puncte aufgehängt ist, der Balken bei dem kleinsten Uebergewichte p sogleich aus der horizontalen in die verticale Lage übergeht. Ausserdem wäre dabei für jede richtige Abwägung, d. i. für $W = P$ und $p = 0$, sofort $tang\, \alpha = \frac{0}{0}$, zum Zeichen, dass dabei der Balken in jeder Lage ruhen kann und nicht nothwendig, wie es die zweite Bedingung (§. 90) fordert, horizontal stehen muss.

Wollte man endlich den Schwerpunct des Balkens, bei der Voraussetzung von $b = 0$ über den Punct C legen, so müsste c negativ genommen werden, wodurch dann auch $tang\, \alpha$ negativ würde, also der Winkel α in den 2ten oder 4ten Quadranten fiele, zum Beweis, dass der Balken bei dem kleinsten Zulagegewicht p umschlagen würde.

Ausführlicheres hierüber, sowie über Wagen überhaupt, findet man in unserer Abhandlung in Prechtl's technol. Encyklopädie im 20. Bande.

Widerstand der Materialien.

(§. 126.)

50. Um sich von dem Widerstande fester Körper gegen jede Volums- oder Formänderung einen nur einigermassen richtigen Begriff zu machen und um die dabei auftretenden Gesetze zu formuliren, geht man heute von der Ansicht oder Hypothese aus, dass diese Körper aus Gruppen von Atomen oder aus Molecülen zusammengesetzt sind, die durch zweierlei Kräfte, nämlich anziehende und abstossende, in bestimmten Entfernungen von einander im Gleichgewichte erhalten werden. Von diesen sogenannten Molecularkräften geben sich durch ihre Reaction die ersteren oder anziehenden zu erkennen, wenn man durch äussere Kräfte diese Entfernungen vergrössern, die letzteren oder abstossenden hingegen, wenn man diese Entfernungen vermindern will.

Insoferne die Molecularkräfte die Molecüle in gewissen Entfernungen von einander halten, widersetzen sie sich jeder Volumsveränderung; insoferne sie aber diese auch in gewissen relativen Positionen erhalten, widersetzen sie sich zugleich auch jeder Formänderung eines festen Körpers.

Dieser Widerstand der Molecularkräfte oder ihrer Resultirenden gegen jede Volums- oder Formänderung ist aber nothwendig eine Function dieser Veränderung selbst und verschwindet innerhalb gewisser Grenzen nur dann, wenn diese Veränderung selbst Null ist; diese Grenzen heissen die Elasticitätsgrenzen des Körpers, welcher innerhalb dieser Grenzen elastisch genannt wird. Hieraus folgt, dass das Gleichgewicht der Molecularkräfte innerhalb dieser Grenzen ein stetiges ist, indem die Molecüle nach dem Aufhören jener äusseren Kräfte, welche die Volums- oder Formänderung bewirkt haben, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren.

a) *Widerstand der Körper gegen das Zerreissen oder Zerdrücken.*

(Absolute und rückwirkende Festigkeit.)

(§§. 127 u. 148.)

51. Zur Bestimmung des Widerstandes fester Körper gegen das Zerreissen oder Zerdrücken geht man am einfachsten von der Hypothese der parallelen Schichten aus, indem man sich vorstellt, dass die Körper aus parallelen Schichten von Molecülen bestehen, deren Schwerpuncte sämmtlich in der auf diesen Schichten normalen Längenachse liegen. Wirken nun gegen die beiden ebenen, mit diesen Schichten ebenfalls parallelen Endflächen des Körpers nach der Richtung oder parallel mit dieser Achse (also normal auf die genannten Schichten) gleichmässig vertheilte Kräfte, deren Resultanten in diese Achse fallen und sich im Gleichgewichte halten; so werden je nach dem Sinne, nach welchem diese beiden resultirenden Kräfte wirken, diese Schichten von einander entfernt oder einander genähert. Die dadurch zwischen je zwei aufeinander folgenden Schichten hervorgerufenen oder in Thätigkeit gesetzten Molecularkräfte (beziehungsweise anziehend und abstossend) haben in jeder dieser Schichten eine ebenfalls in die Achse des Körpers fallende Mittelkraft. Bezeichnet man diese mit R, die ursprüngliche Entfernung zweier Schichten durch z_0, und die jetzige nach Einwirkung der erwähnten äusseren Kräfte durch z; so wird nach der obigen Bemerkung (**50.**) die Kraft R eine Function von $z - z_0$ und zwar von solcher Beschaffenheit sein, dass sie innerhalb der Elasticitätsgrenze mit dieser Differenz $z - z_0$ zugleich verschwindet.

Man nennt die abgeleitete oder derivirte Function von R, d. i. $\frac{\Delta R}{\Delta z}$ (Comp. §. 630) die Steifheit des Körpers und betrachtet diese, wenn die Differenz $\Delta z = z - z_0$ nur sehr gering ist, als constant, indem die Erfahrung gezeigt hat, dass sich die Steifigkeit eines Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze nur sehr wenig ändert. Setzt man daher innerhalb dieser Grenze $\frac{\Delta R}{\Delta z} = a$, wo a eine constante Grösse bezeichnet, so wird $R = a \Sigma_{z_0}^{z} \Delta z = a(z - z_0)$ und es lässt sich daher die genannte Resultante der zwischen zwei aufeinander folgenden Schichten in der Flächeneinheit wirkenden Molecularkräfte innerhalb der Elasticitätsgrenzen durch $R = a(z - z_0)$ ausdrücken. Da man aber ferner die Intensität dieser Kraft R auch dem Flächeninhalt dieser Schichten innerhalb des Wirkungskreises der Molecularkräfte proportional annehmen kann, so wird man, wenn der Flächeninhalt dieser Schichten durch ω bezeichnet wird, diese Resultirende endlich wenigstens annäherungsweise durch:

$$R = a\omega(z - z_0) \ldots (\alpha)$$

ausdrücken können.

52. Ist nun l die ursprüngliche Länge des betreffenden Körpers und sind $+P$ und $-P$ die Resultirenden der auf die beiden Endflächen normal, nämlich nach der Längenachse wirkenden äusseren Kräfte, sowie endlich Δl die dadurch in dem Körper bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung; so hat man für den Zustand des Gleichgewichtes, nach der vorigen Relation (α):

$$R = a\omega(z - z_0) = a'\omega'(z' - z'_0) = a''\omega''(z'' - z''_0) = \ldots$$

mithin:
$$\Sigma(z - z_0) = \Delta l = P \Sigma\left(\frac{1}{a\omega}\right).$$

Ist der Körper h o m o g e n, so ist, wegen $a = a' = a'' = \ldots$ (und $z_0 = z'_0 = z''_0 = \ldots$) sofort:

$$\Delta l = P . \frac{1}{a} \Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Bezeichnet man nun den Abstand irgend eines der Querschnitte ω von der einen Endfläche des Körpers durch x und bemerkt, dass wenn die Anzahl der in $\Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ zu summirenden Glieder gleich n gesetzt wird, sofort $n = \frac{l}{z_0}$ ist, so kann man im vorigen Ausdruck das Summen- mit dem Integralzeichen vertauschen, und $\frac{1}{z_0}\int_0^l \frac{dx}{\omega}$ statt $\Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ setzen; dadurch geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\Delta l = \frac{P}{a z_0}\int_0^l \frac{dx}{\omega},$$

wobei ω eine Function von x ist. Setzt man das bloss von der Materie des Körpers abhängige Product $a z_0 = E$, so erhält man endlich: $$\Delta l = \frac{P}{E}\int_0^l \frac{dx}{\omega} \ldots (1)$$
und es wird E der Coefficient oder Modul der Elasticität des betreffenden Körpers genannt.

53. Ist z. B. als einfachster Fall der Körper ein gerades Prisma, so ist dafür ω constant und daher $\int_0^l \frac{dx}{\omega} = \frac{1}{\omega}\int_0^l dx = \frac{l}{\omega}$, mithin: $$\Delta l = \frac{P}{\omega} \cdot \frac{l}{E} \ldots (2),$$
d. h. die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Prisma ist innerhalb der Elasticitätsgrenze der ausdehnenden oder zusammendrückenden Kraft und der Länge des Prisma direct und dem Querschnitte desselben umgekehrt proportional (§. 128).

Setzt man die auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfallende, noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung $\frac{P}{\omega} = p$, so ist [vorige Relation (2)] $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$ (β), oder wenn man das Verhältniss der Ausdehnung des Prisma zur ursprünglichen Länge desselben innerhalb dieser Grenze, d. i. $\frac{\Delta l}{l} = s$ setzt, auch $E = \frac{p}{s}$.

Könnte nun, ohne dass diese Grenze überschritten würde (was jedoch nur fictiv ist), $\Delta l = l$, d. i. $s = 1$ sein, so wäre dem Gewichte nach ausgedrückt: $E = p$.

54. Aus der vorigen Relation (β) folgt für die Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitt $= 1$ und der Länge l um die noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Grösse Δl ausdehnt oder zusammendrückt: $$p = E\frac{\Delta l}{l} \ldots (3).$$

Lässt man nun diese Kraft p bis zur Elasticitätsgrenze zunehmen (wodurch also Δl an jene Grenze ankommt, über welche hinaus das Prisma nicht mehr genau auf seine ursprüngliche Länge zurückgeht) und bezeichnet diesen Grenzwerth, insoferne das Prisma dabei auf Ausdehnung oder Zusammendrückung in Anspruch genommen wird, beziehungsweise durch T_a und T_r; so werden diese beiden Werthe respective Coefficienten der absoluten und rückwirkenden Tragfähigkeit (wohl auch Tragmodul der Zug- und Druckfestigkeit) genannt; dabei darf jedoch im letzteren Falle das Prisma nicht so lang sein, dass durch die Einwirkung der Kraft T_r eine Biegung eintritt.

Werden endlich für die Belastung p diese Werthe T_a und T_r folglich auch die Elasticitätsgrenze überschritten, so tritt eine permanente Aenderung in der Lage der Molecüle des Prisma ein und es darf dann der Elasticitäts-Coefficient E nicht weiter mehr als constant angenommen werden. Bezeichnet man in diesem Falle die kleinsten Werthe von p, bei welchen der Körper überhaupt noch zerrissen oder zerdrückt wird, beziehungsweise mit F_a und F_r; so heissen diese Werthe Coefficienten der absoluten und rückwirkenden Festigkeit (Bruchmodul für Zug und Druck). Auch hier wird vorausgesetzt, dass beim Zerdrücken keine Biegung des Körpers eintritt.

b) *Widerstand der Körper gegen Biegung.*

(§. 142.)

55. Betrachtet man einen prismatischen Körper $C'N$ (Fig. 48) von durchaus gleichen Querschnitten, welcher horizontal an dem einen Ende eingemauert oder unveränderlich befestigt, und am anderen durch eine lothrecht wirkende Last oder Kraft Q gebogen wird; so werden die gegen die convexe Seite CN zu liegenden Längenfasern oder Schichten (aus denen man sich den Körper bestehend denken kann) ausgedehnt, und jene gegen die concave Seite $C'N'$ hin liegenden zusammengedrückt. Zwischen diesen nun liegt jene sogenannte neutrale Längen- oder Achsenschichte DG, welche ihre ursprüngliche Länge beibehält, also weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird und sofort, wenn die Biegung in verticalen Ebenen, wie $CC'NN'$ statt hat, eine horizontale Cylinderfläche $DEFG$ bildet.

Denkt man sich in einer beliebigen Entfernung $AO = z$ vom Angriffspuncte der Kraft Q einen Querschnitt $acbc'$ normal auf die Längenachse des Prisma, so durchschneidet derselbe die neutrale Schichte nach der horizontalen Geraden ab, und es werden sonach alle diesen Querschnitt über ab schneidenden Schichten des Prisma ausgedehnt und jene unterhalb ab liegenden zusammengedrückt; dadurch werden aber in diesem Querschnitt Molecularkräfte thätig oder hervorgerufen, welche oberhalb ab anziehend, wie S in Fig. 49, und unterhalb dieser Geraden abstossend, wie T wirken. Diese Kräfte können in horizontale, mit der Länge des Prisma parallele, wie s und t, und in verticale Componenten, wie s' und t' zerlegt werden.

Ausserdem machen sich bei einer starken Biegung des Körpers noch Kräfte geltend, welche in dem Querschnitte $acbc'$ selbst liegen und einem Abgleiten (Abreissen) oder einer Verschiebung des Körpers in diesem Querschnitte widerstehen; auch diese Kräfte (wie V) können nach horizontalen (parallel mit der Länge des Prisma) und verticalen Richtungen (wie v und v') zerlegt werden.

Soll nun unter allen diesen, auf den zwischen den Querschnitten FNN' und $acbc'$ liegenden Theil des Prisma (Fig. 48) wirkenden Kräften das Gleichgewicht bestehen, so müssen offenbar folgende Bedingungen stattfinden:

1. Muss die (algebraische) Summe aller verticalen Componenten der Kraft Q gleich sein.

2. Muss die Summe der genannten horizontalen Componenten gleich Null sein.

3. Muss endlich die Summe der statischen Momente dieser horizontalen und verticalen Kräfte in Bezug auf die Gerade ab gleich sein dem Momente der Kraft Q auf dieselbe Gerade bezogen.

Anmerkung. Was die zuletzt erwähnten, im Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) oder cc' (Fig. 49) selbst liegenden Widerstandskräfte V betrifft, so fällt bei so geringen Biegungen, wie sie hier durchaus vorausgesetzt werden und auch bei wirklichen Constructionen nicht überschritten werden dürfen (oder auch bei einer sehr geringen Länge des Prisma im Vergleich zu dessen Querschnitt), dieser Querschnitt nahezu in eine verticale Ebene; mithin fallen auch die verticalen Componenten, wie v', in dieselbe Ebene und es können daher die horizontalen Componenten v als beinahe Null vernachlässigt werden. Es haben sonach unter dieser Voraussetzung diese letztgenannten Widerstandskräfte V nur auf die erste der angeführten 3 Bedingungen Einfluss.

56. Man nehme nun im genannten Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) die Gerade ab zur Abscissenachse und a als Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten, setze für einen beliebigen Punct m dieser Querschnittsfläche $ap = x$, $pm = y$, bezeichne die Gleichungen der oberen und unteren Hälfte der Umfangscurve $acbc'$ beziehungsweise durch $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$, sowie die Grenzwerthe von x durch $x = o$ und $x = ab = b$, und jene für y durch $y = o$, $y = f(x)$ für die Fläche oberhalb der Geraden ab, und $y = o$, $y = \varphi(x)$ für die Fläche unterhalb ab.

Nimmt man ferner ausser dem eben betrachteten Querschnitt noch einen zweiten, dem ersteren unendlich nahe liegend an, und sind dd' und ef (Fig. 49) die Durchschnittslinien dieser beiden Querschnitte mit einem verticalen Längenschnitt $C'N$ des Prisma, wofür also $AO = z$, und $OO' = \mathrm{d}z$ ist; so werden sich diese beiden auf der Längenachse AOB normal stehenden Schnitte, welche vor der Biegung des Prisma zu einander parallel waren, durch die eintretende Biegung in einer durch den Punct J gehenden auf der genannten verticalen Ebene des Längenschnittes $C'N$ normalen Geraden durchschneiden, wobei bekanntlich J der Mittelpunct des Krümmungskreises für das Bogenelement OO' der neutralen Achsenschichte AOB ist. Ferner wird, um zuerst nur die über AOB liegenden, der Ausdehnung unterworfenen Faserschichten zu betrachten, eine durch P gehende Faserschichte des Körperelementes fd, welche vor der Biegung die Länge $rP' = de = OO' = \mathrm{d}z$ hatte, durch die Biegung des Prisma bis auf die Länge PP', also um die Grösse $Pr = \varDelta\,\mathrm{d}z$ ausgedehnt.

Setzt man den Krümmungshalbmesser des Bogens OO' der neutralen Schichte $JO = \varrho$, so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken PrO und $OO'J$ sofort: $Pr : OP = OO' : JO$, d. i. $\varDelta\,\mathrm{d}z : y = \mathrm{d}z : \varrho$, und daraus für das Verhältniss der Ausdehnung der Fasern im Puncte P zur ursprünglichen Länge (d. i. die Ausdehnung der Längeneinheit) $\frac{\varDelta\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = \frac{y}{\varrho} \ldots (\gamma)$.

Der durch diese Ausdehnung in der durch P (oder m in Fig. 48) gehenden Faserschichte vom Querschnitt $= 1$ hervorgerufene Widerstand ist sonach [**54**. Gleich. (3)] $p = E\frac{\varDelta\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = E\frac{y}{\varrho}$, mithin für die Elementarfaser vom Querschnitt $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (in m Fig. 48) gleich $E\frac{y}{\varrho}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, sowie dessen statisches Moment, in Bezug auf die Achse ab gleich ist: $E\frac{y}{\varrho}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot y = \frac{E}{\varrho}y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Die Summe aller Widerstandskräfte gegen Ausdehnung der Faserschichten ist sonach gleich $\frac{E}{\varrho}\int_0^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y$, sowie die Summe ihrer statischen Momente, auf die Achse ab (Fig. 48) bezogen, gleich: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy.$

57. Auf eine ganz gleiche Weise erhält man auch, auf die untere Hälfte $ac'b$ des Querschnittes übergehend, für die Summe der Widerstandskräfte gegen die Zusammendrückung der Faserschichten den Ausdruck: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y\, dy$ und für das statische Moment, auf ab bezogen: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy.$

58. Drückt man nun von den in **55.** angegebenen Gleichgewichts-Bedingungen die 2te und 3te aus (indem die 1ste für unseren Zweck hier übergangen werden kann), so erhält man beziehungsweise dafür die Ausdrücke:

$$\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y\, dy = \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y\, dy \ldots.(1)$$

und $$\frac{E}{\varrho}\left[\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy + \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy\right] = Qz\ldots(2).$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dass bei einer so geringen Biegung des Prisma, wie sie hier vorausgesetzt wird, statt der aus der verticalen Kraft Q abgeleiteten, auf der Längenachse AOB (Fig. 49) normal stehenden Componenten, diese Kraft Q selbst gesetzt werden darf, wie es in der Relat. (2) geschehen ist.

Auch versteht es sich von selbst, da die beiden Relationen für jeden Querschnitt des Prisma gelten, dass sich die Gleichung (2) auf den letzten, oder an der Mauer befindlichen Querschnitt $DCEC'$ bezieht, wenn man in derselben $z = l$ gleich der Länge des Prisma setzt (wobei der Bogen AOB mit dessen Sehne verwechselt werden kann).

59. Die erste dieser beiden Bedingungsgleichungen dient zur Bestimmung der Lage der neutralen Achse ab (Fig. 48) im Querschnitt $acbc'$, und sie zeigt (**27.** Anmerkung), dass diese Achse unter der gemachten Voraussetzung von nur geringen Biegungen, durch den Schwerpunct dieses Querschnittes geht. Theilt daher die Gerade ab diesen Querschnitt in zwei symmetrische Theile, so theilt auch die neutrale Achsenschichte das Prisma der Länge nach in zwei gleiche Hälften.

Wären (was bei einer starken Biegung wirklich eintritt) die Widerstände der Fasern gegen Zusammendrückung nicht mehr den Widerständen derselben gegen Ausdehnung gleich; so wäre auch die Gleichung (1) nicht mehr richtig, indem dann die Gleichgewichtsachse ab nicht mehr durch den Schwerpunct des Querschnittes geht, sondern gegen jene Seite hinrückt, in welcher der Widerstand der Fasern zunimmt.

60. Setzt man in der Gleichung (2) von Nr. **58.** den ersten Theil derselben (in welchem der eingeklammerte Ausdruck nach §. 200 nichts anderes als das Trägheitsmoment des Querschnittes $acbc'$ in Bezug auf die Achse ab ist) mit Auslassung von ϱ, d. i.

$$E\left[\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy + \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy\right] = \varepsilon \ldots (3)$$

so heisst dieser Ausdruck oder ε, welcher von der Grösse der Biegung unabhängig ist, und bloss vom Elasticitäts-Coefficienten E der Materie abhängt, das Biegungsmoment des Körpers in Bezug auf die neutrale Achse $a\,b$.

61. Kennt man das Biegungsmoment ε eines prismatischen Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunct des Querschnittes gehende Achse, so lässt sich daraus leicht auch das Biegungsmoment ε' in Bezug auf eine andere, mit der ersteren parallele Achse ableiten, und umgekehrt.

Denn liegt z. B. die Achse $a'b'$ (Fig. 48) in der Entfernung $os = a$ unterhalb der durch den Schwerpunct o gehenden Achse ab, mit welcher sie parallel ist, und sind $op = x$ und $pm = y$ die Coordinaten irgend eines Punctes m des Querschnittes, vom Puncte o aus gezählt; so sind $sp' = x$ und $p'm = a + y$ die Coordinaten desselben Punctes von s aus gezählt, und es ist nach der Relation (3), wenn man davon nur das eine Integral ansetzt, indem für das zweite genau das nämliche gilt, auf die Achse $a'b'$ bezogen:

$$\varepsilon' = E\int dx \int (y+a)^2 dy = E\int dx \int y^2 dy + 2Ea\int dx \int y\, dy + Ea^2 \int dx\, dy,$$

oder wegen: $E\int dx \int y^2 dy = \varepsilon$, $\int dx \int y\, dy = 0$ (weil o der Schwerpunct, also Y in Nr. **25.** Null ist) und $\int dx \int dy = F$, wenn der Flächeninhalt des Querschnittes durch F bezeichnet wird, auch:

$$\varepsilon' = \varepsilon + Ea^2 F \ldots (4) \text{ oder } \varepsilon = \varepsilon' - Ea^2 F \ldots (5),$$

woraus zugleich erhellet, dass das Biegungsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse am kleinsten ist.

Biegungsmomente für einige specielle Fälle.

62. Sei zuerst als einfachster Fall der Querschnitt des Prisma ein Rechteck von der Breite $ab = b$ und Höhe $cc' = h$ und der Balken an dem einen Ende so eingemauert, dass die erstere Dimension in die horizontale, also letztere in die verticale Richtung fällt (Fig. 50).

Für diesen Fall ist in dem vorigen Ausdruck (3) $y = f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}h$ zu setzen, während $x = b$ seinen Werth behält. Es ist daher $\int_0^b \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 \mathrm{d}y = \int_0^b \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{8} \mathrm{d}x = \frac{1}{24} b h^3$
und da das zweite Integral denselben Werth besitzt, so ist das Biegungsmoment $\varepsilon = \frac{1}{12} E b h^3$.

63. Hat dagegen dasselbe Rechteck AD (Fig. 51) eine solche Lage, dass die Seite $AC = h$ mit der durch den Schwerpunct O des Rechteckes gehenden neutralen Achse EG den Winkel φ bildet, so fälle man, um den Werth des Integrales $\int \mathrm{d}x \int y^2 \mathrm{d}y$ für die Fläche $AEFB$ zu finden, von A auf die Achse EG das Perpendikel AL und setze $EL = n$, so hat man zuerst für das Dreieck AEL das betreffende Integral:

$$\int_0^n \mathrm{d}x \int_0^{x\, tang\, \varphi} y^2 \mathrm{d}y = \int_0^n \tfrac{1}{3} x^3\, tang\, \varphi^3\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{12} n (n\, tang\, \varphi)^3 = \tfrac{1}{12} EL.\overline{AL}^3$$

Ebenso findet man als Werth dieses Integrales für das Dreieck ALG: $\frac{1}{12} GL.\overline{AL}^3$,
folglich für das ganze Dreieck AEG:

$$\tfrac{1}{12}(EL + GL)\overline{AL}^3 = \tfrac{1}{12} EG.\overline{AL}^3$$

und damit analog für das Dreieck BFG: $\frac{1}{12} GF.\overline{BH}^3$.

Das Integral $\int \mathrm{d}x \int y^2 \mathrm{d}y$ erhält daher für die obere Fläche $AEFB$ den Werth $\frac{1}{12} EG.\overline{AL}^3 - \frac{1}{12} GF.\overline{BH}^3$.

Nun ist aber $EG = EO + OG$, oder wie man leicht findet (wenn man aus O auf AC und AB perpendikuläre Linien zieht):

$$EG = \frac{b}{2\, Sin\, \varphi} + \frac{h}{2\, Cos\, \varphi},$$

$$AL = \tfrac{1}{2} h\, Sin\, \varphi + \tfrac{1}{2} b\, Cos\, \varphi, \quad GF = \frac{h}{2\, Cos\, \varphi} - \frac{b}{2\, Sin\, \varphi}$$

und
$$BH = \tfrac{1}{2} h\, Sin\, \varphi - \tfrac{1}{2} b\, Cos\, \varphi,$$

folglich ist endlich, wenn man diese Werthe substituirt und dann gehörig reducirt, das gesuchte Integral für die Fläche $AEFB$, nämlich: (6) $\int \mathrm{d}x \int y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{24} b h (h^2\, Sin\, \varphi^2 + b^2\, Cos\, \varphi^2)$.

Vermöge der Gleichheit der beiden Flächen $AEFB$ und $DFEC$ hat das mehrgenannte Integral für die untere Fläche $DFEC$ des Querschnittes denselben Werth, folglich ist für den vorliegenden Fall das Biegungsmoment:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h (h^2 Sin\varphi^2 + b^2 Cos\varphi^2).$$

Anmerkung. Ist $h > b$, so wird dieses Moment für $\varphi = 90^0$ am grössten und es ist dafür (wobei das Rechteck die in der vorigen Nummer betrachtete Lage Fig. 50 erhält): $\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h^3$.

64. Es sei ferner der Querschnitt ein Dreieck ABC (Fig. 59) von irgend einer Form und die Basis AB mit der durch den Schwerpunct O gehenden neutralen Achse DE parallel (also horizontal), ferner $AB = b$, die Höhe $CF = h$ und dabei die Spitze nach aufwärts gekehrt.

In Bezug auf die Achse AB wird nach dem in der vorigen Nummer Entwickelten das Biegungsmoment $\varepsilon' = \tfrac{1}{12} E b h^3$, mithin in Bezug auf die durch den Schwerpunct gehende neutrale Achse DE nach Relation (5) in **61.** wegen $a = FO = \tfrac{1}{3} h$ und $F = \tfrac{1}{2} b h$:

$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h^3 - E . (\tfrac{1}{3} h)^2 . \tfrac{1}{2} b h = \tfrac{1}{12} E b h^3 - \tfrac{1}{18} E b h^3$,

d. i. $\varepsilon = \tfrac{1}{36} E b h^3$.

Derselbe Ausdruck gilt offenbar auch für die umgekehrte Lage des Dreieckes, wie in Fig. 58.

65. Es sei der Querschnitt des prismatischen Körpers eine Ellipse von den Achsen $2a$ und $2b$, wobei die grössere $2a$, wie in Fig. 52, horizontal liegt, also mit der neutralen Achse zusammenfällt.

Zählt man die Coordinaten auf diesen Achsen vom Mittelpuncte O aus, so ist wegen $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, das obige Integral für die obere Hälfte des Querschnittes (wenn man anstatt die Grenzen für x von $-a$ bis $+a$ zu nehmen, diese von o bis a, und das Integral doppelt nimmt):

$$2\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy = 2\int_0^a dx . \tfrac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{8} \pi a b^3 \text{ *)}.$$

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 817, Lehrbuch III., S. 336, Beisp. 4) $a^2 - x^2 = X$ gesetzt: $\int X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{X}{4} + \tfrac{3}{8} a^2\right) x \sqrt{X} + \tfrac{3}{8} a^4 \, arc \, Sin \left(\frac{x}{a}\right)$.

Da nun das zweite Integral für die untere Hälfte $AB'A'$ der Ellipse den gleichen Werth erhält, so hat man für das Biegungsmoment:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E a b^3.$$

Erhält die grosse Achse die verticale Stellung, so wird ebenso:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E a^3 b.$$

66. Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, der Körper also ein gewöhnlicher Cylinder, so darf man in den beiden vorigen Ausdrücken nur $a = b = r$ setzen, um das Biegungsmoment zu erhalten; es ist nämlich dafür $\varepsilon = \frac{1}{4}\pi r^4$.

67. Sei der Querschnitt ein rechteckiger Ring (Fig. 56) von der äusseren Breite b und inneren b', von der äusseren Höhe h und inneren h', und dabei die durch den Schwerpunct gehende horizontale oder neutrale Achse mit der Breite b parallel; dann ist das Biegungsmoment für das äussere, als voll angenommene Parallelepiped (**62.**) $= \frac{1}{12} E b h^3$, sowie jenes für das innere $= \frac{1}{12} E b' h'^3$, mithin das gesuchte Biegungsmoment für das hohle Prisma:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E (b h^3 - b' h'^3).$$

Anmerkung. Derselbe Ausdruck gilt auch, wie leicht zu sehen, für Prismen, deren Querschnitte die in Fig. 55 und Fig. 57 haben, wenn in Fig. 55 das verticale Rechteck und in Fig. 57 die beiden zusammen die Breite (oder Dicke der Wände) $b - b'$ besitzen.

68. Für einen hohlen Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreisring von den Halbmessern R und r ist, erhält man auf eine ganz ähnliche Weise (**66.**) für das Biegungsmoment:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E (R^4 - r^4).$$

69. Betrachtet man endlich noch von den in **67.** behandelten Querschnitten überall die Hälfte, wie in Fig. 55 den durch die Achse AB halbirten Theil $mnCD$, und bezeichnet die äussere und innere Höhe durch h und h', sowie die äussere und innere Breite durch b und b'; so ist das Biegungsmoment in Bezug auf die Achse AB gleich: $\frac{1}{3} E (b h^3 - b' h'^3)$ *).

---

*) Es ist nämlich, wie aus dem Werthe für ε in **67.** erhellet, jedes der beiden betreffenden Integrale der Relat. (3) in Nr. **60.** gleich $\frac{1}{24} E (b h^3 - b' h'^3)$ und da man in diesem Ausdrucke, um die dortige Bezeichnung (in **67.**) mit der gegenwärtigen in Uebereinstimmung zu bringen, $2h$ und $2h'$ statt h und h' setzen muss, sofort $= \frac{8}{24} E (b h^3 - b' h'^3)$.

Nun ist aber der Abstand des Schwerpunctes des in Rede stehenden Querschnittes von dieser Achse AB gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{bh^2-b'h'^2}{bh-b'h'}\right)^{*)},$$

mithin nach Relation (5) in **61**. das Biegungsmoment in Bezug auf eine durch diesen Schwerpunct gehende mit AB parallele Achse: $\varepsilon = \tfrac{1}{3}E(bh^3-b'h'^3) - E.\tfrac{1}{4}\left(\frac{bh^2-b'h'^2}{bh-b'h'}\right)^2(bh-b'h')$,

oder nach gehöriger Entwickelung und Reduction:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}E\left[\frac{(bh^2-b'h'^2)^2-4bb'hh'(h-h')^2}{bh-b'h'}\right].$$

Auch gilt dieser Ausdruck für die umgekehrte Lage dieser Querschnitte.

70. Auf gleiche Weise findet man für einen halben Cylinder, dessen Querschnitt ein Halbkreis (Fig. 67) vom Halbmesser r ist und Durchmesser AB horizontal liegt, das Biegungsmoment in Bezug auf die Achse AB (Nr. **66**) $= \tfrac{1}{8}E\pi r^4$, mithin in Bezug auf die durch den Schwerpunct O gehende (mit AB parallele) neutrale Achse ab, wegen (§. 50) $CO = \frac{4r}{3\pi}$ nach **61**:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{8}E\pi r^4 - E\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2.\tfrac{1}{2}r^2\pi = \tfrac{1}{72}Er^4\left(\frac{9\pi^2-64}{\pi}\right).$$

Natürlich kann der Halbkreis auch die umgekehrte Lage haben.

c) *Widerstand der Körper gegen den Bruch.*

Relative Festigkeit.

(§. 132.)

71. Wird die Belastung eines prismatischen Körpers allmählich so weit fortgesetzt, bis eine Biegung eintritt, bei welcher irgend eine Faser in ihrer Ausdehnung oder Verkürzung die Elasticitätsgrenze erreicht oder überschreitet; so erhält man be-

*) Ist nämlich die Fläche des äusseren Rechteckes $ABCD$ (Fig. 56) $= F$, die des inneren $= f$, folglich des Ringes $f' = F - f$. Sind ferner m, n und O der Reihe nach die in der Geraden EF liegenden Schwerpuncte dieser Flächen; so ist $F.Em = f.En + f'.EO$ und daraus, wenn man die Werthe setzt:

$$EO = \frac{bh.\tfrac{1}{2}h - b'h'.\tfrac{1}{2}h'}{bh-b'h'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{bh^2-b'h'^2}{bh-b'h'}\right).$$

ziehungsweise das Tragvermögen und die relative Festigkeit dieses Körpers. Bezeichnet man, um diese Biegung in beiden Fällen zu finden, den Abstand der von der neutralen Achsenschichte am weitesten abstehenden Faser auf der convexen oder concaven Seite des gebogenen Körpers durch c, sowie durch ϱ den Krümmungshalbmesser der neutralen Schichte, ferner wie oben (Nr. **54.**) durch T und F beziehungsweise den Tragfähigkeits- und Festigkeits-Coefficienten; so ist für's Erste die Ausdehnung oder Verkürzung einer Längeneinheit dieser am weitesten abstehenden Faser (Relation (γ) in Nr. **56.**):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{c}{\varrho},$$

wenn man nämlich das Verhältniss $\frac{\Delta z}{z}$ an der Elasticitätsgrenze durch $\frac{\Delta l}{l}$ bezeichnet. Nun ist aber an dieser Grenze (Relat. (3) Nr. **54.**):

$$T = E\frac{\Delta l}{l} = E.\frac{c}{\varrho},$$

folglich:

$$\varrho = \frac{E}{T}c \ldots . (f),$$

und diess ist der kleinste Werth, welchen der Krümmungs-Halbmesser an irgend einer Stelle erreichen darf, ohne dass bei der Biegung die Elasticitätsgrenze überschritten wird.

Da nun aber der Tragfähigkeits-Coefficient für die Ausdehnung von jenem für die Zusammendrückung der Fasern in der Regel verschieden (also nicht $T_a = T_r$) ist, so muss man ϱ sowohl für die convexe als für die concave Seite, d. i. sowohl $\frac{E}{T_a}c$ als auch $\frac{E}{T_r}c$ berechnen, und von diesen beiden Werthen für ϱ den grösseren beibehalten, d. h. ϱ darf dann nicht kleiner als dieser grössere Werth sein.

Da übrigens, wenn man den in den Parenthesen stehenden Theil der Relation (2) in Nr. **58.** durch X bezeichnet (wobei X bloss von der Form des Querschnittes des Prisma abhängt), aus dieser Relation

$$\varrho = \frac{EX}{Qz} \ldots . (g)$$

wird, so folgt, dass der Krümmungs-Halbmesser für den letzten, an der Mauer befindlichen Querschnitt am kleinsten wird, weil dafür $z = l$ am grössten ist; es wird daher auch an dieser Stelle des Prisma zuerst die Elasticitätsgrenze erreicht und überschritten.

72. Setzt man in der vorigen Relation (f) statt des Tragfähigkeits-Coefficienten T den Festigkeits-Coefficienten F, so gibt der Werth von $\varrho = \frac{E}{F} c$ die Grenze der Biegung an, an welcher der Körper (und zwar nach der vorigen Bemerkung am eingemauerten Ende) brechen wird.

Substituirt man diesen letzteren Werth von ϱ in der Relat. (g) der vorigen Nummer, sowie auch für X seinen Werth $\frac{\varepsilon}{E}$ (Relat. (3) Nr. **60.**) und setzt zugleich (da der Bruch am letzten Querschnitt erfolgt) $z = l$ gleich der Länge des Prisma; so erhält man dara us

$$Q l = \frac{\varepsilon}{E c} F.$$

Auch hier muss man für F nach und nach die absolute und rückwirkende Festigkeit, d. i. (**54.**) F_a und F_r setzen und Q aus dem kleineren der beiden Ausdrücke berechnen, um die kleinste Last zu erhalten, welche, am freien Ende des Prisma angebracht, den Bruch desselben bewirkt.

73. Setzt man das stat. Moment $Q l = M$, so hat man also:

$$M = \frac{\varepsilon}{E c} F,$$

und wenn man für das Biegungsmoment ε die den verschiedenen in den Nummern von **62.** bis **70.** behandelten Querschnitten der Prismen entsprechenden Werthe setzt, erhält man für dieselben Querschnitte die entsprechenden relativen Festigkeiten der Prismen. Davon sollen hier nur einige, und zwar die folgenden angeführt werden.

74. Ist der Querschnitt ein R e c h t e c k von der Lage Fig. 50, wobei $ab = b$, $cd = h$; so ist wegen $c = \frac{1}{2} h$ und (**62.**) $\varepsilon = \frac{1}{12} E b h^3$, sofort $M = \frac{1}{12} \frac{E b h^3}{\frac{1}{2} h E} F$, d. i.

$$M = \tfrac{1}{6} b h^2 F.$$

75. Hat das Rechteck die Lage Fig. 51, so ist wegen $c = AL = \frac{1}{2}(h \operatorname{Sin} \varphi + b \operatorname{Cos} \varphi)$ (**63.**) und wenn man für ε den Werth aus Nr. **63** setzt und reducirt:

$$M = \tfrac{1}{6} b h \left(\frac{h^2 \operatorname{Sin} \varphi^2 + b^2 \operatorname{Cos} \varphi^2}{h \operatorname{Sin} \varphi + b \operatorname{Cos} \varphi} \right) F.$$

76. Ist der Querschnitt ein **Dreieck**, so ist in der Lage Fig. 58 wegen $c = \frac{2}{3} h$ für F_r und $\frac{1}{3} h$ für F_a, und wegen (**64**) $\varepsilon = \frac{1}{36} E b h^3$, sofort:

$$M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{1}{3} h} F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_a \text{ und } M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{2}{3} h} F_r = \frac{1}{24} b h^2 F_r,$$

dagegen in der Lage Fig. 59 gerade umgekehrt:

$$M = \frac{1}{24} b h^2 F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_r.$$

77. Für den **elliptischen** Querschnitt in der Lage Fig. 52 ist wegen $c = b$ und (**65.**) $\varepsilon = \frac{1}{4} E \pi a b^3$ sofort $M = \frac{1}{4} \pi a b^2 F$.

Wenn dagegen die grosse Achse vertical steht: $M = \frac{1}{4} \pi a^2 b F$.

78. Für den **kreisförmigen** Querschnitt ist $M = \frac{1}{4} \pi r^3 F$.

79. Für einen **rechteckigen Ring** ist wegen $c = \frac{1}{2} h$, nach **67.**:

$$M = \frac{1}{6} \left(\frac{b h^3 - b' h'^3}{h} \right) F.$$

80. Endlich ist für einen **hohlen Kreiscylinder**, nach Nr. **68**, wegen $c = R$:

$$M = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{R^4 - r^4}{R} \right) F.$$

Anmerkung. Im Falle die Länge l des Prisma so gering ist, dass die parallel mit der Bruchfläche wirkende Kraft Q in diese Fläche selbst hineinfällt, so wird das Prisma nicht mehr durch Biegung gebrochen, sondern die sich trennenden Flächen werden von einander abgeschoben und man nennt die dabei hervorgerufene Festigkeit die **Gleitungs-** oder **Abscheerungs-Festigkeit** des Prisma. Ist F' der betreffende Festigkeits-Coefficient für die Flächeneinheit und A die Grösse der abgeschobenen Fläche, so ist die zum Abscheeren nöthige Kraft:

$$Q = F' A \ldots . (m).$$

Was nun den Coefficienten F' betrifft, so kann man diesen den bisher ausgeführten Versuchen zufolge dem Coefficienten der absoluten Festigkeit gleich, d. i. $F' = F_a$, setzen.

Bolzen, Nieten u. dgl. werden mit ihrer Abscheerungs-Festigkeit in Anspruch genommen. Auch ist es eben diese Festigkeit, welche beim Ausstossen von Nuthen, Lochen von Blechen u. s. w. überwunden werden muss.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 137.)

81. Bei der bisherigen Annahme von durchaus gleichen Querschnitten des Körpers wird an einer oder mehreren Stellen zuerst oder vor allen übrigen die Elasticitätsgrenze überschritten, und an diesen daher auch der Bruch zuerst erfolgen. Ist daher