

Für einen Kugelabschnitt mit einer Grundfläche, folgt aus diesem Ausdrucke, wegen $x'' = r$ und wenn man die Höhe des Kugelsegmentes mit h bezeichnet, wodurch $x' = r - h$ wird, sofort:

$$X = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Endlich folgt noch aus dieser letztern Relation für den Schwerpunkt der Halbkugel, wegen $h = r$, übereinstimmend mit dem Werthe CO in §. 59:

$$X = \frac{3}{8} r.$$

38. Ist endlich die erzeugende Fläche von einem parabolischen Bogen AN' (Fig. 12) begrenzt, folglich der Rotationskörper ein parabolisches Conoid, so erhält man, wegen $y^2 = px$ (Gleichung der Parabel AN' , die Abscissen vom Scheitel A gezählt):

$$V = \pi \int_0^x p x dx = \pi p \frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_0^x p x^2 dx = \pi p \frac{x^3}{3},$$

folglich:

$$X = \frac{2}{3} x.$$

Guldin'sche Regeln.

39. Stellt o (Fig. 12) den Schwerpunkt der ebenen Curve $NN' = l$ vor, so ist für $Po = Y$ nach der zweiten der Relationen (I) in **21.**:

$$Yl = \int_{s_0}^{s_1} y ds \quad \text{oder, wenn man mit } 2\pi \text{ multiplicirt, auch}$$

$$2Y\pi l = \int_{s_0}^{s_1} 2y\pi ds.$$

Nun entsteht aber durch Umdrehung dieser Curve NN' um die Achse AX eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch den zweiten Theil dieser Gleichung ausgedrückt wird, während der erste Theil nichts anders als das Product aus dem Weg des Schwerpunktes o in die Länge l der Curve bezeichnet: die durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugte Rotationsfläche ist also gleich dem Producte aus der Länge der Curve in den Weg, welchen der Schwerpunkt derselben bei dieser Umdrehung beschreibt.

40. Bezeichnet dagegen o den Schwerpunkt der von der Curve NN' (Fig. 12) begrenzten ebenen Fläche $BN' = F$ und ist wieder $Po = Y$, so entsteht durch die Umdrehung dieser Fläche um die Achse AX ein Rotationskörper, dessen Inhalt durch $\int_{x'}^{x''} y^2 \pi dx$ ausgedrückt wird. Es ist aber nach der zweiten Relation (II) in 25.

$YF = \int_{x'}^{x''} \frac{1}{2} y df$ oder wegen $df = y dx$, und wenn man auch gleich wieder mit 2π multiplicirt:

$$2Y\pi \cdot F = \int_{x'}^{x''} y^2 \pi dx,$$

d. h. der Inhalt des durch Umdrehung der ebenen Fläche F um die Achse AX erzeugten Körpers ist gleich dem Producte aus dieser Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunkt bei dieser Rotation zurücklegt.

Um diese beiden Regeln, welche mehr zur Darstellung einer interessanten Eigenschaft des Schwerpunktes als des Gebrauches wegen angeführt werden, auf ein ganz einfaches Beispiel anzuwenden, drehe sich die Gerade $AB = l$ (Fig. 15) um AC , wobei das auf AC gezogene Perpendikel $BC = r$ sein soll, folglich der Abstand des Schwerpunktes o der Geraden AB von $AC = \frac{1}{2}r$ ist. Zuzufolge der ersteren Regel (39.) ist daher die durch diese Rotation erzeugte Kegelfläche $\omega = 2 \cdot \frac{1}{2} r \pi \cdot l = r \pi l$.

Dreht sich dagegen das rechtwinkelige Dreieck ABC um diese Gerade $AC = h$, und ist m der Schwerpunkt dieser Fläche, folglich wegen $Am = \frac{2}{3}Ad$ der Abstand $mn = \frac{2}{3}Cd = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{3}r$; so ist nach der zweiten dieser Regeln (40.) das Volumen des durch Rotation dieser Fläche $ABC = \frac{1}{2}rh$ erzeugten Kegels: $V = 2 \cdot \frac{1}{3}r\pi \cdot \frac{1}{3}rh = \frac{1}{3}r^2\pi h$; Alles, wie es aus der Geometrie bekannt ist.

Dreht sich eine Ellipse von den Halbachsen a und b um eine mit der grossen Axe $2a$ parallelen Geraden, welche von dieser den Abstand r hat, so entsteht ein kreisförmiger Ring von elliptischem Querschnitt, dessen Inhalt V nach der 2ten dieser Regeln sofort leicht gefunden wird. Da nämlich die Erzeugungsfäche $F = \pi ab$ und $Y = r$ ist, so folgt:

$$V = 2\pi^2 rab.$$

Anmerkung 1. Es lässt sich in ähnlicher Weise die Eigenschaft des Schwerpunktes auch zur Bestimmung des Inhaltes oder Volumens eines schief abgeschnittenen Prisma und zwar wie folgt, benützen.

Es sei bei irgend einem geraden oder schiefen Prisma, welches gegen die untere Grundfläche schief abgeschnitten ist, F die Fläche der unteren, f die der oberen Grundfläche. Man denke sich nun dieses Prisma aus unendlich vielen und dünnen, mit diesem parallele Prismen zusammengesetzt, deren untere Grundflächen $a, a', a'' \dots$ zusammen die untere Basis F und

obere Grundflächen $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ zusammen die obere Basis f des Prisma ausmachen und deren Höhen beziehungsweise $h, h', h'' \dots$ sind. Diess vorausgesetzt ist dann $V = ah + a'h' + a''h'' + \dots$ oder wegen $a : \alpha = F : f$, also $a = \frac{F}{f}\alpha$, und ebenso $a' = \frac{F}{f}\alpha', a'' = \frac{F}{f}\alpha''$ u. s. w., auch

$$V = \frac{F}{f}(\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \dots).$$

Fällt man nun aus dem Schwerpunct der oberen Grundfläche f des Prisma auf die untere F das Perpendikel H und nimmt diese letztere Grundfläche zur Momentenebene, so ist (Nr. 16.) $fH = \alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \dots$ mithin endlich auch:

$$V = FH,$$

d. h. der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prisma's ist gleich dem Inhalte eines geraden Prisma's von derselben Grundfläche F und einer Höhe, welche dem Abstand des Schwerpunctes der oberen schiefen von der unteren Grundfläche gleich ist.

Ist das Prisma ein dreiseitiges und sind h, h', h'' die 3 parallelen Seitenkanten, so ist wegen $H = \frac{1}{3}(h + h' + h'')$ (wie leicht zu finden) für das gerade oder schief abgeschnittene Prisma:

$$V = \frac{1}{3}F(h + h' + h'').$$

Anmerkung 2. Um schliesslich noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunctes zu entwickeln, seien $p, p', p'' \dots$ die Gewichte und $M, M', M'' \dots$ die Schwerpuncte von Körpern, welche zusammen ein unveränderliches System bilden, dessen Schwerpunct in O liegen soll. Bezieht man das System auf drei rechtwinkelige Coordinatenachsen, deren Ursprung in A liegt, bezeichnet die Entfernung der einzelnen Schwerpuncte $M, M' \dots$ von diesem Ursprunge A durch $r, r', r'' \dots$, den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes O von A mit R , die Winkel, welche R mit den Achsen der x, y, z bildet, beziehungsweise mit a, b, c , jene der r mit diesen Achsen mit α, β, γ , der r' mit α', β', γ' u. s. w. und setzt endlich die Summe der Gewichte (als Resultirende, deren Angriffspunct O ist) $p + p' + \dots = \Sigma(p) = P$; so folgt nach den Relationen (1) in Nr. 16., indem die von $O, M, M' \dots$ auf die Ebene der xy gefällten Perpendikel durch $R \cos c, r \cos \gamma, r' \cos \gamma' \dots$ und ebenso die Perpendikel auf die Ebene der xz durch $R \cos b, r \cos \beta, r' \cos \beta' \dots$ und auf die Ebene der yz durch $R \cos a, r \cos \alpha, r' \cos \alpha' \dots$ ausgedrückt werden, sofort:

$$PR \cos a = \Sigma(pr \cos \alpha)$$

$$PR \cos b = \Sigma(pr \cos \beta)$$

$$PR \cos c = \Sigma(pr \cos \gamma)$$

die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen gibt, mit Berücksichtigung, dass (Comp. §. 580) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ u. s. w., ferner, wenn (r, r') den Winkel bezeichnet, welchen die Geraden r und r' mit einander einschliessen, und die übrigen Winkel damit analog bezeichnet werden, wegen (Comp. §. 580) $\cos(r, r') = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$ und so auch analog für die übrigen Winkel nach gehöriger Reduction:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(2pp' r r' \cos[r, r']).$$

Sind ferner $a, a', a'' \dots$ die Abstände der Schwerpunkte $M, M' \dots$ untereinander, so ist bekanntlich $2rr' \cos(r.r') = r^2 + r'^2 - a^2$ und so auch für die übrigen, folglich geht die vorige Relation über in folgende:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(pp' [r^2 + r'^2 - a^2]),$$

oder da die Summe aller r^2 enthaltenden Glieder die Form hat:

$$pr^2(p + p' + \dots) = Ppr^2$$

und das ähnliche auch für die $r'^2, r''^2 \dots$ enthaltenden Glieder stattfindet, ebenso $P^2 R^2 = P\Sigma(pp'^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\Sigma(pr^2) = P^2 R^2 + \Sigma(pp'a^2),$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dass wenn der Abstand R des Schwerpunktes eines Systemes von schweren Punkten oder Körpern von irgend einem festen Punkte (A) constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel α, β, γ u. s. w. ändern), die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpunkte von diesem festen Punkte ebenfalls eine constante Grösse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma(pp'^2)$ für $R = 0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dass die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpunkte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunkte ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunktes werden noch in Nr. 131. angeführt werden.

Die Kettenlinie.

(§. 75.)

41. Um eine Gleichung der in den Punkten A und B (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunkt A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punkt gezogene Horizontale AA' zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punkt M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bogen $AM = s$. Setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunktes B , d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punkt B durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft S , welche der in diesem Punkte stattfindenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte P und Q zerlegen, wovon die erstere vertical, die letztere daher horizontal wirkt. Die im Punkte M nach