheit der inneren Wand; so nehme man als einfachste Hypothese an, dass die Röhre zuletzt, wenn der Druck zu gross wird, nach der Länge in zwei Halbcylinder, d. i. nach dem Durchmesser AB in zwei Theile zerrissen werde. Diess vorausgesetzt, zerlege man zur Bestimmung der Kräfte, welche diese Trennung bewirken, die auf irgend einen Punct M des inneren Umfanges eines Querschnittes nach dem Radius CM wirkende Kraft p, wofür W. $ACM = \alpha$ sein mag, in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte p' und p'', wovon die erstere senkrecht auf AB, die letztere daher damit parallel ist; so hat man $p' = p \, Sin \, \alpha$ und $p'' = p \, Cos \, \alpha$.

Lässt man α um $d\alpha$ zunehmen, so ist der auf den unendlich schmalen, mit der Achse parallelen Streifen vom Flächeninhalt $l r \, d\alpha$ senkrecht gegen AB ausgeübte Druck $= l r \, d\alpha \, . \, p \, Sin \, \alpha$, folglich der gesammte Druck auf die halbe innere Cylinderfläche

$$AMB = r l p \int_0^{\pi} Sin \, \alpha \, d\alpha = 2 r l p,$$

also gerade so gross, als ob die Kraft senkrecht auf die diametrale Ebene des inneren Cylinders, als Projection der inneren Mantelfläche auf diese Ebene wirksam wäre.

Ebenso gross ist auch der auf die zweite Hälfte ANB der Cylinderfläche senkrecht gegen AB, aber dem vorigen entgegengesetzte Druck, welcher mit dem ersteren zusammen die Trennung oder das Zerreissen bewirkt.

Was die mit AB parallel wirksamen Componenten p'' betrifft, so heben sich diese wieder in den beiden Halbcylindern, welche durch einen auf AB senkrechten Durchmesser oder einer durch diesen und die Achse des Cylinders gelegten Ebene getrennt