Grundflächen, und da $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ die Gleichung des Kreises ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpuncte C aus zählt, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ und $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ wird; so hat man nach den beiden Relationen in **28.**, wegen $CB = x'$ und $CB' = x''$ sofort:

$$\omega = 2\pi \int_{x'}^{x''} \sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = 2r\pi \int_{x'}^{x''} dx = 2r\pi(x'' - x'),$$

und damit

$$2r\pi(x'' - x')X = 2\pi \int_{x'}^{x''} x\sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$= 2r\pi \int_{x'}^{x''} x\,dx = 2r\pi\left(\frac{x''^2 - x'^2}{2}\right),$$

woraus endlich folgt: $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$, so dass also der gesuchte Schwerpunct O in der halben Höhe der Zone liegt. (§. 55.)

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch für eine Zone mit einer Grundfläche, d. i. für eine Kugelhaube oder Kugelschale, indem man dafür nur $x'' = CA = r$ setzen darf. Auch wird für die Oberfläche der Halbkugel, wegen $x' = 0$ und $x'' = r$, ebenfalls nach dieser Regel $X = \frac{1}{2}r$.

Schwerpunct der Körper.

(§. 56.)

32. Da bei homogenen Körpern, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, das Gewicht dem Volumen proportional ist, das Volumen daher zur grösseren Einfachheit statt dem Gewichte gesetzt werden darf (indem der Factor, welcher das Gewicht der cubischen Einheit bezeichnet, zuletzt überall hinausfällt); so erhält man zur allgemeinen Bestimmung des Schwerpunctes eines Körpers, wenn man dessen Volumen mit V, also ein Element davon mit dV bezeichnet, die nachstehenden (mit jenen in **21.** analogen) Gleichungen:

$$VX = \int x\,dV, \quad VY = \int y\,dV, \quad VZ = \int z\,dV, \quad V = \int dV, \quad \text{(III)},$$

wobei sich die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen, in den einzelnen speciellen Fällen immer von selbst ergeben.

33. Um z. B. den Schwerpunct einer Pyramide $ABCD$ (Fig. 17) von einer beliebigen Grundfläche (die hier der Einfachheit wegen als ein Dreieck angenommen wird) zu bestimmen, verbinde man die Spitze der Pyramide A mit dem Schwerpunct E der Grundfläche, wodurch AE eine Linie der Schwere wird, in welcher sofort der gesuchte Schwerpunct O liegt. Fällt man ferner aus demselben Puncte A auf die Grundfläche der Pyramide das Perpendikel AF, nimmt dieses zur Abscissenachse, so wie den Punct A zum Ursprung der rechtw. Coordinaten, legt durch die Puncte P und p, wofür $AP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ ist, zwei Ebenen bcd und $b'c'd'$ parallel mit der Grundfläche BCD, bezeichnet die Grösse der Grundfläche BCD mit f, so wie jene des ähnlichen Polygones bcd mit z und endlich die Höhe der Pyramide AF mit h; so ist zuerst $\mathrm{d}V = z\,\mathrm{d}x$ oder wegen $f:z = h^2 : x^2$, woraus $z = \frac{f}{h^2}x^2$ folgt, auch $\mathrm{d}V = \frac{f}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x$, und daraus

$$V = \int_0^h \frac{f}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{f}{h^2}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}fh \text{ (wie ohnehin bekannt).}$$

Mit diesen Werthen von V und $\mathrm{d}V$ erhält man aus der ersteren der Relationen (III) in **32.**:

$$\tfrac{1}{3}fh\,.\,X = \frac{f}{h^2}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{f}{h^2}\frac{h^4}{4} = \tfrac{1}{4}fh^2,$$

und daraus: $$X = \tfrac{3}{4}h,$$

so, dass also, wenn AN die Abscisse des gesuchten Schwerpunctes O ist, sofort $AN = \frac{3}{4}AF$, folglich auch $AO = \frac{3}{4}AE$ wird (§. 56).

34. Zur Bestimmung des Schwerpunctes einer mit der Grundfläche parallel abgestutzten Pyramide BCd (Fig. 18), in welcher die grössere Grundfläche $BCD = F$, die kleinere $bcd = f$, ihre Höhe $fF = h$, jene der Ergänzungspyramide $Af = h'$ und die Höhe der ergänzten Pyramide $AF = h''$ ist, muss man die beiden vorigen Integrationen von $x = h'$ bis $x = h''$ ausführen. Dadurch findet man für's Erste, nach einigen einfachen Reductionen (und wie ohnehin aus der Geometrie bekannt) $V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$, und damit weiters

$$\tfrac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})\,\mathrm{X} = \frac{F}{h''^2}\int_{h'}^{h''} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{F}{h''^2}\frac{(h''^4 - h'^4)}{4},$$

woraus $$\mathrm{X} = \tfrac{3}{4}\,\frac{F}{h''^2}\,\frac{(h''^4 - h'^4)}{h(F + f + \sqrt{Ff})} \;\ldots\; (a) \text{ folgt.}$$

Nimmt man ferner zwei ähnlich liegende Seiten der Pyramide, z. B. bc, BC und setzt $bc = a$, $BC = A$; so erhält man wegen $h':h''=a:A$ und $f:F=a^2:A^2$, auch $h':h=a:A-a$ und $h'':h=A:A-a$, folglich $h'=\frac{a}{A-a}h$ und $h''=\frac{A}{A-a}h$, so wie auch $f=\frac{a^2}{A^2}F$. Diese Werthe für h', h'' und f in die vorige Gleichung (a) substituirt und gehörig reducirt, erhält man auch:

$$X=\tfrac{3}{4}h\frac{A^4-a^4}{(A-a)^2(A^2+Aa+a^2)},$$

und wenn man den Abstand des gesuchten Schwerpunctes anstatt von der Spitze A abwärts, von der Grundfläche, d. i. vom Puncte F aufwärts zählt und diesen Abstand mit X' bezeichnet, wodurch in der vorigen Relation $X=h''-X'$ zu setzen ist, endlich auch nach allen Reductionen:

$$X'=\tfrac{1}{4}h\frac{A^2+2Aa+3a^2}{A^2+Aa+a^2}\ \ldots\ (b)\ \ (\S.\ 58).$$

35. Zur Bestimmung des Schwerpunctes eines Rotationskörpers drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 12) den beiden rechtwinkeligen Ordinaten BN, $B'N'$ und der Abscisse BB' begrenzte ebene Fläche um die Abscissenachse AX; so entsteht ein Rotationskörper, dessen Schwerpunct O offenbar in dieser Achse selbst liegt und wofür, wenn A der Ursprung der Coordinaten ist, $AO=X$ sein soll.

Mit Beibehaltung der in Nummer **28.** gewählten Bezeichnung beschreibt bei dieser Rotation das Flächenelement Pm (welches bekanntlich als ein Rechteck anzusehen ist) einen Cylinder von kreisförmigen Grundflächen, dessen Inhalt $dV=y^2\pi dx$ ist. Damit verwandeln sich die obigen Relationen (III) in **32.** in die folgenden:

$$V=\pi\int_{x'}^{x''}y^2 dx \quad\text{und}\quad VX=\pi\int_{x'}^{x''}xy^2 dx.$$

36. Dreht sich als einfachstes Beispiel das rechtwinkelige Dreieck ABC (Fig. 15) um die Cathete AC, so entsteht ein gerader Kegel von der Höhe $AC=h$ und der kreisförmigen Basis vom Halbmesser $BC=r$. Da nun $y=\frac{r}{h}x$ die Gleichung der Geraden AB ist, so folgt nach den beiden vorigen Relationen:

$$V=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2 dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3}=\tfrac{1}{3}r^2\pi h,\ \text{ferner}$$

$$\tfrac{1}{3}r^2\pi hX=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^3 dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^4}{4}=\tfrac{1}{4}r^2\pi h^2$$

und daraus wieder: $\quad X=\tfrac{3}{4}h.$

Anmerkung. Ist in dem genannten Dreiecke ABC (Fig. 15) bc parallel mit BC, und setzt man $bc = r$, $BC = R$, $Ac = h'$, $AC = h''$ und $Cc = h'' - h' = h$; so beschreibt bei der angenommenen Rotation die Fläche Cb einen mit der Grundfläche parallel abgestutzten Kegel, dessen Höhe $= h$ ist, und deren Grundflächen die Halbmesser R und r haben.

Um nun dafür den Schwerpunct O zu bestimmen, darf man nur die beiden vorigen Relationen in die nachstehenden

$$V = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^2 \mathrm{d}x \text{ und } VX = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^3 \mathrm{d}x \text{ verwandeln,}$$

woraus man $V = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{3}(h''^3 - h'^3)$ und $VX = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{4}(h''^4 - h'^4)$

folglich $X = \frac{3}{4} \frac{h''^4 - h'^4}{h''^3 - h'^3}$ erhält.

Nun ist $h' : h'' = r : R$ oder $h' : h = r : R - r$ und $h'' : h = R : R - r$, also $h' = h \frac{r}{R - r}$ und $h'' = h \frac{R}{R - r}$, folglich auch, wenn man diese Werthe

substituirt: $$X = \frac{3}{4} h \frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^3 - r^3},$$

oder wenn man $CO = X'$ setzt, wodurch $X = AO = h'' - X' = h \frac{R}{R - r} - X'$ wird, nach gehöriger Substitution und Reduction, endlich:

$$X' = \frac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

(analog mit der Gleichung (b) in **34**).

37. Ist die Begrenzungscurve NN' (Fig. 16) ein Kreisbogen, folglich der Rotationskörper ein Kugelabschnitt mit zwei Grundflächen, so ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpunct C zählt und den Halbmesser mit r bezeichnet, $y^2 = r^2 - x^2$ und daher (Relationen in **35.**):

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x\,(r^2 - x^2) = \pi\left[r^2(x'' - x') - \tfrac{1}{3}(x''^3 - x'^3)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(x'' - x')(3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2)$$

und $$VX = \pi \int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}x\,(r^2 - x^2) = \pi\left[\tfrac{1}{2} r^2 (x''^2 - x'^2) - \tfrac{1}{4}(x''^4 - x'^4)\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi(x''^2 - x'^2)(2r^2 - x'^2 - x''^2),$$

woraus durch Division $\frac{VX}{V}$ und gehöriger Reduction, sofort

$$X = \frac{3}{4} \frac{(x' + x'')(2r^2 - x'^2 - x''^2)}{3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2}$$

folgt.

Für einen Kugelabschnitt mit einer Grundfläche, folgt aus diesem Ausdrucke, wegen $x'' = r$ und wenn man die Höhe des Kugelsegmentes mit h bezeichnet, wodurch $x' = r - h$ wird, sofort: $$X = \tfrac{3}{4}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Endlich folgt noch aus dieser letztern Relation für den Schwerpunct der Halbkugel, wegen $h = r$, übereinstimmend mit dem Werthe CO in §. 59:
$$X = \tfrac{3}{8} r.$$

38. Ist endlich die erzeugende Fläche von einem parabolischen Bogen AN' (Fig. 12) begrenzt, folglich der Rotationskörper ein paraboliscses Conoid, so erhält man, wegen $y^2 = px$ (Gleichung der Parabel AN', die Abscissen vom Scheitel A gezählt):
$$V = \pi \int_0^x px\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_0^x p\,x^2\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^3}{3},$$
folglich: $$X = \tfrac{2}{3} x.$$

Guldin'sche Regeln.

39. Stellt o (Fig. 12) den Schwerpunct der ebenen Curve $NN' = l$ vor, so ist für $Po = Y$ nach der zweiten der Relationen (I) in **21.**:
$$Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\,\mathrm{d}s \text{ oder, wenn man mit } 2\pi \text{ multiplicirt, auch}$$
$$2Y\pi l = \int_{s_0}^{s_1} 2y\pi\,\mathrm{d}s.$$

Nun entsteht aber durch Umdrehung dieser Curve NN' um die Achse AX eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch den zweiten Theil dieser Gleichung ausgedrückt wird, während der erste Theil nichts anders als das Product aus dem Weg des Schwerpunctes o in die Länge l der Curve bezeichnet: die durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugte Rotationsfläche ist also gleich dem Producte aus der Länge der Curve in den Weg, welchen der Schwerpunct derselben bei dieser Umdrehung beschreibt.