Sind ferner $a$, $a'$, $a''$ . . . die Abstände der Schwerpuncte $M$, $M'$ . . . untereinander, so ist bekanntlich $2rr' \, Cos(r.r') = r^2 + r'^2 - a^2$ und so auch für die übrigen, folglich geht die vorige Relation über in folgende:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(pp'[r^2 + r'^2 - a^2]),$$

oder da die Summe aller $r^2$ enthaltenden Glieder die Form hat:

$$p r^2 (p + p' + \ldots) = P p r^2$$

und das ähnliche auch für die $r'^2$, $r''^2$ . . . enthaltenden Glieder stattfindet, ebenso $P^2 R^2 = P\Sigma(pr^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\Sigma(pr^2) = P^2 R^2 + \Sigma(pp'a^2),$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dass wenn der Abstand $R$ des Schwerpunctes eines Systemes von schweren Puncten oder Körpern von irgend einem festen Puncte ($A$) constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w. ändern), die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem festen Puncte ebenfalls eine constante Grösse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma(pr^2)$ für $R = 0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dass die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunct ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunctes werden noch in Nr. **131.** angeführt werden.

## Die Kettenlinie.

(§. 75.)

**41.** Um eine Gleichung der in den Puncten $A$ und $B$ (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunct $A$ zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punct gezogene Horizontale $AA'$ zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punct $M$ der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bogen $AM = s$. Setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunctes $B$, d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punct $B$ durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft $S$, welche der in diesem Puncte stattfindenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte $P$ und $Q$ zerlegen, wovon die erstere vertical, die letztere daher horizontal wirkt. Die im Puncte $M$ nach der Richtung der Tangente $MT$ stattfindende Spannung $T$, welche sofort dem Gewichte, also auch der Länge des Bogens $MCB$ proportional ist, kann ebenso in zwei Seitenkräfte $P'$, $Q'$ nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt werden, und zwar ist, wenn man Winkel $TMP = \varphi$ setzt, dafür:

$P' = T\,Cos\,\varphi$ und $Q' = T\,Sin\,\varphi$, oder wegen $Sin\,\varphi = \frac{mn}{Mm} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ und $Cos\,\varphi = \frac{Mn}{Mm} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ (wenn nämlich $Mmn$ das sogenannte Differenzialdreieck vorstellt) auch $P' = T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ und $Q' = T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$.

Ist nun $R$ die Resultirende aus dem Gewichte des Bogenstückes $MCB$, so müssen für das Gleichgewicht die beiden Gleichungen bestehen: $Q' = Q$ und $P + P' = R$, oder wenn man für $Q'$ und $P'$ die obigen Werthe setzt und berücksichtigt, dass wenn $p$ das Gewicht der Längeneinheit des Bogens $s$ bezeichnet, sofort $R = \int_x^c p\,\mathrm{d}s = -\int_c^x p\,\mathrm{d}s$ ist, auch (1) $T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = Q$ und $T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -P - \int_c^x p\,\mathrm{d}s$, oder [mit Rücksicht auf diese Gleich. (1)]

$$Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P - \int_c^x p\,\mathrm{d}s \quad (2).$$

Differenziirt man diese letztere Gleichung, in welcher $P$, $Q$ und $\mathrm{d}x$ constant sind, so erhält man

$$Q\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} = -p\,\mathrm{d}s = -p\,\mathrm{d}x\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} \text{ oder } \frac{Q\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}} = -p\,\mathrm{d}y,$$

und daraus durch Integration:

$$Q\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} = C - py \quad (m).$$

Um die Constante $C$ zu bestimmen, berücksichtige man, dass der Quotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, welcher bekanntlich die trigon. Tangente des Winkels darstellt, welchen die in irgend einem Puncte $(x, y)$ der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet, für $y = 0$ in $tang\,\alpha$ übergeht, wenn man den Winkel der Tangente der Curve im Anfangspuncte $A$ mit $\alpha$ bezeichnet, so, dass also $C = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = Q\,Sec\,\alpha$ und damit in $(m)$ $Q\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} = Q\,Sec\,\alpha - py$ wird. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{(Q\,Sec\,\alpha - py)^2 - Q^2}{Q^2},$$

oder wenn man den constanten Quotient $\frac{Q}{p} = b \ldots (n)$ und $b\, Sec\, \alpha = \frac{b}{Cos\, \alpha} = a \ldots (r)$ setzt, auch:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \ldots (g)$ und $dx = \frac{b\, dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}} \ldots (3)$; durch die Integration dieser Differenzialgleichung erhält man (Compend. §. 795, wo $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = -2a$ und $\gamma = 1$ zu setzen ist):

$$x = b\, l \{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}\} + C;$$

um die Constante $C$ zu bestimmen, darf man nur berücksichtigen, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss (und dass für diesen Punct $A$ von den doppelten Zeichen bloss das obere gilt), wodurch man erhält $C = -b\, l[a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]$ und womit endlich, wenn man diesen Werth substituirt und reducirt,

$$x = b\, l \left\{ \frac{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}} \right\} \quad \text{(I)}$$

wird, welches sofort die gesuchte G l e i c h u n g d e r K e t t e n l i n i e ist.

Zur Bestimmung des Bogens $s$ hat man $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, oder wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung $(g)$ substituirt, auch $ds = \frac{(a-y)}{b} dx \ldots (h)$, oder wegen Gleich. (3): $ds = \frac{(a-y)\, dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}$, und daraus durch Integration:

$$s = C \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

Da nun für $y = 0$ auch $s = 0$ sein muss, so wird die Constante $C = \sqrt{(a^2 - b^2)} = b \sqrt{(Sec\, \alpha^2 - 1)} = b\, tang\, \alpha = a\, Sin\, \alpha$, folglich

$$s = a\, Sin\, \alpha \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \ldots \text{(II)}.$$

Sind $AD = x'$ und $DC = y'$ die Coordinaten des t i e f s t e n Punctes $C$ der Curve, so ist für diesen Punct, wie bekannt $\frac{dy}{dx} = 0$, also aus Gleich. (3) $a - y' = b$, oder $y' = a - b$; ferner folgt damit aus Gleich. (I): $(i) \ldots x' = b\, l \left[ \frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}} \right]$, und aus jener (II): $s = AMC = l' = b\, tang\, \alpha = a\, Sin\, \alpha$, und damit auch allgemein:

$$s = l' \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

**42.** Wie man aus der Gleichung (I) ersieht, so ist die Form der Curve von dem zweiten Aufhängpunct $B$ oder $x = c$, $y = d$

ganz unabhängig. Nimmt man nun diesen ebenfalls in der Horizontalen oder in der Achse $AA'$ in $A'$ an, so ist dafür $c = AA'$ und $d = 0$, folglich aus (I) für $y = 0$ (wozu das untere Zeichen des Wurzelausdruckes gehört):

$$c = bl\left[\frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right] = bl\left[\frac{b^2}{[a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2}\right]$$
$$= 2bl\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right] = 2x'$$

(wegen Gleich. $i$), so dass also die Ordinate des tiefsten Punctes $C$ die Abscissenachse im Halbirungspuncte $D$ von $AA'$ schneidet.

Anmerkung 1. Zur Bestimmung der beiden constanten Grössen $a$ und $b$, wodurch auch (Gleich. $r$) der Winkel $\alpha$ gegeben ist, kann man, da $c, d, l$ als bekannt anzusehen sind, in der Gleichung (I) $x = c$, $y = d$ und in jener (II) $s = l$ und $y = d$ setzen, durch welche beide Gleichungen (in deren letzteren auch noch $Sec\,\alpha = \frac{a}{b}$ zu berücksichtigen kommt) dann, wenigstens im Principe, $a$ und $b$ gegeben sind.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (I) der Kettenlinie lässt sich durch folgende successive Transformirungen auf eine einfachere Form bringen. Zählt man zuerst die Abscissen auf der Ordinatenachse $AY$ (Fig. 20), setzt nämlich $Ap = x$, wofür sowohl $pM$ als auch $pM' = y$ ist; so muss man in der Gleich. (I) $x$ mit $y$ verwechseln, wodurch man erhält:

$$y = bl\left[\frac{a - x \mp \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right].$$

Nimmt man $CD$ zur Abscissenachse, setzt also $DP_1 = x$, $P_1M = P_1M' = y$, so muss man in dieser letzten Gleichung statt $y$ setzen $AD - y$, mit dem oberen und $-AD + y$ mit dem unteren Zeichen; dadurch erhält man, wegen $AD = bl\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right]$ (Gleichung $i$) für beide Fälle denselben Werth:

$$\pm y = bl\left[\frac{a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{b}\right],$$

oder es ist (für's obere Zeichen) $e^{+\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$ und daraus:

$$e^{-\frac{y}{b}} = 1 : e^{+\frac{y}{b}} = \frac{b}{a - x + \sqrt{(a-x)^2 - b^2}} = \frac{1}{b}\left[a - x - \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$$

(wo $e$ die Basis der nat. Logarithmen bezeichnet),

folglich ist $e^{+\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} = \frac{2}{b}(a - x)$. (Dasselbe erhält man auch für's untere Zeichen.)

Zählt man die Abscissen vom Puncte $C$ aus, setzt also $CP_1 = x$ und $P_1M = P_1M' = y$, so muss man in dieser letzten Gleichung statt $x$ schreiben $CD - x = y' - x = a - b - x$, wodurch das vorige Binom $a - x$ in $b + x$ und die Gleichung der Curve in jene $b + x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$

übergeht. Zieht man ferner in der Entfernung $CA'' = b$ mit $AA'$ eine Parallele, nimmt diese zur Ordinatenachse und den Punct $A''$ zum Ursprung der Coordinaten, setzt nämlich $A''P_1 = x$ und $A''Q = A''Q' = y$; so erhält man aus dieser letzten Gleichung, da man darin $x - b$ statt $x$ setzen muss, $x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$, man erhält endlich durch Verwechslung der beiden Achsen, wodurch $A''Q = A''Q' = x$ und $QM = Q'M' = y$ wird, als einfachste Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

**43.** Aus der obigen Gleichung (I) folgt für die Spannung der Kette in irgend einem Puncte $M$ (Fig. 19) $T = Q\frac{ds}{dx} = Q\frac{a-y}{b}$ (Gleich. $h$). Da nun im Aufhängpuncte $A$ die Ordinate $y = o$, so folgt, dass diese Spannung in $A$ am grössten, und zwar $T = \frac{a}{b}Q$ ist.

Für den tiefsten Punct $C$ ist die Ordinate $y = y'$ am grössten, folglich die Spannung an diesem Puncte $T = \frac{a-y'}{b}Q = Q$ (wegen $y' = a - b$) am kleinsten.

**44.** Anstatt der Voraussetzung, dass gleiche Bogenlängen der Curve $ACB$ (Fig. 19) gleiche Gewichte haben, kann man auch, wie es bei Kettenbrücken der Fall ist, bei welchen das Gewicht der Ketten gegen die Belastung der horizontalen Fahrbahn vernachlässigt werden darf, annehmen, dass gleiche Längen der Projectionen der Curve auf die horizontal gezogene Abscissenachse $AA'$ gleiches Gewicht haben sollen, so dass also nicht mehr die Curve, sondern die Abscissenachse gleichförmig belastet erscheint.

Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich, wenn jetzt $p$ das Gewicht der Längeneinheit der Abscisse $x$ bezeichnet, dagegen alle übrigen Bezeichnungen die vorigen bleiben, die Gleichung (2) in Nr. **41**. in die folgende $Q\frac{dy}{dx} = -P + \int_x^c p\,dx$, während jene (1), nämlich $(\alpha)\ldots T\frac{dx}{ds} = Q$ ungeändert bleibt.

Die erstere dieser beiden Gleichungen gibt, wenn man integrirt und den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt:

$$(\beta)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-P + p(c-x)}{Q}.$$

Da für $x=0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, also $tang\,\alpha = \frac{-P+pc}{Q}$ wird, so hat man auch, diesen Werth in ($\beta$) substituirt:

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q} \text{ oder } dy = tang\,\alpha\, dx - \frac{p}{Q} x\, dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$(2)\quad y = x\, tang\,\alpha - \frac{p}{2Q} x^2,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x=0$ auch $y=0$ sein muss. Da ferner für $x=c$, $y=d$ sein soll, so folgt aus dieser letzten Gleichung: $d = c\, tang\,\alpha - \frac{pc^2}{2Q}$, oder

$$(3)\quad tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2Q}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man als Gleichung der gesuchten Curve:

$$(4)\quad y = \frac{d}{c} x + \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$$

und zwar ist diese (Comp. §. 501, wo nur $x$ mit $y$ verwechselt werden darf) die Gleichung der gemeinen Parabel.

Anmerkung 1. Um in dieser letzteren Gleichung die Constante $Q$ zu bestimmen, kann man für irgend einen Punct $M$ die Abscisse $AP = x'$ und Ordinate $PM = y'$ messen und für $x$ und $y$ in dieser Gleichung substituiren. Am einfachsten ist es jedoch in der Curve einen Punct $N$ anzunehmen, wofür die Abscisse $AF = \frac{c}{2}$ ist. Setzt man dann die gemessene Ordinate $FN = FO + ON = \frac{d}{2} + h$, wobei also auch $h$ als bekannt anzusehen ist; so erhält man durch Substitution dieser Werthe für $x$ und $y$ in der Gleichung (4):

$$\frac{d}{2} + h = \frac{d}{c}\cdot\frac{c}{2} + \frac{p}{2Q}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right), \text{ d. i. } h = \frac{pc^2}{8Q} \text{ oder } Q = \frac{pc^2}{8h}.$$

Mit diesem letzteren Werthe lässt sich nun auch leicht die zweite Constante $tang\,\alpha$ finden; denn es folgt aus Gleichung (3):

$$tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2}\cdot\frac{8h}{pc^2} = \frac{d}{c} + \frac{4h}{c} = \frac{d+4h}{c}.$$

Auch lassen sich diese beiden Constanten $Q$ und $tang\,\alpha$ durch die Coordinaten des tiefsten Punctes $C$ ausdrücken.

Anmerkung 2. Liegt der zweite Befestigungspunct $B$ mit dem ersteren $A$ in derselben horizontalen Linie $AA'$ in $A'$, so ist $d=0$ und (aus Gleich. 4) $y = \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$, wobei $Q = \frac{pc^2}{8h}$, $tang\,\alpha = \frac{4h}{c}$ und $h = FN = ON = DC$ (wegen $AF = \frac{c}{2} = AD$) die grösste Ordinate ist.

Setzt man in dieser Gleichung der Curve für $Q$ den vorigen Werth, so wird auch $y = \frac{4h}{c^2}(cx - x^2)$, oder wenn man die Abscissen von $D$ aus zählt, also $DP = x$ setzt, wodurch man in dieser letzten Gleichung $\frac{c}{2} - x$ statt $x$ setzen muss, nach gehöriger Reduction: $y = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - x^2\right)$.

Verwechselt man ferner $x$ mit $y$, setzt nämlich (Fig. 20) $DP_1 = x$ und $P_1M = y$, so erhält man $x = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)$, und wenn man endlich die Abscissen auf der Geraden $CD$ vom Puncte $C$ aus zählt, also $CP_1 = x$ setzt, wodurch in dieser letzten Gleichung $h - x$ statt $x$ zu setzen ist, auch: $x = \frac{4h}{c^2}y^2$, oder $y^2 = \frac{c^2}{4h}x$, als Gleichung der Curve $ACA'$, und zwar als Gleichung einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{c^2}{4h}$, deren Scheitel $C$ und Achse $CD$ ist.

**45.** Zur Bestimmung des Bogens $s$ substituire man in der Gleichung $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}$ für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ den Werth aus der obigen Gleichung (1), so erhält man:

$(\gamma)$ $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)}$, oder wenn man Kürze halber $tang\,\alpha = m$ und $\frac{p}{Q} = n$ setzt, auch:

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{(1 + m^2 - 2mnx + n^2x^2)} = \mathrm{d}x\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)},$$

wenn man nämlich noch $1 + m^2 = \alpha$, $-2mn = \beta$ und $n^2 = \gamma$ setzt.

Aus dieser letzteren Gleichung erhält man durch Integration (Comp. §. 827, Beisp.), Substitution und Reduction, wenn man noch Kürze halber $1 + \left(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x\right)^2 = A$ setzt:

$$s = C - \frac{Q}{2p}\left[(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x + \sqrt{A})\right],$$

wobei die Constante, da für $x = 0$ auch $s = 0$ sein soll, den Werth hat: $C = \frac{Q}{2p}\left[tang\,\alpha\sqrt{A'} + logn.\,(tang\,\alpha + \sqrt{A'})\right]$, wobei $\sqrt{A'} = \frac{1}{Cos\,\alpha}$ ist.

**46.** Aus der obigen Gleichung $(\alpha)$ in **44.** folgt für die Spannung der Kette im Puncte $M$ (Fig. 19) nach der Tangente:

$$T = Q\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = Q\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} = Q\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)} \ldots (\delta).$$

Da im tiefsten Puncte $C$ der Curve $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so ist die Spannung an diesem Puncte $T = Q$ am kleinsten.

Im Aufhängepunct $A$ ist die Spannung, wegen $x = 0$ sofort $T = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = \frac{Q}{Cos\,\alpha}$ am grössten.

Im zweiten Aufhängepunct $B$ ist diese Tangentialspannung $T = Q\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{pc}{Q})^2\right)}$.

**47.** Was die Spannung der Kette nach lothrechter oder verticaler Richtung betrifft, so ist diese im Puncte $M$ sofort $S = T\,Cos\,mMn = T\frac{dy}{ds} = Q\frac{dy}{dx}$ (wegen Gleichung (1) in Nr. **41.**) oder (wegen Gleichung (1) in **44.**):

$$S = Q\left(tang\,\alpha - \frac{px}{Q}\right).$$

Im Aufhängepunct $A$ ist wegen $x = 0$ diese Verticalspannung $S = Q\,tang\,\alpha$ am grössten.

Im tiefsten Puncte $C$ dagegen ist diese Spannung wegen $\frac{dy}{dx} = 0$, sofort $S = 0$ am kleinsten*).

## Bedingungen für die Empfindlichkeit der Krämerwage.

(§. 91.)

**48.** Um die Bedingungen zu finden, unter welchen die gemeine Krämerwage empfindlich wird, d. h. die Eigenschaft erhält, dass der Wagebalken sogleich den horizontalen Stand verlässt und eine schiefe Lage annimmt, wenn das Gleichgewicht durch ein kleines Zulagegewicht gestört wird, sei $AB$ (Fig. 21) die horizontale Lage des in $O$ aufgehängten Wagebalkens im Stande des Gleichgewichtes, nämlich für den Fall, dass $AC = BC$ und $W = P$ ist (§. 89), ferner $A'B'$ die Lage dieses Balkens, welche er dadurch annimmt, dass in die Wagschale $B$ zu dem Gewichte $P$ noch jenes $p$ zugelegt wird, wodurch im Stande der Ruhe sofort der Punct $C$ nach $C'$ kommt.

Setzt man $AC = BC = a$, $OC = OC' = b$, und wenn $D$ den Schwerpunct des Wagebalkens bezeichnet, $OD = c$, ferner

*) Ausführlicheres hierüber findet man in dem *Mémoire sur les Ponts suspendus* von *Navier*. Paris, 1824.